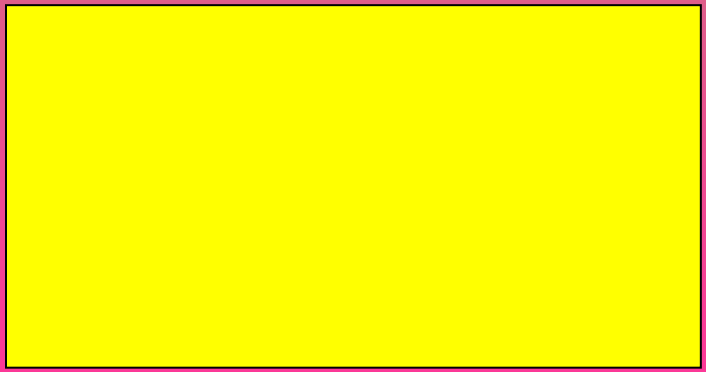
ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ

НОВАКОВА С.А.
АСТРАХАНЬ, СОШ № 23

Прямоугольник

- Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (**равны 90 градусам**).
- *Примечание*. В евклидовой геометрии. В евклидовой геометрии для того, чтобы четырёхугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы хотя бы три его угла были прямые. Четвёртый угол (в силу теоремы о сумме углов многоугольника) также будет равен 90°. В неевклидовой геометрии, где сумма углов четырёхугольника не равна 360° - прямоугольников не существует.



Свойства прямоугольника

- Прямоугольник является параллелограммом — его противоположные стороны параллельны.
- Стороны прямоугольника являются одновременно его высотами.
- Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его смежных сторон (по теореме Пифагора).
- Около любого прямоугольника можно описать окружность, причем диагональ прямоугольника равна диаметру описанной окружности (радиус равен полудиагонали)

ПЛОЩАДЬ И СТОРОНЫ

- Длиной прямоугольника называют длинну более длинной пары его сторон, а шириной – длину более короткой пары сторон.
- Величина площади прямоугольника равна произведению ширины прямоугольника на его длину (высоту).
- Периметр прямоугольника равен удвоенной сумме длин его ширины и длины.

ДИАГОНАЛИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

- Диагонали прямоугольника равны.
- Диагонали прямоугольника делятся точкой пересечения пополам.
- Длина диагонали прямоугольника вычисляется по теореме Пифагора и равна квадратному корню из суммы квадратов длины и ширины.

ПРИЗНАКИ

Параллелограмм является прямоугольником, если выполняются условия:

- Если 4 угла равны 90 градусам, то это прямоугольник
- Если диагонали параллелограмма равны.
- Если квадрат диагонали параллелограмма равен сумме квадратов смежных сторон.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача№1

Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

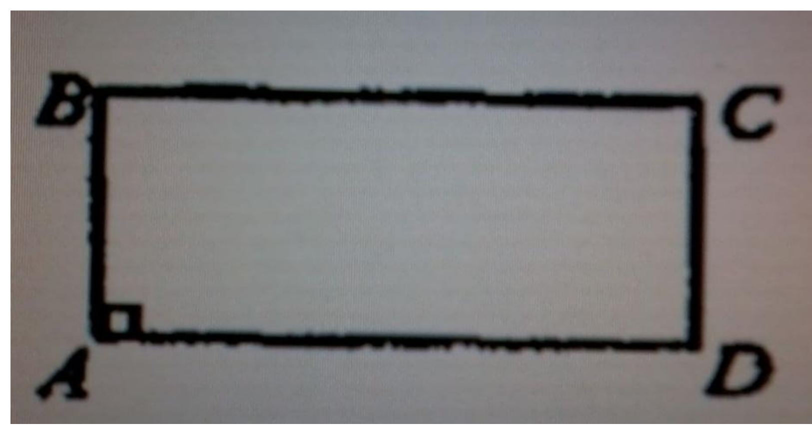
Дано:

ABCD- параллелограмм

∠A= 90°

Доказать:

ABCD-прямоугольник



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

ABCD-параллелограмм, следовательно, AB=CD, BC=AD, угол A=угол C= 90градусов; угол B= угол D.

Т.к. угол A+ угол B= 180 градусов, то угол B= 180градусов – 90градусов = 90градусов

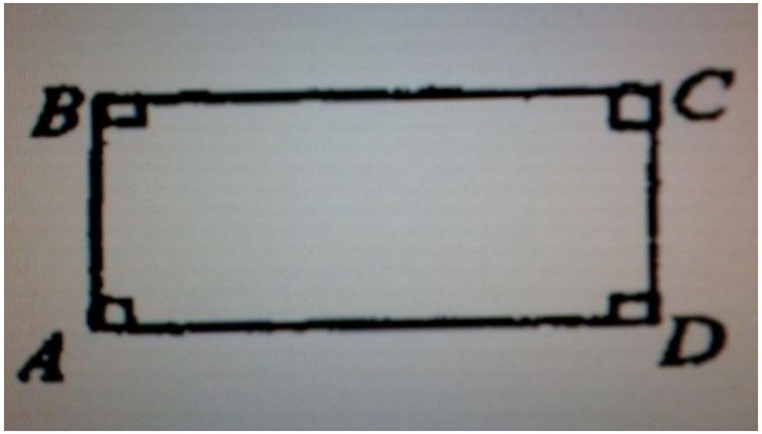
т.е. в ABCD стороны попарно равны; все углы прямые, следовательно, ABCD-прямоугольник.

Задача№2

Докажите, что если в четырехугольнике все углы прямые, то четырехугольник- прямоугольник.

Дано: угол А= уголу В= уголу С= углу D=90градусов

Доказать: ABCD- прямоугольник



Док-во:

угол А+ угол В=180градусов

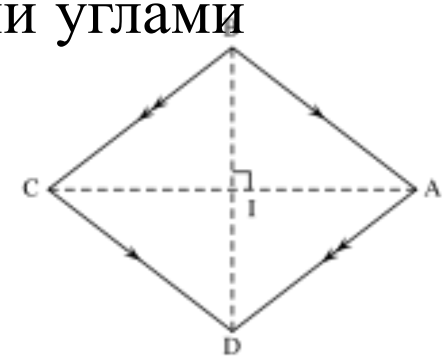
угол А, угол В- односторонние при AD и BC и секущей АВ, следовательно, ADII BC; также, ABIICD, угол B, угол C- односторонние при CD и AB и секущей BC;

ADIIBC, ABIICD, следовательно, ABCD- прямоугольник.

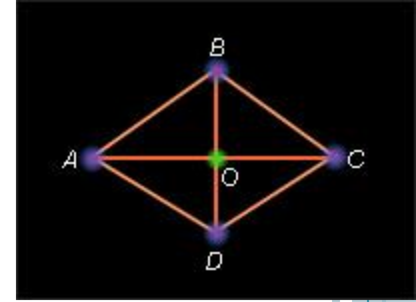
Ч.т.д.

Ромб

- **Ромб** (др.-греч. (др.-греч. ῥόμβος, лат. *rombus* «бубен «бубен») — это четырёхугольник «бубен») — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. Ромб является параллелограммом «бубен») — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. Ромб является параллелограммом. Ромб с прямыми углами «бубен») — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. Ромб является параллелограммом. Ромб с прямыми углами называется квадратом.



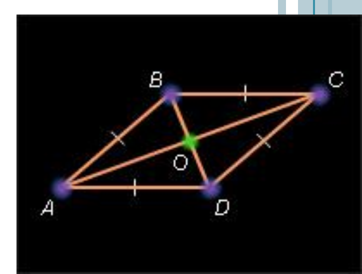
СВОЙСТВА



- Ромб является параллелограммомРомб является параллелограммом. Его противолежащие стороны попарно параллельны, AB | | CD, AD | | BC.
- ДиагоналиДиагонали ромба пересекаются под прямым углом (AC ⊥ BD) и в точке пересечения делятся пополам.

Доказательство

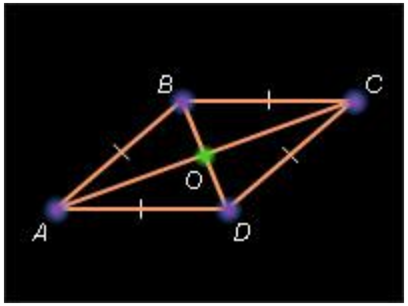
Пусть **ABCD** – данный ромб. Рассмотрим треугольник **ABD**. **AB = AD** по условию, и, следовательно, Δ **ABD** равнобедренный. Так как **ABCD** – параллелограмм, то **BO = OD**. Тогда **AO** – медиана и по теореме 4.4 **AO** – высота в треугольнике **BAD**. Следовательно, (**AC**) (**BD**) .



- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов (∠DCA = ∠BCA, ∠ABD = ∠CBD и т. д.).

  Доказательство

  Пусть **ABCD** – данный ромб. Рассмотрим треугольник **ABD**. **AB** = **AD** по условию, и, следовательно, Δ **ABD** – равнобедренный. Так как **ABCD** – параллелограмм, то **BO** = **OD**. Тогда **AO** – медиана и по теореме 4.4 **AO** – биссектриса в треугольнике **BAD**. Следовательно, **BAO** = **DAO**. Аналогично, рассмотрев треугольник **ABC**, получаем, что **BO** – медиана в равнобедренном треугольнике **ABC**, и, следовательно, **BO** – биссектриса угла **ABC**. Теорема доказана.
- Сумма квадратов диагоналей равна квадрату стороны, умноженному на 4 (следствие из *тождества параллелограмма*).



ПРИЗНАКИ

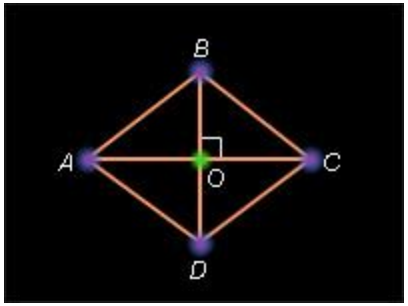
Параллелограмм $ABCD$ является ромбом, если выполняется одно из следующих условий:

- Все его стороны равны ($AB = BC = CD = AD$).
- Его диагонали пересекаются под прямым углом ($AC \perp BD$).

- Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то параллелограмм – ромб.

Доказательство

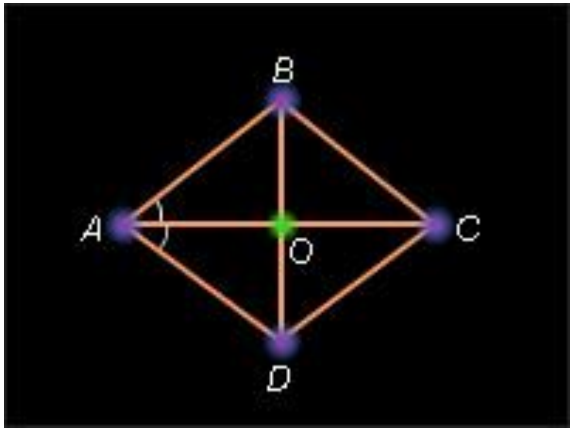
Пусть **ABCD** – данный параллелограмм, **AC** и **BD** – его диагонали и (**AC**)   (**BD**). Пусть **O** – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Треугольник **ABC** – равнобедренный с основанием **AC**. Действительно, так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то **AO = OC**, и тогда **BO** – медиана треугольника **ABC**, проведенная к стороне **AC**. Но по условию (**BO**)   (**AC**) и [**BO**] – высота треугольника **ABC**. Тогда **ABC** – равнобедренный треугольник с основанием **AC**. Отсюда – **AB = BC**. По свойству равенства противоположных сторон параллелограмма следует, что **AB = BC = CD = AD**. Таким образом, данный параллелограмм – ромб. Теорема доказана.



- Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то параллелограмм – ромб.

Доказательство

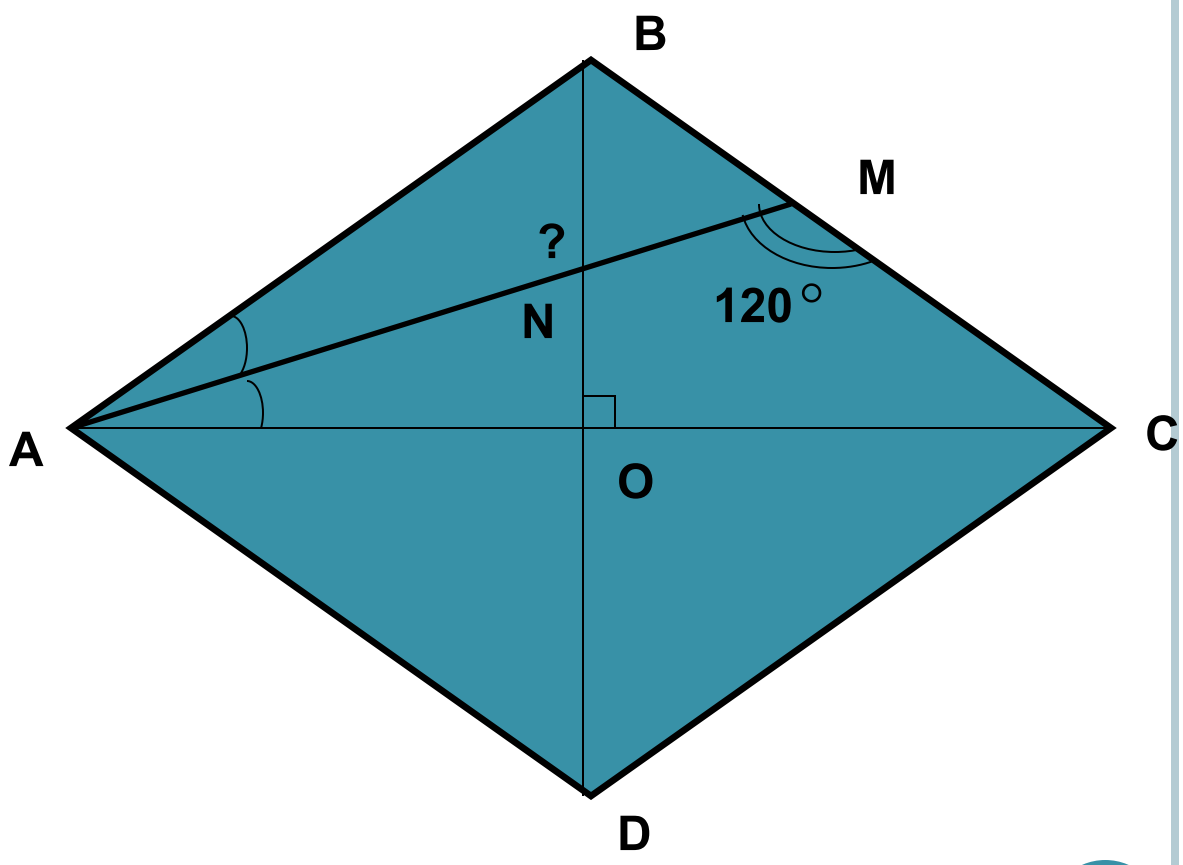
Пусть **ABCD** – данный параллелограмм, **AC** – его диагональ и, при этом, **AC** – биссектриса угла **A** параллелограмма. Так как **AC** – биссектриса угла **A**, то **BAC** = **CAD**. С другой стороны, углы **CAD** и **BCA** внутренние накрест лежащие при параллельных прямых **BC** и **AD** и секущей **AC** и по теореме 3.4 **BCA** = **CAD**. Отсюда **BAC** = **BCA** и по признаку равнобедренного треугольника (теорема 4.5) **ABC** равнобедренный, и, следовательно, **AB** = **BC**. Так как **ABCD** – параллелограмм, то **AB** = **CD**, **BC** = **AD**. Тогда **AB** = **BC** = **CD** = **AD**. Таким образом, **ABCD** – ромб. Теорема доказана.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

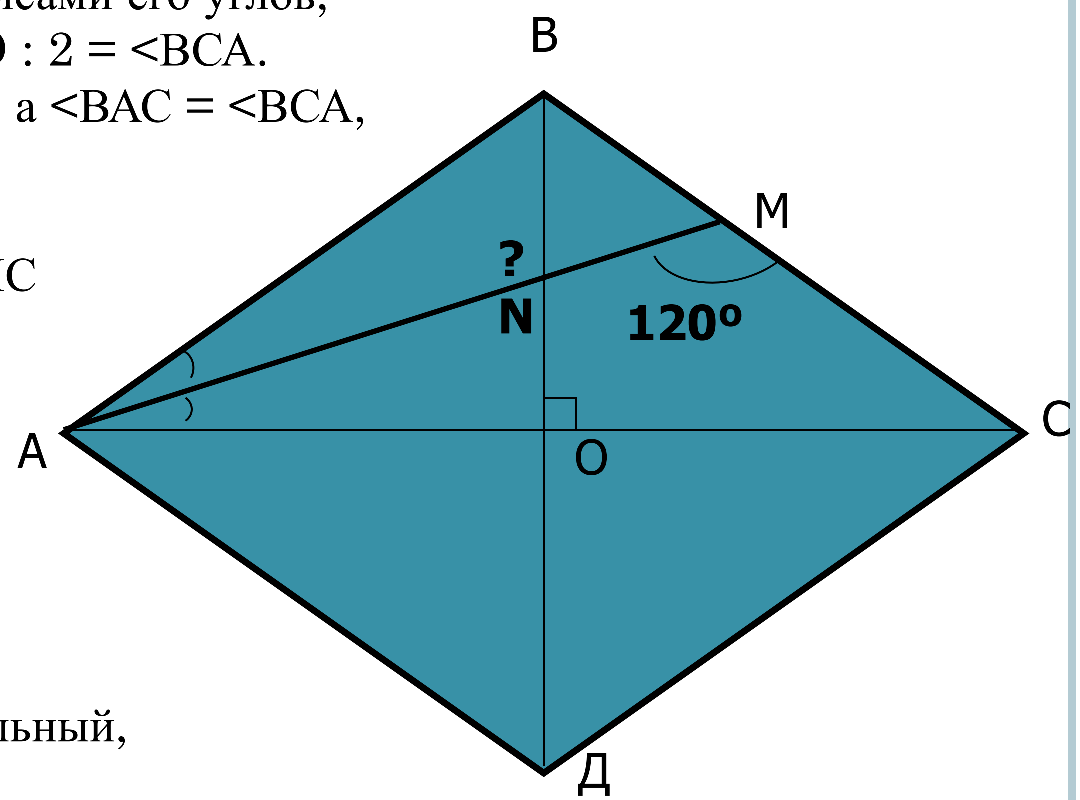
Задача№1

В ромбе ABCD биссектриса угла BAC пересекает сторону BC и диагональ BD соответственно в точках M и N. Найдите угол $\angle$ ANB, если AMC $= 120^\circ$.



РЕШЕНИЕ:

В ромбе противолежащие углы равны и диагонали являются биссектрисами его углов, т.е. <BAC = <BAD : 2 =<BCD : 2 = <BCA.
Т.к. AM – биссектриса <BAC, а <BAC = <BCA, то <MAC = <MCA : 2.
В треугольнике AMC
<MAC + <MCA = 180º - <AMC
<MAC + <MCA =180º -120º
<MAC + <MCA = 60º.
<MAC = <MCA : 2, тогда
<MAC = 20º,
<BAC = 40º.
В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны, треугольник AOB – прямоугольный,
<ABO = 90º - <BAO = 50º.



В треугольнике ABN <BAN = <MAC = 20º, <ABN = 50º, тогда

<ANB = 180º – (20º + 50º) = 110º.

Ответ: < ANB = 110º.

Задача№2

В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а)углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

Решение:

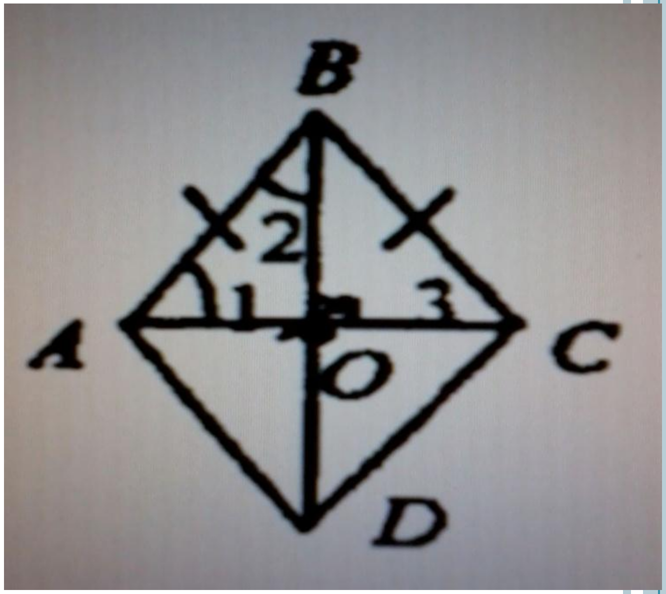
1) ***AB=AC, следовательно, тр.ABC-равносторонний, т.е. угол1= углуB= углу3= 60градусов***
2) ***По свойству углов ромба уголA+ уголB= 180градусов, т.е. уголA=180градусов- 60градусов=120градусов.***
3) ***Тр. ABO-прямоугольный, т.е. из свойства углов***

4) ***угол1+угол2= 90градусов,***

60градусов + угол2 = 90градусов,

угол2= 30градусов.

Ответ: а) уголA=уголC=120градусов, уголB=уголD=60градусов; б) угол1= 60градусов, угол2= 30градусов.

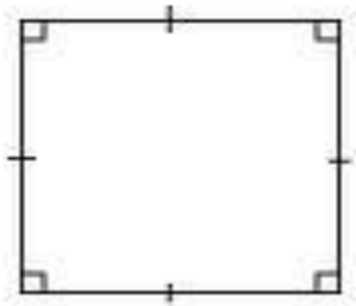


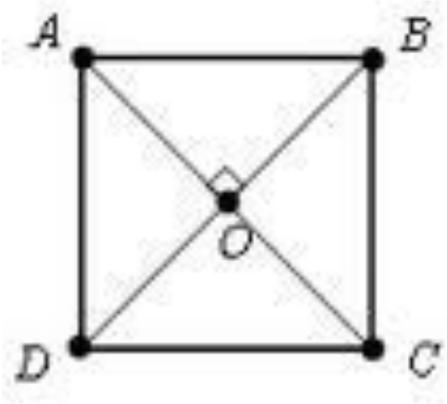
Квадрат

Квадра́т — правильный — правильный четырёхугольник или ромб, у которого все углы прямые, или параллелограмм, у которого все стороны и углы равны.

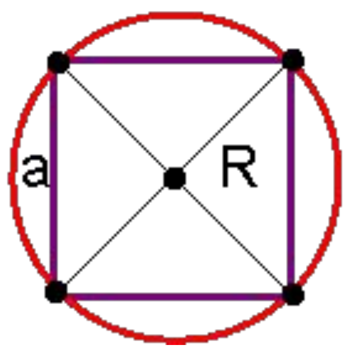
СВОЙСТВА КВАДРАТА

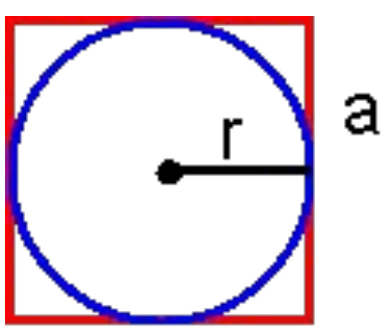
- Все углы квадрата прямые.
- Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.





- Около квадрата можно описать окружность. Радиус описанной окружности выражается через сторону ***<u>a</u>*** квадрата и его диагональ ***<u>d</u>***: $R = a$:v 2= d:2
- В квадрат можно вписать окружность. Радиус вписанной окружности равен половине стороны: r = a:2





РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

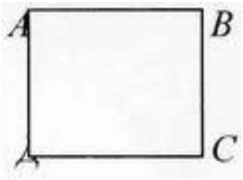
Задача№1

Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

Дано: ABCD-ромб,

угол A= 90градусов

Доказать: ABCD-квадрат.



Док-во:

ABCD- ромб, следовательно:

AB=BC=CD=AD,

уголA= уголC= 90градусов

уголA+ уголB=180градусов, т.е. уголB=180градусов-уголA= 90градусов.

Т.к. все стороны равны и все углы равны 90градусов, то ABCD-квадрат

Задача№2

В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырехугольник-квадрат.

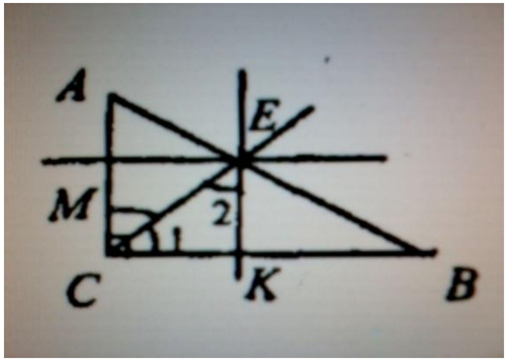
Дано:

тр.ABC, уголC=90градусов

CE-биссектриса;

EK||AC, ME||CK

Доказать: CMEK-квадрат



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

По условию МС//ЕК, значит, по определению СМЕК-параллелограмм.

По свойству углов параллелограмма угол С = углу Е, т. к. СЕ- биссектриса угла С, то ЕС-биссектриса угла Е, значит, угол1=угол2 и тр. СЕК- равнобедр.(по признаку).

Т.е. СК=ЕК.

СК=МЕ, т.к. СМЕК-параллелограмм,

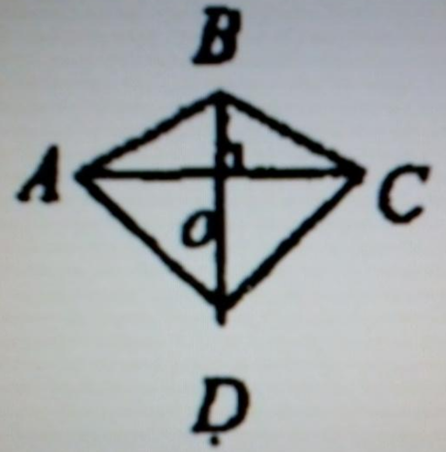
Следовательно, СМЕК- ромб.

угол С=90градусов,значит, угол Е=90градусов, угол М= угол К=90градусов.

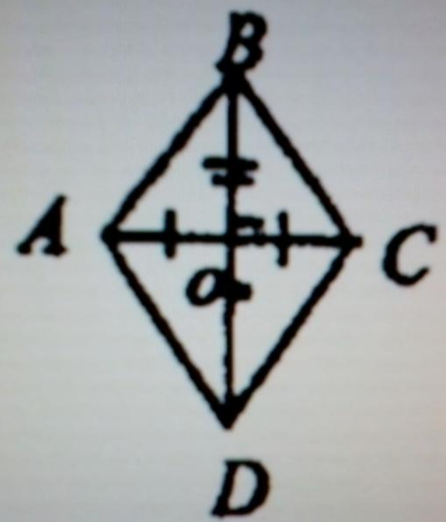
Следовательно, СМЕК- квадрат, что и требовалось доказать.

Разминка

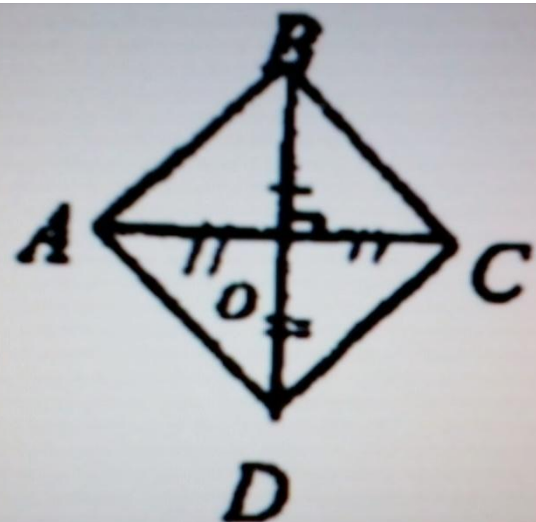
Является ли четырехугольник квадратом, если его диагонали: а)равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в)равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?



а) нет;



б) нет;



в) да.