

Тема: Исследование функции на
МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ.

- Монотонность функции
- Экстремумы функции

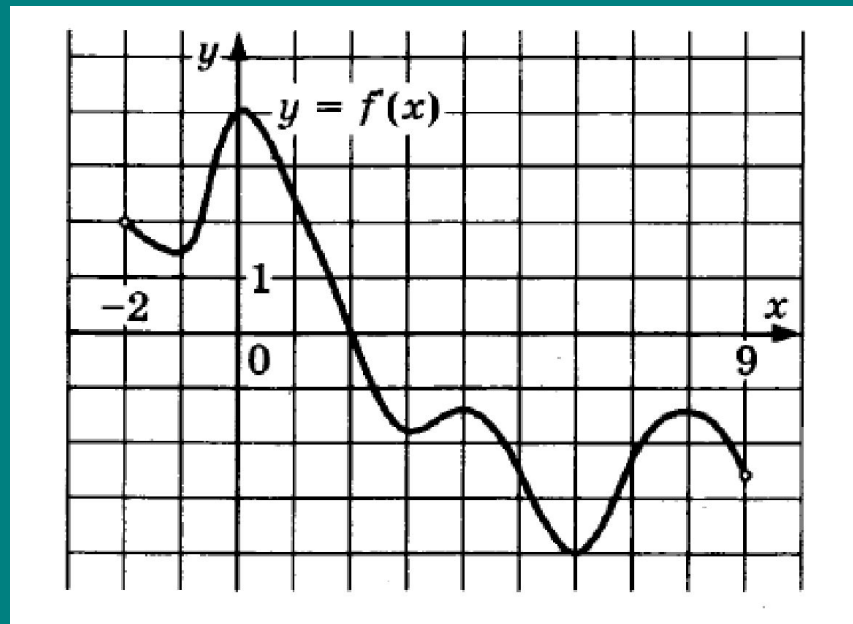
Учитель математики КОР №1

Березина М.Г.

Исследование функции по графику

По графику функции найдите:

- 1) промежутки возрастания и убывания функции;
- 2) точки экстремума и экстремумы функции

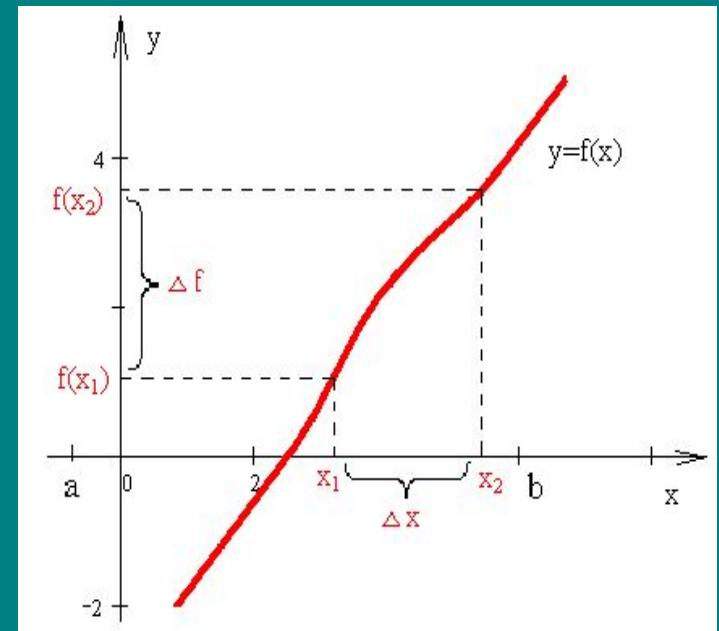


Возрастание и убывание функции

Опр. 1 Функция $y=f(x)$, определяемая на интервале $(a;b)$, называется **возрастающей** на этом интервале, если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_2 и x_1 – любые две точки из интервала, следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Если обозначить $\Delta x = x_2 - x_1$
и $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$, то

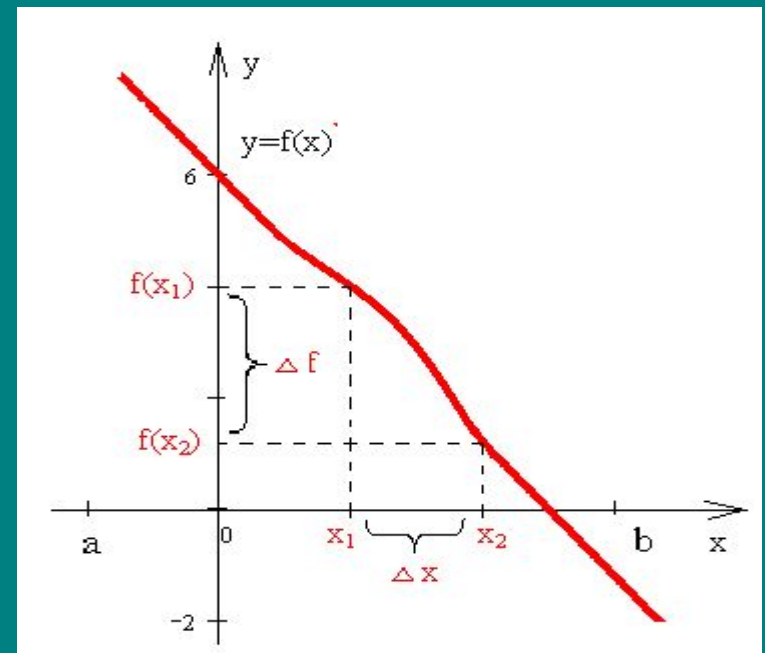
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$$



Опр. 2 Функция $y=f(x)$, определяемая на интервале $(a;b)$, называется **убывающей** на этом интервале, если из неравенства $x_2 > x_1$, следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Заметим, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$$



Теорема 1. (Необходимое условие возрастания функции)

Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ возрастает, то ее производная не может быть отрицательной ни в одной точке этого интервала, т.е. $f'(x) \geq 0$ для $a < x < b$.

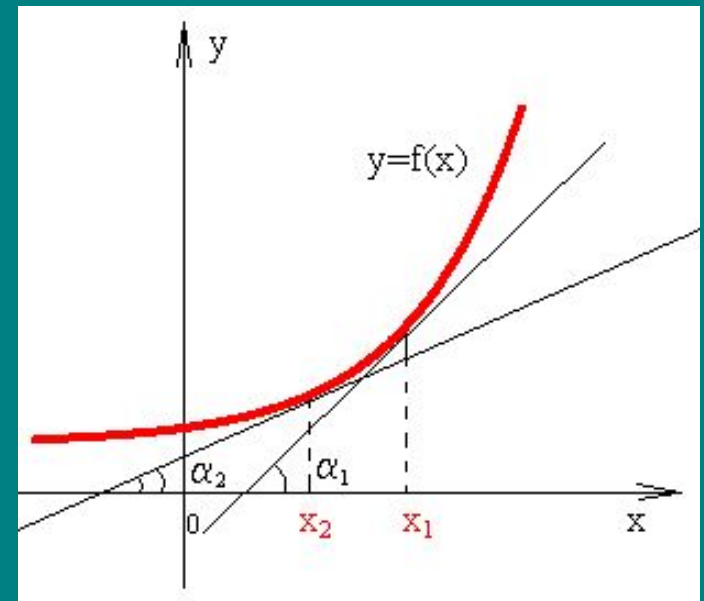
Доказательство: Пусть $y=f(x)$ возрастает на $(a;b)$,

тогда
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

Тогда при $\Delta x \square 0$, то

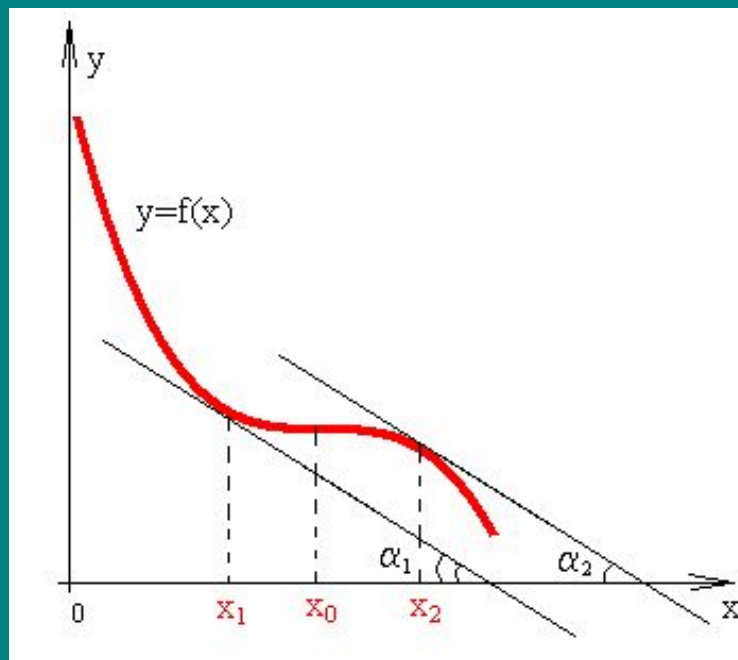
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

Т.к. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$, то $f'(x) > 0$ **Ч.т.д.**



Теорема 2. (Необходимое условие убывания функции)

Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ убывает, то ее производная не может быть положительной ни в одной точке этого интервала, т.е. $f'(x) \leq 0$ для $a < x < b$.



Теорема 3. (Достаточное условие возрастания функции)

Если непрерывная на $[a;b]$ функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке имеет положительную производную, то функция возрастает на $[a;b]$

Доказательство: Пусть $y=f(x)$ для всех $a < x < b$. Рассмотрим $x_2 > x_1$ из $[a;b]$.

По теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1) f'(c)$, где $x_1 \leq c < x_2$,

поэтому по условию $f'(c) > 0$

и $x_2 - x_1 > 0$ имеем $f(x_2)-f(x_1) > 0$, т.е. из $x_2 > x_1$ следует

$f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция возрастает, ч.т.д.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Теорема 4. (Достаточное условие убывания функции)

Если непрерывная на $[a;b]$ функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке имеет отрицательную производную, то функция убывает на $[a;b]$.

Пример 1. Найти интервал монотонности функции $y=x^3-3x$.

Решение. Находим область определения функции $D(y)=\mathbb{R}$

Находим производную
функции

$$y' = 3x^2 - 3$$

$y' > 0$, если $3x^2 - 3 > 0$ при
 $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

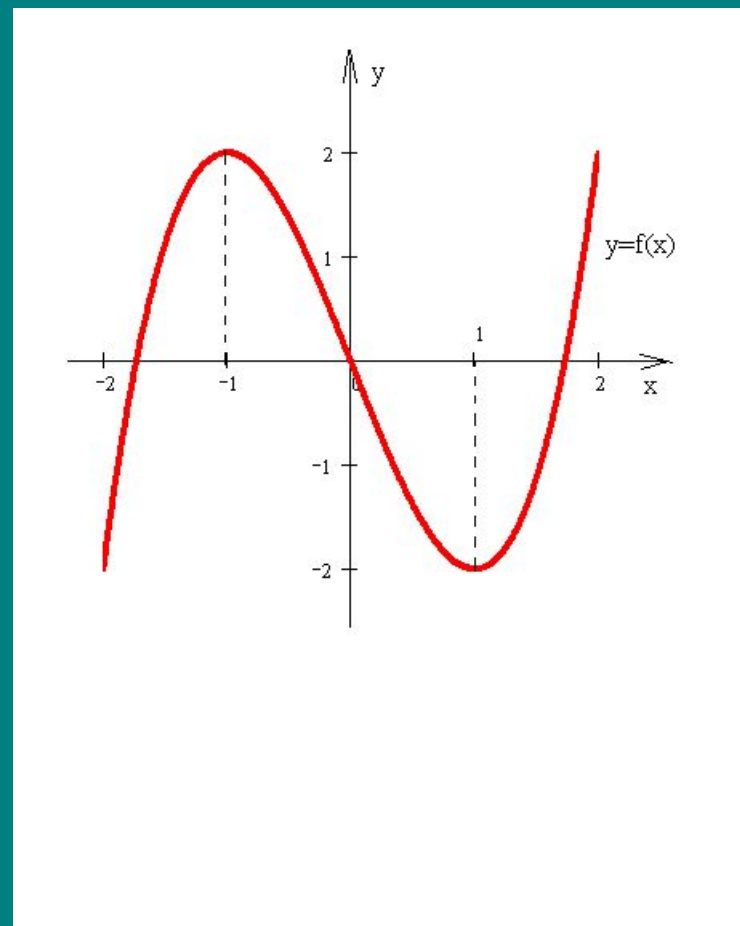
$y' < 0$ при $x \in (-1; 1)$

Ответ:

функция возрастает

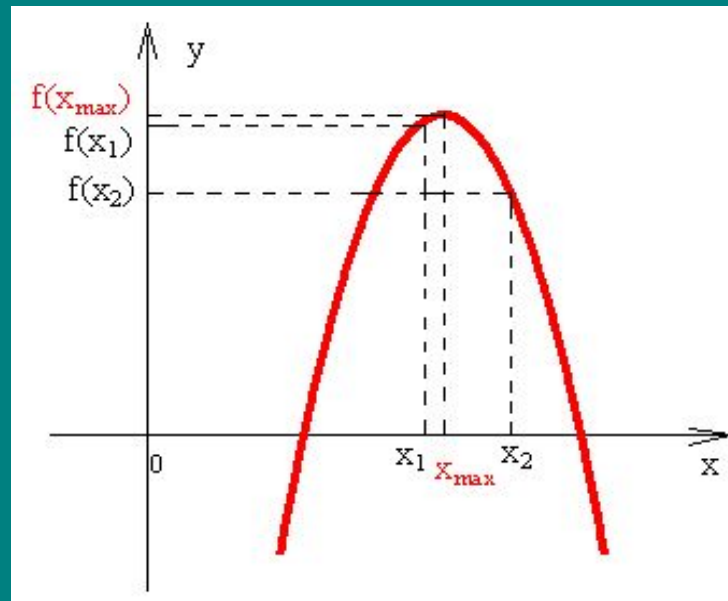
на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$,

функция убывает на $[-1; 1]$

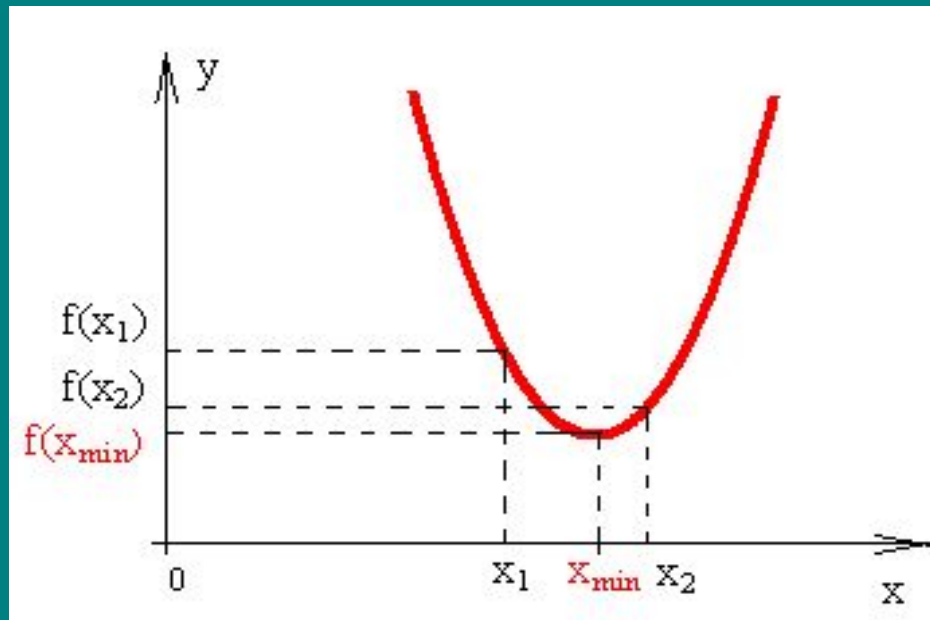


Точки экстремума и экстремумы функции

Опр. 3 Точка x_0 называется точкой максимума функции $y=f(x)$, если существует такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется $f(x) < f(x_0)$



Опр. 4 Точка x_0 называется точкой минимума функции $y=f(x)$, если существует число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется $f(x) > f(x_0)$



Точка максимума и точка минимума называются точками **экстремума**.

Значение функции в точках экстремума называется **экстремумом функции**, т.е.

$f_{\max} = f(x_{\max})$ – максимум функции

$f_{\min} = f(x_{\min})$ – минимум функции.

Теорема 5. (Необходимое условие экстремума)

Если дифференциальная функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна 0, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Пусть x_0 – точка максимума, тогда в окрестности точки x_0 выполняется $f(x_0) > f(x)$, поэтому

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0, \text{ если } \Delta x > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0, \text{ если } \Delta x < 0$$

По условию существует производная, которая равна

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Имеем: $f'(x_0) \leq 0$ при $\Delta x > 0$ и $f'(x_0) \geq 0$ при $\Delta x < 0$, следовательно $f'(x_0) = 0$, ч.т.д.

Теорема 6. (Достаточное условие экстремума)

Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в δ -окружности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) $f'(x)$ меняет знак, то x_0 – точка экстремума, причем,

если с «+» на «-», то x_0 – точка максимума,

с «-» на «+», то x_0 – точка минимума.

Доказательство: Рассмотрим δ -окр-сть точки x_0 . Пусть $f'(x) > 0$ при любых $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ при любых $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на $(x_0 - \delta; x_0)$ и убывает на $(x_0; x_0 + \delta)$, следовательно $f(x_0)$ – наибольшее значение на

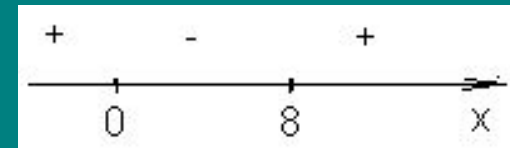
$(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т.е. $f(x) < f(x_0)$ для $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, следовательно точка x_0 – точка максимума функции, ч.т.д.

Пример 2. Найти экстремумы функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$

Решение. $D(y)=\mathbb{R}$, $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$ при $x=8$

и y' не существует при $x=0$

Поставим эти точки на числовой прямой и расставим знаки



производной.

$$x_{\max} = 0, \quad x_{\min} = 8$$

$$y_{\max} = 0, \quad y_{\min} = 8/3 - 4 = -4/3$$

Ответ: $y_{\min} = -4/3$; $y_{\max} = 0$

