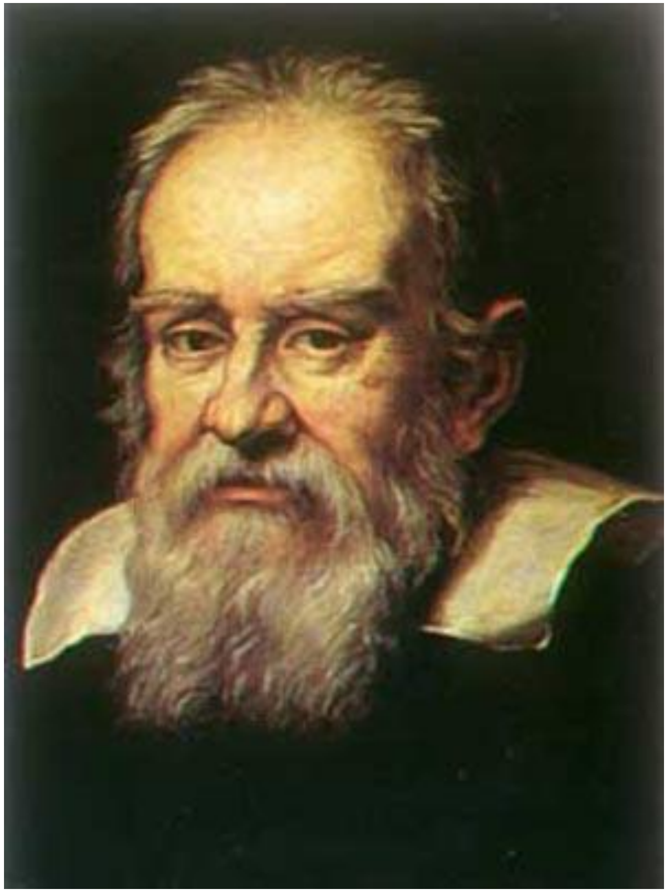
ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ТЕОРЕМА СИНУСОВ.

Доклад подготовил ученик 9 «В» класса Полутов Вадим

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- Утверждения, обобщающие теорему Пифагора и эквивалентные теореме косинусов, были сформулированы отдельно для случаев острого и тупого угла в 12 и 13 предложениях II книги «Начал» Евклида.



ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- Утверждения, эквивалентные теореме косинусов для сферического треугольника, применялись в сочинениях математиков стран Средней Азии. Теорему косинусов для сферического треугольника в привычном нам виде сформулировал Региомонтан, назвав её «теоремой Альбатегния» (по имени ал-Баттани).

Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg).
(Geb. 6. Juni 1436, gest. 6. Juli 1476.)

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- В Европе теорему косинусов популяризовал Франсуа Виет в XVI столетии. В начале XIX столетия её стали записывать в принятых по сей день алгебраических обозначениях.

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

ТЕОРЕМА:

КВАДРАТ СТОРОНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА РАВЕН СУММЕ КВАДРАТОВ ДВУХ ДРУГИХ СТОРОН МИНУС УДВОЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭТИХ СТОРОН НА КОСИНУС УГЛА МЕЖДУ НИМИ.

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

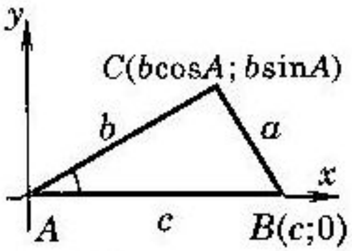


Рис. 293

- **<u>Доказательство:</u>**
- **Пусть в треугольнике ABC AB=c, BC=a, CA=b. Докажем, например, что:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

- **Введем систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке. Тогда точка B имеет координаты (c;0), а точка C имеет координаты (bcosA; bsinA). По формуле расстояния между двумя точками получаем:**
- **$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A = b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A - 2bc\cos A + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$**
- **Теорема доказана.**
- **Теорему косинусов называют иногда обобщенной теоремой Пифагора. Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора. В самом деле, если в треугольнике ABCугол A прямой, то $\cos A = \cos 90^0 = 0$ и по формуле**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

- **Получаем: $a^2 = b^2 + c^2$, то есть квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

Пример 1. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 9, катет $BC = 3$. На гипотенузе взята точка M, причем $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM.

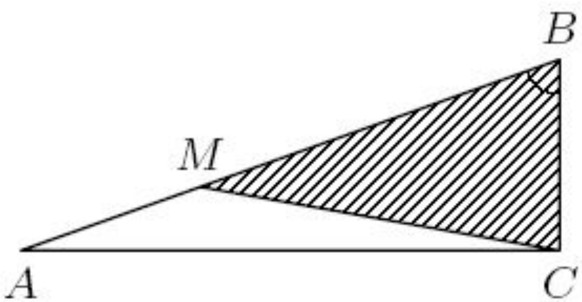


Рис. 71

Решение. Из прямоугольного треугольника ABC (рис. 71) находим, что $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$. В треугольнике BMC известны стороны $BC = 3$, $BM = 6$ и косинус угла между ними. По теореме косинусов

$$CM^2 = BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cdot \cos\angle B = 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 33.$$

Следовательно, $CM = \sqrt{33}$.

Пример 2. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Найдите сторону AB.

Решение. Поскольку $\angle AOB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$ (см. задачу **1.116⁰**), то $\angle C = 2\angle AOB - 180° = 240° - 180° = 60°$ (рис. 72). По теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle C =$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} = a^2 + b^2 - ab.$$

Следовательно, $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

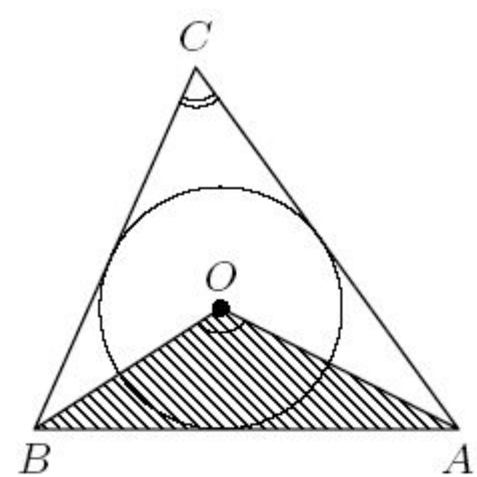


Рис. 72

ТЕОРЕМА СИНУСОВ. ИСТОРИЯ.

- Самое древнее доказательство для теоремы синусов на плоскости описано в книге Насир ад-Дин Ат-Туси «Трактат о полном четырёхстороннике» написанной в XIII веке. Теорема синусов для сферического треугольника была доказана математиками средневекового Востока ещё в X веке. В труде Ал-Джайяни XI века «Книга о неизвестных дугах сферы» приводилось общее доказательство теоремы синусов на сфере

Насир ад-Дин Ат-Туси

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

ТЕОРЕМА:

СТОРОНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ СИНУСАМ ПРОТИВОЛЕЖАЩИХ УГЛОВ.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

__Доказательство:__

Пусть в треугольнике ABC AB=c, BC=a, CA=b. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

По теореме о площади треугольника: S=1/2absinC, S=1/2bcsinA, S=1/2casinB

Из первых двух равенств получаем: 1/2absinC=1/2bcsinA, откуда $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Точно также из второго и третьего равенств следует: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Итак, $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

- **Замечание:** Можно доказать, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, для любого треугольника ABC со сторонами AB=c, BC=a, CA=b имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

- Где R – радиус описанной окружности.

Пример 1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 и 8 и углом между ними, равным $60°$.

Решение. Пусть ABC — треугольник, в котором $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60°$, R — искомый радиус описанной окружности (рис. 74). По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC} =$$
$$= \sqrt{25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7.$$

Следовательно, $R = \dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

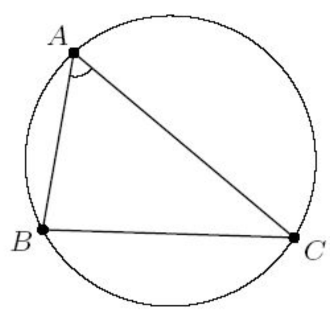


Рис. 74

Пример 2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $AB = a$; AD — биссектриса. Найдите BD.

Решение. Угол BDA — внешний угол треугольника ADC (рис. 75), поэтому $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACB = \frac{\alpha}{2} + \beta$. По теореме синусов из треугольника ADB находим, что

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\sin(\alpha/2 + \beta)} = \frac{BD}{\sin(\alpha/2)},$$

откуда

$$BD = \frac{a \sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2 + \beta)}.$$

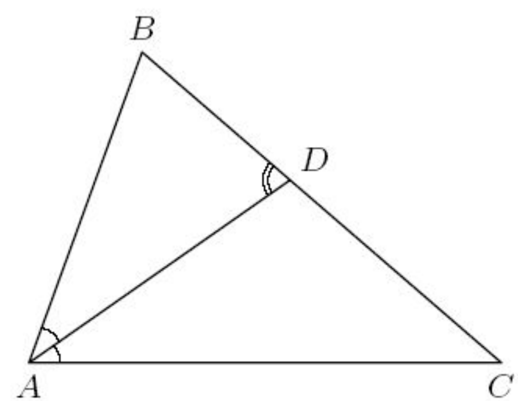


Рис. 75

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!