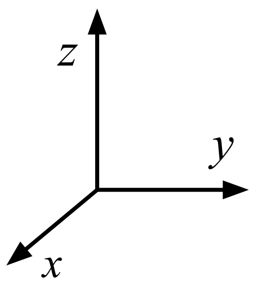
ЛЕКЦИЯ 4

Задачи теплопроводности в различных системах координат.

Декартова система координат



$$T = T(x, y, z, t) \qquad \vec{q} = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{k}\right) \tag{1}$$

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_V \tag{2}$$

$$\boxed{c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_V} \tag{3}$$

В практике часто встречаются такие условия, которые приводят к необходимости записи уравнения теплопроводности в иной форме, более удобной для представления решения и его физической трактовки.

Зависимость вида уравнения от используемой системы координат можно исключить, используя операторную запись

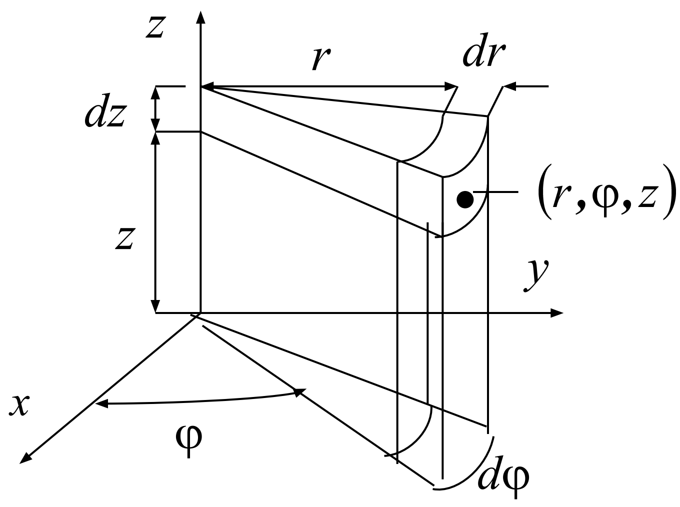
$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{q_V}{\lambda} \qquad \boxed{\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

$$a = \lambda/(c\rho)$$

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda grad T) + q_V \quad \text{или} \quad c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(\lambda\nabla T) + q_V \tag{4}$$

Слагаемые, выражающие тепловыделение и аккумулирование энергии, инвариантны относительно системы координат (т.е., неизменны); но слагаемые, выражающие результирующий кондуктивный тепловой поток, зависят от геометрии и, следовательно, от системы координат.

Цилиндрическая система координат r, φ, z

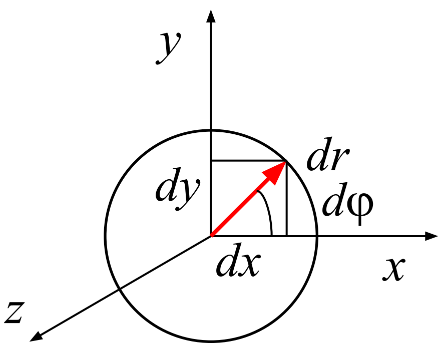


$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda \mathbf{q}) \equiv \nabla \cdot (\lambda \mathbf{q}) \qquad (5)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$$

$$x = r\, \boldsymbol{cos}\, \varphi \qquad y = r\, \boldsymbol{sin}\, \varphi \qquad (6)$$

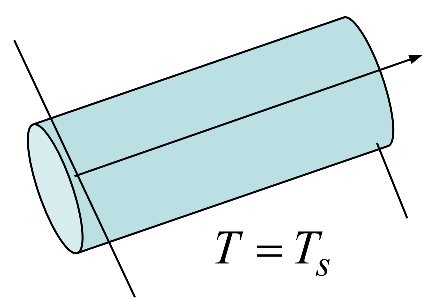
$$\boxed{\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$



$$q_r = -\frac{\partial T}{\partial r}; q_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}; q_z = -\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (7)$$

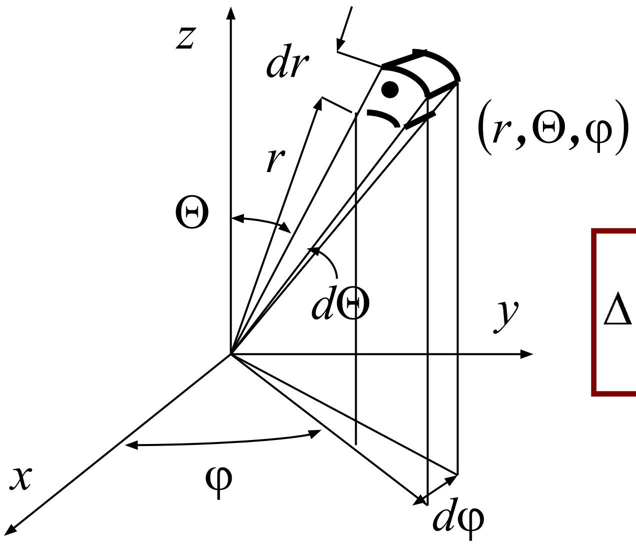
$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_V}{\lambda} \qquad (8)$$

$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_V} \qquad (9)$$



$$a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

Сферическая система координат r, θ, φ



$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda \mathbf{q}) \equiv \nabla \cdot (\lambda \mathbf{q})$$

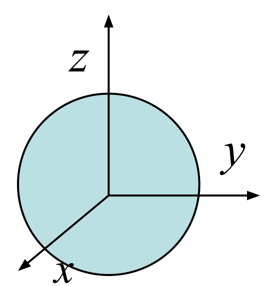
$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$$

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}$$

$$q_r = -\frac{\partial T}{\partial r};\, q_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta};\, q_\theta = -\frac{1}{r \sin\Theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi} \qquad (10)$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{q_V}{\lambda} \qquad (11)$$

$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{q_V}{\lambda}} \qquad (12)$$



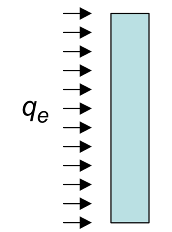
$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad z = r \cos\theta$$

Уравнения теплопроводности для тел канонической формы

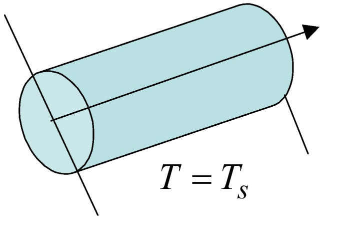
Запись уравнений в различных системах координат особенно удобна, когда нужно найти распределение температуры в телах канонической формы – в цилиндре или шаре. В этих случаях уравнения существенно упрощаются при задании особых условий, когда поле температуры зависит только от одной координаты.

параллелепипед
$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V$$

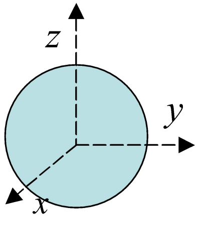
пластина
$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q_V}{\lambda}}$$



цилиндр
$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q_V}{\lambda}}$$



сфера
$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q_V}{\lambda}}$$



Три последних уравнения вместе:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q_V}{\lambda} \qquad (13)$$

$n=0$ плоскость $\qquad$ $n=1$ цилиндр $\qquad$ $n=2$ сфера

$$\theta=\frac{T-T_0}{T_*-T_0} \qquad \tau=\frac{t}{t_*} \qquad \xi=\frac{r}{r_*}$$

На доске

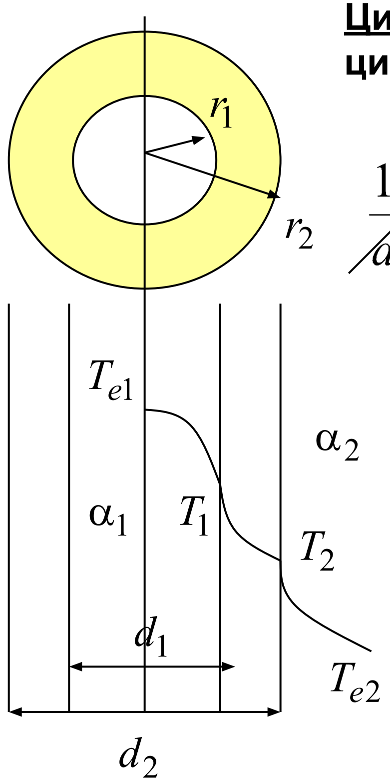
$$\frac{1}{Fo}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{1}{\xi^n}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^n\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)+\bar{q}_V \qquad (14)$$

Число Фурье $\boxed{Fo=\frac{at_*}{r_*^2}}$ $\qquad$ $\bar{q}_V=\frac{q_V r_*^2}{\lambda(T_*-T_0)}$

$$\bar{q}_V=1: \longrightarrow T_*=T_0+\frac{q_V}{\lambda}r_*^2$$

$$\frac{at_*}{r_*^2}=1:\quad \tau=\frac{at}{r_*^2} \Longrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial Fo}=\frac{1}{\xi^n}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^n\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)+1$$

Стационарные задачи теплопроводности в различных системах координат



<u>Цилиндрическая стенка:</u> **стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним радиусом r_1;** $d_1 = 2r_1$

$$\cancel{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} + \cancel{\frac{q_V}{\lambda}} \qquad \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{dT}{dr} = u \longrightarrow \frac{du}{dr} + \frac{1}{r}u = 0 \longrightarrow \ln u = -\ln r + \ln C_1 \longrightarrow \qquad (16)$$

$$T = C_1 \ln r + C_2 \qquad (17)$$

$$\Rightarrow \quad q = -\lambda\frac{dT}{dr} = -\lambda\frac{C_1}{r} \qquad (18)$$

Удельный тепловой поток не постоянен по толщине и убывает по направлению к внешней поверхности

В стационарных условиях постоянным должен быть <u>полный тепловой</u> поток проходящий через участок цилиндрической трубы длиной *l* и равный

$$Q = q \cdot F \equiv q \cdot 2\pi r l \qquad (19)$$

Удельный тепловой поток убывает с радиусом

Площадь поверхности увеличивается с радиусом

!!! Температура по толщине трубы изменяется нелинейно даже при постоянном коэффициенте теплопроводности

Постоянные интегрирования могут быть найдены из граничных условий.

Граничные условия первого рода $r = r_1 : T = T_1; \; r = r_2 : T = T_2$

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2, \\ T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2, \end{cases}$$

$$T = \frac{T_1 \ln(r_2/r) + T_2 \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}; \tag{20}$$

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{C_1}{r}$$

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot l \cdot 2\pi r \equiv \frac{\lambda \Delta T}{\ln(r_2/r_1)} \cdot 2\pi l, \quad \text{Вт} \tag{21}$$

Погонный тепловой поток

$$q_{\text{п}} = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda}{\ln(r_2/r_1)} \Delta T, \quad \Delta T = T_1 - T_2 \tag{22}$$

Граничные условия третьего рода (температуры стенок – неизвестны)

Можем поступить аналогично: $$T = C_1 \ln r + C_2$$

$$r = r_1 :\ \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_{1e}(T - T_{e1});\ r = r_2 :\ \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_{2e}(T_{e2} - T)$$

Поступим иначе:

Конвективный тепловой поток на единицу длины трубы должен равняться погонному тепловому потоку вследствие теплопроводности:

$$(23)\quad \begin{cases} q_{\text{п}} = \alpha_{1e}(T_{e1} - T_1)\cdot 2\pi r_1 \\ q_{\text{п}} = \dfrac{2\pi\lambda}{ln(r_2/r_1)}(T_1 - T_2) \\ q_{\text{п}} = \alpha_{2e}(T_2 - T_{e2})\cdot 2\pi r_2 \end{cases}$$

$$q_{\text{п}} = \pi K_c (T_{e1} - T_{e2}) \qquad (24)$$

$$K_c = \frac{1}{\dfrac{1}{2\alpha_{1e} r_1} + \dfrac{1}{2\lambda} ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) + \dfrac{1}{2\alpha_{2e} r_2}},\ \text{Вт/(М·К)} \qquad (25)$$

Коэффициент теплопередачи для цилиндрической стенки

$$R_c = \frac{1}{K_c} = \frac{1}{2\alpha_{1e} r_1} + \frac{1}{2\lambda} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\alpha_{2e} r_2} \qquad (26)$$

плоская стенка

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \qquad K = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^{-1} \ \text{Вт/(М}^2\text{·К)}$$

Полное термическое сопротивление трубы

Размерность отличается от размерности *К* для плоской стенки!

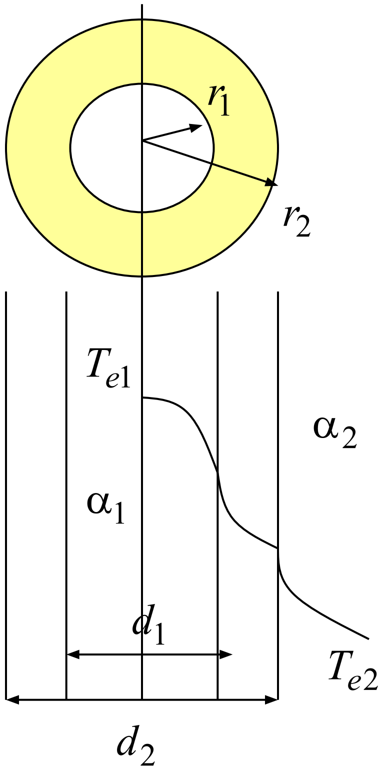
Из системы уравнений (23) мы можем найти и температуры стенок и подставить в (20)

$$T = \frac{T_1 \ln(r_2/r) + T_2 \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)};$$

Можно на доске

В безразмерных переменных

$$\theta = \frac{T - T_{e2}}{T_{e1} - T_{e2}} \quad \xi = \frac{r}{r_2}; \ (r_* = r_2)$$



$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} = 0 \qquad (27)$$

$$\xi = \delta = r_1/r_2: \ \frac{d\theta}{d\xi} = -Bi \cdot \alpha \cdot \theta \qquad (28)$$

$$\xi = 1: \ \frac{d\theta}{d\xi} = Bi(\theta - 1) \qquad (29)$$

$$Bi = \frac{\alpha_{2e} r_2}{\lambda} \quad \alpha = \frac{\alpha_{1e}}{\alpha_{2e}}$$

$$\theta = C_1 \ln \xi + C_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{\delta} = -Bi \cdot \alpha \cdot (C_1 \ln \delta + C_2) \\ C_1 = Bi(C_2 - 1) \end{cases} \qquad (30)$$

Задание на дом:

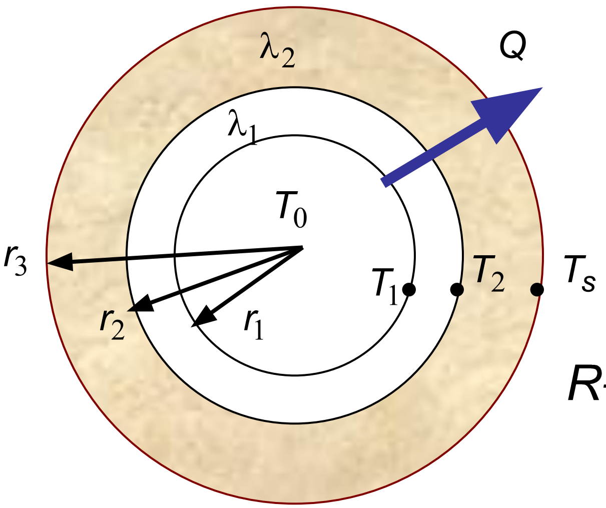
А) Перейти аккуратно к безразмерным переменным

Б) Найти постоянные интегрирования из системы (30)

В) Построить $\theta(\xi)$ для разных значений параметров

Электрическая аналогия

Принципы последовательного и параллельного соединений термических сопротивлений в цепь, справедливые для плоской стенки в прямоугольной системе координат, можно применить и для задачи о теплопроводности в полом цилиндре.



$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot l \cdot 2\pi r \equiv \frac{\lambda \Delta T}{ln(r_2/r_1)} \cdot 2\pi l,$$

$$Q = \frac{\Delta T}{ln(r_2/r_1)/(2\pi l \lambda)},$$

В форме закона Ома

$$R_T = \frac{ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda l}$$

Термическое сопротивление полого цилиндра

Жидкость течет в трубе, покрытой изоляционным материалом

$$R_0 = \frac{1}{\alpha F} = \frac{1}{\alpha 2\pi r_1 l}$$

Конвективное термическое сопротивление жидкости

Имеем последовательное соединение конвективного сопротивления жидкости с двумя кондуктивными термическими сопротивлениями. Если задана температура жидкости и температура внешней поверхности:

А)
$$Q = \left(\frac{\Delta T}{R}\right)_{full} = \frac{T_0 - T_s}{\frac{1}{2\pi\alpha_1 r_1 l} + \frac{1}{2\pi l \lambda_1} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\pi l \lambda_2} ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} \qquad (31)$$

Сопротивление изоляции

Если заданы температуры внутренней и внешней поверхностей

Б)
$$Q = \left(\frac{\Delta T}{R}\right)_{full} = \frac{T_1 - T_s}{\frac{1}{2\pi l \lambda_1} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\pi l \lambda_2} ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} \qquad (32)$$

Пример

В алюминиевой трубе, имеющей теплопроводность $\lambda_1 = 185$ Вт/(м К), течет водяной пар при температуре 110°С. Внутренний диаметр трубы – 10 см, наружный диаметр – 12 см. Труба расположена в помещении с температурой $T_e =$ 30°С; коэффициент конвективной теплоотдачи от трубы к воздуху α_e равен 15 Вт/(м^{2}К). 1) Требуется найти тепловой поток на единицу длины трубы, если труба не теплоизолирована.

2)Чтобы снизить тепловые потери от трубы, она была покрыта слоем теплоизоляции ($\lambda_2 = 0{,}2$ Вт/(м К)) толщиной 5 см. Найти тепловой поток на единицу длины от тепоизолированной трубы. Предположить, что конвективное термическое сопротивление пара пренебрежимо мало.

Решение. Для трубы без теплоизоляции наиболее существенными являются кондуктивное термическое сопротивление самой трубы и конвективное термическое сопротивление комнатного воздуха. Поскольку конвективным термическим сопротивлением пара можно пренебречь, температура внутренней поверхности трубы равна температуре пара. Тепловой поток на единицу длины трубы следует из соотношения

$$q = \frac{T_0 - T_e}{\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_1} + \dfrac{1}{2\pi r_2 \alpha_e}} = \frac{110-30}{\dfrac{\ln(6/5)}{2\pi\cdot 185} + \dfrac{1}{2\pi\cdot 0{,}06\cdot 15}} = \frac{80}{1{,}57\cdot 10^{-4} + 0{,}177} = 452 \text{ Вт/м.}$$

Для трубы с теплоизоляцией нужно добавить термическое сопротивление теплоизоляции, и соотношение для теплового потока примет вид

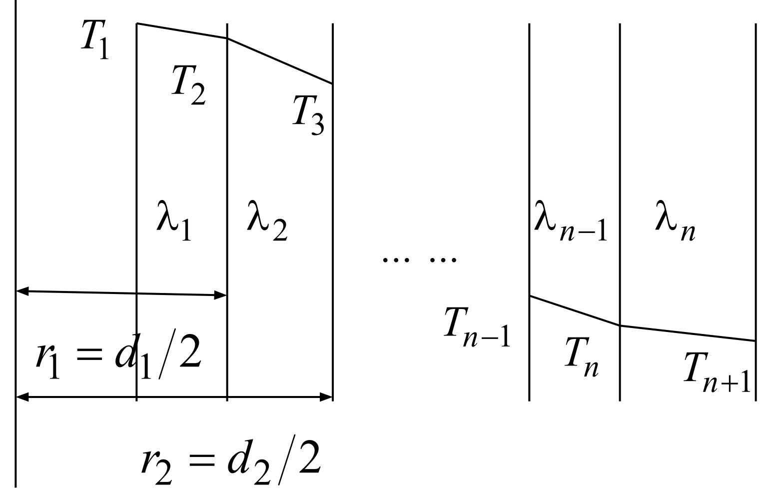
$$q = \frac{T_0 - T_e}{\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_1} + \dfrac{1}{2\pi r_3 \alpha_e} + \dfrac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi\lambda_2}} = \frac{80}{1{,}57\cdot 10^{-4} + 0{,}096 + 0{,}482} = 138 \quad \text{Вт/м.}$$

Многослойная цилиндрическая стенка

$$q_c = \frac{(T_n - T_{1+1})\pi}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}, \quad d_i = 2r_1 \qquad q_c = \frac{2\pi\lambda_{экв}(T_1 - T_{n+1})}{ln(d_{n+1}/d_1)} \qquad (33)$$

Остается справедливым понятие эквивалентного коэффициента теплопроводности

$$\lambda_{экв} = \frac{ln(d_{n+1}/d_1)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} ln\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right)} \qquad (34)$$



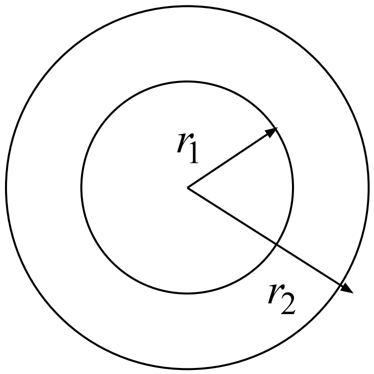
Температура T_{i+1} на границе между *i*-м и *i+1*-слоями

$$T_{i+1} = T_i - \frac{q_c}{2\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1} ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} ln \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_i} ln \frac{d_{i+1}}{d_i}\right) \qquad (35)$$

Коэффициент теплопередачи:

$$K_c = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} ln\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} \qquad (36)$$

Критический диаметр теплоизоляции



Радиальный тепловой поток в трубе обратно пропорционален логарифму наружного радиуса (возрастает сопротивление радиальной проводимости);

Рассеяние тепла от наружной поверхности прямо пропорционально этому радиусу (увеличивается площадь охлаждающей поверхности)

$$q_c = \pi K_c \left(T_{e1} - T_{e2}\right) \qquad K_c = \frac{1}{\dfrac{1}{2\alpha_1 r_1} + \dfrac{1}{2\lambda} ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) + \dfrac{1}{2\alpha_2 r_2}},$$

Следовательно, существует определенный радиус, при котором потери тепла максимальны!

Если при фиксированном (малом) внутреннем радиусе увеличивать толщину стенки трубы (т.е., увеличивать внешний радиус r_2), то действие логарифма в формуле для термического сопротивления окажется более сильным, чем при большем внутреннем радиусе

Критический диаметр теплоизоляции

$$q_c = \pi K_c \left(T_{e1} - T_{e2}\right) \qquad K_c = \frac{1}{\dfrac{1}{2\alpha_1 r_1} + \dfrac{1}{2\lambda} ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) + \dfrac{1}{2\alpha_2 r_2}},$$

Условие экстремума: $\dfrac{dq_c}{dr_2} = 0$

дает $\boxed{(r_2)_* = \dfrac{\lambda_1}{\alpha_2}}$ — **Критический радиус** (37)

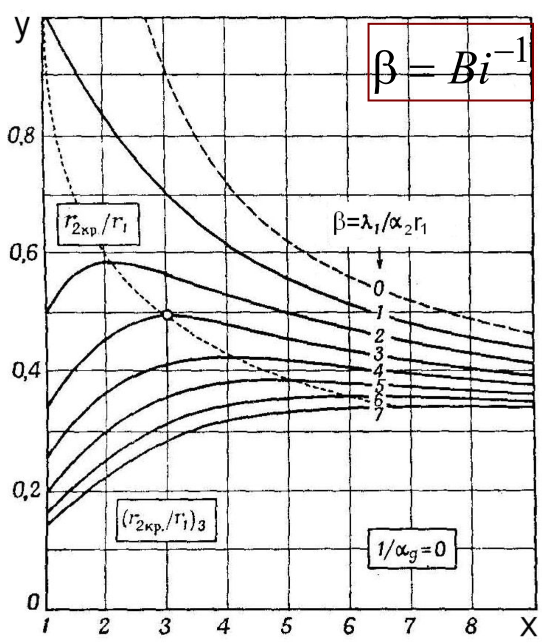
Частный случай нулевого внутреннего сопротивления, $1/\alpha_1 = 0$

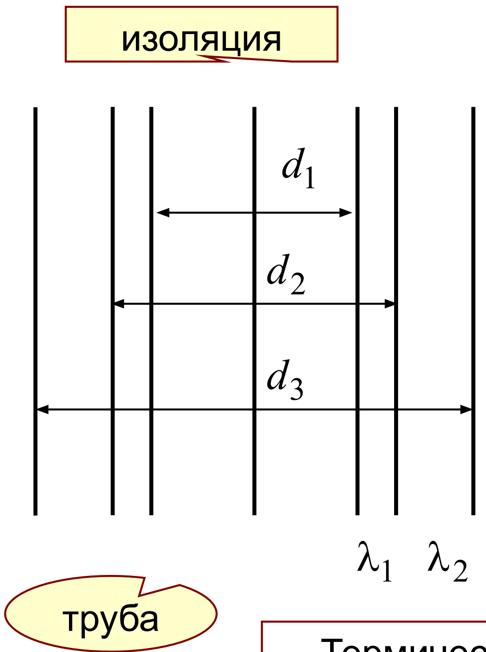
$$y = \frac{q}{2\pi\lambda\left(T_{e1} - T_{e2}\right)} = \frac{1}{\mathbf{ln}\, x + \beta/x}, \quad x = \frac{r_2}{r_1}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\alpha_2 r_1} \qquad (38)$$

$\beta = 0$ Внешнее сопротивление также равно нулю

$r_1 = r_2$ Толщина стенки равна 0 $\qquad \beta = 1:\ \beta/x = \lambda/(\alpha_2 r_2)$

Для заданного внутреннего радиуса величина критического внешнего радиуса увеличивается, если увеличивается теплопроводность трубы или если понижается коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности





Существование критического наружного радиуса приводит к тому, что при
некоторых реальных условиях, вопреки привычным представлениям, потеря тепла изолированной трубой фактически может быть снижена путем уменьшения толщины изоляции

Полное термическое сопротивление **для двухслойной трубы**, сечение которой изображено на рисунке, определяется по формуле

$$R_c = \frac{1}{K_c} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \underbrace{\frac{1}{2\lambda_2} ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_2 d_3}}_{(\mathrm{II})} \qquad (39)$$

$d_3 - d_2$ - толщина изоляции

Термическое сопротивление теплопроводности изоляции (I) растет с увеличением толщины изоляционного покрытия; термическое сопротивление теплоотдачи изоляции (II) – падает (так как увеличивается поверхность теплоотдачи)

Условие экстремума:

$$\frac{dR_c}{dd_3} = \frac{1}{2\lambda_2 d_3} - \frac{1}{\alpha_2 d_3^{\,2}} = 0 \Longrightarrow (d_3)_* = \frac{2\lambda_2}{\alpha_2} \qquad (40)$$

не зависит от d_2

(т.е., не зависит от диаметра самого трубопровода)

$$\left(R_c\right)''\Big|_{(d_3)_*} = \frac{\alpha_2^2}{8\lambda_2^3} > 0 \Longrightarrow$$

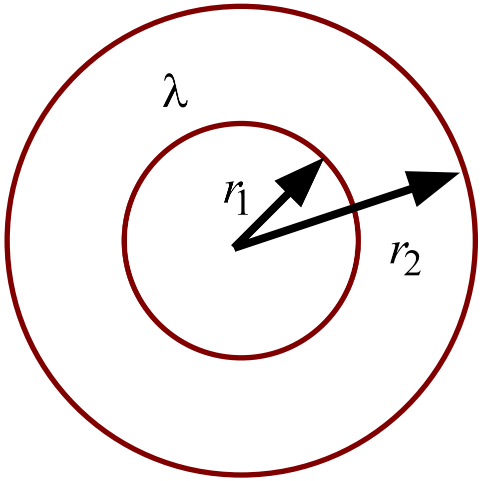
В критической точке полное термическое сопротивление – минимально!

$d_2 > (d_3)_*$ увеличение толщины изоляции уменьшает теплоотдачу

$d_2 < (d_3)_*$ нанесение выбранного покрытия первоначально приведет к возрастанию теплоотдачи, и лишь при достижении критического диаметра тепловой поток будет убывать; затем достигнет той величины, которая была без изоляции и лишь потом приведет к желаемому эффекту

Задача для полого шара (шаровая стенка)

Рассматриваем пространственно одномерную стационарную задачу теплопроводности в шаровой стенке с заданными радиусами внутренней и внешней поверхностей. Одномерность задачи означает, что распределение температуры в стенке зависит только от радиуса



$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}=0 \qquad (41)$$

С помощью замены переменных

$$\frac{dT}{dr}=u \qquad \frac{du}{dr}=-\frac{2u}{r}$$

Общее решение

$$\ln u=-2\ln r+\ln C_1; \quad u=\frac{C_1}{r^2}; \quad T(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2; \quad \frac{dT}{dr}=\frac{C_1}{r^2}$$

Граничные условия первого рода

$$r=r_1: T=T_1 \qquad r=r_2: T=T_2 \qquad (42)$$

$$T_1=-\frac{C_1}{r_1}+C_2 \qquad T_2=-\frac{C_1}{r_2}+C_2 \qquad (43)$$

$$\boxed{T(r)=\frac{T_1(1/r-1/r_2)+T_2(1/r_1-1/r)}{1/r_1-1/r_2}} \qquad (44)$$

<u>Плотность потока тепла</u>

$$q=-\lambda\frac{dT}{dr}=-\frac{\lambda}{r^2}C_1=\frac{\lambda/r^2}{1/r_1-1/r_2}(T_1-T_2) \qquad (45)$$

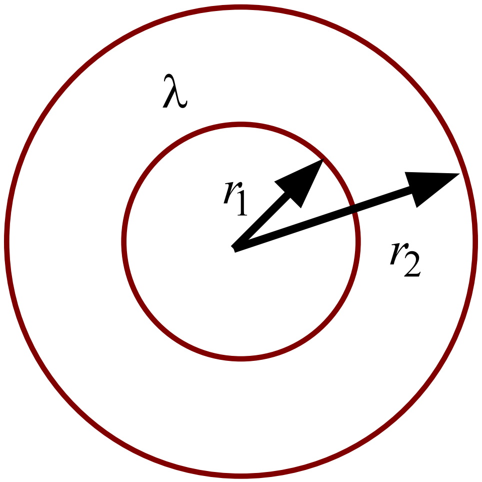
<u>Полный тепловой поток</u>

$$Q=-\lambda\frac{dT}{dr}\cdot 4\pi r^2=-4\pi\lambda C_1=\frac{4\pi\lambda}{1/r_1-1/r_2}(T_1-T_2) \qquad (46)$$

Граничные условия третьего рода

Общее решение не изменяется

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \qquad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$



$$\begin{cases} r = r_1: & -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r} = \alpha_1 (T - T_{e1}) \\ r = r_2: & -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r} = \alpha_2 (T_{e2} - T) \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} (\alpha_1 r_1 - \lambda) C_1 - \alpha_1 r_1^2 C_2 = -\alpha_1 r_1^2 T_{e1} \\ (\alpha_2 r_2 + \lambda) C_1 + \alpha_2 r_2^2 C_2 = \alpha_2 r_2^2 T_{e2} \end{cases} \quad (48)$$

Полный тепловой поток Q не зависит от текущего радиуса

$$C_1 = \frac{\alpha_1 r_1^2 (T_{e2} - T_{e1})}{(\alpha_1 r_1 - \lambda) + \dfrac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2} (\alpha_2 r_2 + \lambda)} \qquad C_2 = \frac{\dfrac{(\alpha_1 r_1 - \lambda)}{(\alpha_2 r_2 + \lambda)} T_{e2} + \dfrac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2} T_{e1}}{\dfrac{(\alpha_1 r_1 - \lambda)}{(\alpha_2 r_2 + \lambda)} + \dfrac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2}} \quad (49)$$

В пределе при идеальном теплообмене сред с заданными температурами и шаровой стенки (т.е., при бесконечных коэффициентах теплоотдачи) решение задачи с граничными условиями третьего рода переходит в решение задачи с граничными условиями первого рода.

$$Q = \frac{4\pi\lambda}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}} (T_1 - T_2)$$ = тепловому потоку, приходящему к внутренней стенке $4\pi r_1^2 \alpha_1 (T_{e1} - T)$ = тепловому потоку, покидающему внешнюю стенку $4\pi r_2^2 \alpha_2 (T - T_{e2})$

Распределение температуры в шаровой стенке для граничных условий третьего рода

Дома:
воспроизвести все решение

$$T(r) = \frac{T_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) + T_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

Температуры стенок:

$$T_1 = \frac{r_1^2\alpha_1 T_{e1} + \Lambda_s\left(T_{e2} + \frac{r_1^2\alpha_1}{r_2^2\alpha_2}T_{e1}\right)}{\Lambda_s\left(1 + \frac{r_1^2\alpha_1}{r_2^2\alpha_2}\right) + r_1^2\alpha_1}$$

$$T_2 = \frac{r_1^2\alpha_1 T_{e2} + \Lambda_s\left(T_{e2} + \frac{r_1^2\alpha_1}{r_2^2\alpha_2}T_{e1}\right)}{\Lambda_s\left(1 + \frac{r_1^2\alpha_1}{r_2^2\alpha_2}\right) + r_1^2\alpha_1}$$

Проводимость шаровой стенки:

$$\Lambda_s = \frac{\lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \equiv \frac{\lambda r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Решения простейших задач в безразмерной форме

Соберем решения стационарных задач для тел канонической формы ***с граничными условиями первого рода*** вместе

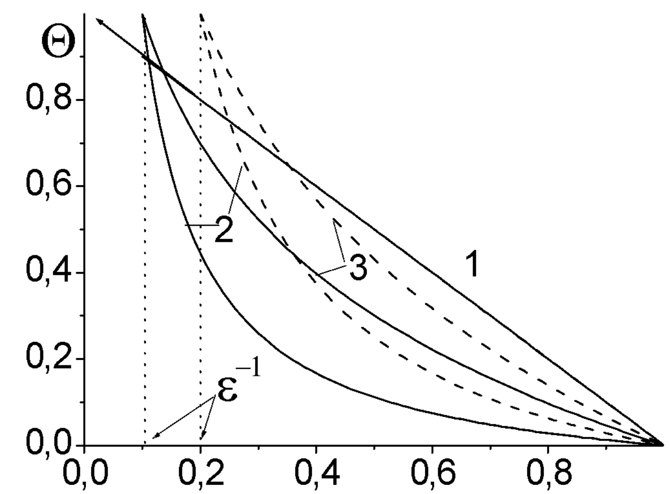
$$T_p = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{r}{r_2} \qquad T_c = \frac{T_1 \ln(r_2/r) + T_2 \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \qquad T_s = \frac{T_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) + T_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

Дома: воспроизвести!

$$\theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \qquad \xi = \frac{r}{r_2}$$

$$\begin{cases} \theta_p = 1 - \xi & 0 \le \xi \le 1 \\ \theta_c = -\dfrac{\ln\xi}{\ln\varepsilon} & \varepsilon^{-1} \le \xi \le 1 \\ \theta_p = \dfrac{(1-\xi)}{\xi(\varepsilon - 1)} & \varepsilon^{-1} \le \xi \le 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{r_2}{r_1} > 1$$



Распределение температуры в плоской (1), цилиндрической (2) и шаровой (3) стенке. Сплошные линии $\varepsilon = 10$ *; пунктирные линии -* . $\varepsilon = 5$

В плоской стенке качественное распределение температуры (линейное) не зависит от ее толщины. А вот в цилиндрической и шаровой – нелинейно меняется с радиусом; характер распределения (кривизна кривой) зависит от соотношения внешнего и внутреннего радиусов.

В случае ***граничных условий третьего рода*** решения простейших задач зависят от параметров, характеризующих теплообмен.

<u>Для одинаковых коэффициентов теплоотдачи.</u> $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$\theta = \frac{T - T_{e2}}{T_{e1} - T_{e2}} \qquad \xi = \frac{r}{r_2}$$

для пластины

$$\theta_p = \theta_1 - (\theta_1 - \theta_2)\xi \qquad \theta_1 = 1 - \frac{1}{2 + Bi} \qquad \theta_2 = \frac{1}{2 + Bi}$$

для цилиндра:

$$\theta_c = \frac{-(\theta_1 - \theta_2)\,ln\,\xi + \theta_2\,ln\,\varepsilon}{ln\,\varepsilon}$$

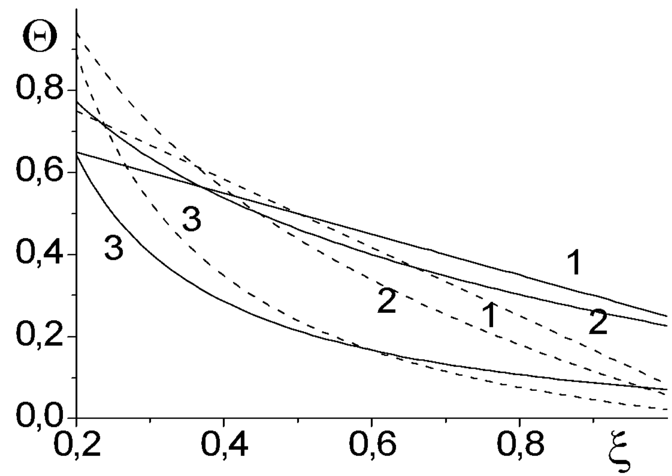
$$\theta_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon + \varepsilon Bi\,ln\,\varepsilon} \qquad \theta_2 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon + \varepsilon Bi\,ln\,\varepsilon}$$

для сферы:

$$\theta_s = \frac{(1-\xi)\theta_1 + (\xi\varepsilon - 1)\theta_2}{\xi(\varepsilon - 1)}$$

$$\theta_1 = \frac{(\varepsilon - 1)Bi + 1}{1 + \varepsilon + (\varepsilon - 1)Bi} \qquad \theta_2 = \frac{1}{1 + \varepsilon + (\varepsilon - 1)Bi}$$

$$Bi = \frac{\alpha r_1}{\lambda}$$



Распределение температуры вдоль координаты в плоской (1), цилиндрической (2) и сферической (3) стенках в условиях конвективного теплообмена. Сплошные линии - $Bi = 2$ *; пунктирные -* $Bi = 10$

Примеры: сосуд Дьюара (Dewar bottle)
Частица металла, покрытая пленкой окисла

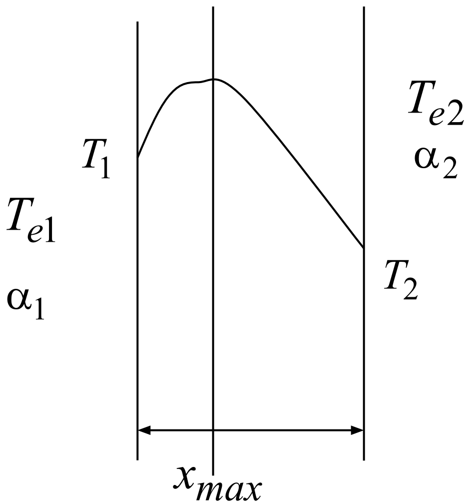
Задание на дом:

1. Сформулировать задачу о распределении температуры в двухслойной шаровой оболочке при ее конвективном охлаждении, пользуясь материалом лекции. Тепловой контакт между слоями считать идеальным. Привести задачу к безразмерной форме. Построить точное аналитическое решение этой задачи.

2.*Рассчитать температуры внутренней и внешней поверхностей шаровой оболочки в задаче 1, а также температуру на контакте; определить полный тепловой поток, уходящий с поверхности шара, принимая, что температуры среды внутри оболочки – 175 С, температура окружающей среды – 25 С; коэффициенты теплоотдачи одинаковы и равны – 28,8 ккал/(м2·час·град); внутренний, и внешний радиусы оболочки – 3 см и 5 см, толщина внутренней оболочки – 25 мм. Внутренняя оболочка изготовлена из материала с теплопроводностью 1,45 ккал/(м час град); внешняя из материала с коэффициентом теплопроводности 0,137 ккал/(м·час·град). Как будет изменяться тепловой поток при изменении толщины внешней оболочки в пределах от 25 мм до 300 мм?

Задачи с внутренними источниками тепла

ТЕПЛОПРОВОДЯЩАЯ ПЛОСКАЯ СТЕНКА С ОБЪЕМНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ



$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0; \qquad q_V = const \qquad (1)$$

<u>Г.у. первого рода:</u> $r = r_1: \quad T = T_1; \quad r = r_2: \quad T = T_2$ (2)

<u>Г.у. третьего рода:</u>

$$r = r_1: \quad -\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_1\left(T - T_{e1}\right); \quad r = r_2: \quad -\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_2\left(T_{e2} - T\right) \qquad (3)$$

<u>Первый «способ» решения:</u>

Решается задача элементарным интегрированием: $\frac{dT}{dx} = -\frac{q_V}{\lambda}x + C_1;$

$$T(x) = -\frac{q_V}{\lambda}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \qquad (4)$$

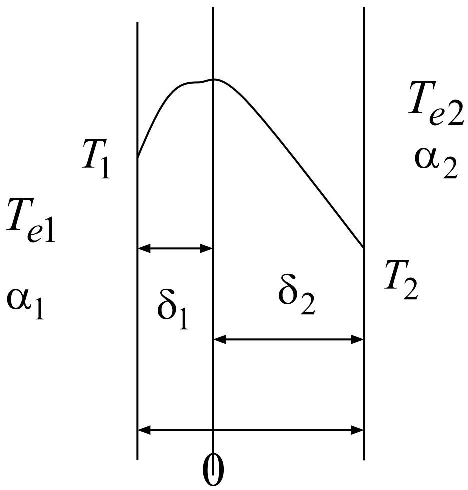
Подставляя общее решение в г.у., найдем постоянные интегрирования.

Максимум находится на некотором расстоянии от поверхностей.
Положение максимума можно найти из условия (условие экстремума) $\frac{dT}{dx} = 0$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_V x}{\lambda} + C_1 = 0 \qquad (5)$$

Задачи с внутренними источниками тепла

ТЕПЛОПРОВОДЯЩАЯ ПЛОСКАЯ СТЕНКА С ОБЪЕМНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ



Поступим немного иначе. (Второй «способ» решения)

общее решение

$$T(x) = -\frac{q_V}{\lambda}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \qquad (4)$$

Поместим начало координат в точку, где температура максимальна

$\delta_1; \delta_2$ - расстояния от максимума до краев пластины

$\Longrightarrow \quad C_1 = 0$

Граничное условие справа перепишем следующим образом:

$$x = \delta_2 : -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{\delta_2} = \alpha_2\left(T|_{\delta_2} - T_{e2}\right) \Longrightarrow \alpha_2\left(C_2 - \frac{q_V \delta_2^2}{2\lambda} - T_{e2}\right) = q_V \delta_2 \qquad (6)$$

Так как плоскость x=0 можно считать теплоизолированной, все тепло, выделившееся в пластине справа в единицу времени, должно быть отведено в окружающую среду посредством теплоотдачи с правой стенки. В противном случае будет нарушено условие стационарности

$q_V \delta_2$ - количество тепла, выделяющееся в объеме пластины толщиной =1 в единицу времени

Слева – выражение для потока теплоотдачи с единицы площади поверхности пластины

Аналогичные рассуждения для левого слоя пластины толщиной $\delta_1 = \delta - \delta_2$ приводят к выражению

$$\alpha_1 \left(C_2 - \frac{q_V (\delta - \delta_2)^2}{2\lambda} - T_{e1} \right) = q_V (\delta - \delta_2) \qquad (7)$$

С помощью равенств (6), (7) находим положение максимума

$$\delta_2 = \frac{2\lambda\alpha_1\alpha_2 (T_{e1} - T_{e2}) + q_V \delta\alpha_2 (\delta\alpha_1 + 2\lambda)}{2q_V [\delta\alpha_1\alpha_2 + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)]} \qquad (8)$$

Определяя постоянную $C_{2,}$ (подходит любое из равенств) , находим общее решение. Наиболее простой вид оно принимает, если

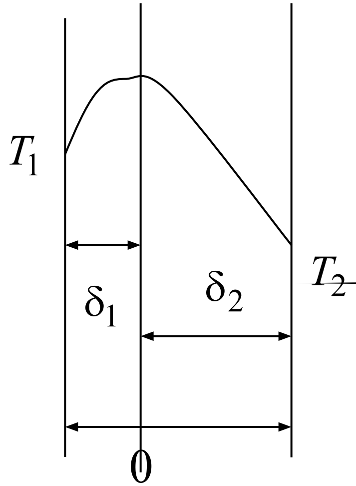
$$\begin{gathered} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha; T_{e1} = T_{e2} = T_e \\ \delta_1 = \delta_2 = \delta/2 \end{gathered} \qquad (9)$$

тогда

$$C_2 = \frac{q_V \delta}{2\alpha} + \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + T_e \quad \text{и} \quad T(x) = \frac{q_V}{2\lambda} \left[\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right] + \frac{q_V \delta}{2\alpha} + T_e \qquad (10)$$

$$\boxed{T_{max} = T\big|_{x=0} = \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + \frac{q_V \delta}{2\alpha} + T_e}$$ — Тем ниже, чем выше теплопроводность пластины

Температура стенки $T_s = T_1 = T_2 = \dfrac{q_V \delta}{2\alpha} + T_e$ растет с ухудшением теплоотдачи



Граничные условия первого рода

$$T(x) = -\frac{q_V}{\lambda}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C, \quad C_1 = 0 \qquad (4)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{q_V}{\lambda}\dfrac{\delta_2^2}{2} + C_2 = T_2 \\ -\dfrac{q_V}{\lambda}\dfrac{(\delta - \delta_2)^2}{2} + C_2 = T_1 \end{cases} \qquad (11) \quad \Longrightarrow \quad \delta_2 = \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{2\lambda(T_1 - T_2)}{q_V \delta^2}\right)$$

$$T(x) = T_2 + \frac{q_V}{2\lambda}\left\{\left[\frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{2\lambda(T_1 - T_2)}{q_V \delta^2}\right)\right]^2 - x^2\right\} \qquad (12)$$

При очень больших значениях α Граничные условия третьего рода переходят в граничные условия первого рода. Поэтому такое же решение мы получим, используя предыдущее решение

$$x = \delta_2 : -\lambda \frac{dT}{dx}\bigg|_{\delta_2} = \alpha_2\left(T|_{\delta_2} - T_{e2}\right) \quad \Longrightarrow \quad T|_{x=\delta_2} = T_2 = T_{2e} \qquad (13)$$

Следовательно, из симметричной задачи с граничными условиями третьего рода (10) находим

$$T(x) = \frac{q_V}{2\lambda}\left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right] + T_s$$

$$\boxed{T_{max} = T|_{x=0} = \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + T_s}$$

Температура стенок (14)

Это же равенство следует из предыдущего решения при условии равенства температур стенок

Цилиндр с объемным тепловыделением

Рассмотрим бесконечный сплошной цилиндр, равномерно нагреваемый (или охлаждаемый) с боковой поверхности. В объеме цилиндра находится источник тепла постоянной интенсивности . Требуется найти распределение температуры для установившегося режима.

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{q_V}{\lambda} = 0 \qquad (1)$$

$$u = dT/dr \qquad r\frac{du}{dr} + u + \frac{q_V r}{\lambda} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d(ru)}{dr} + \frac{q_V r}{\lambda} = 0 \qquad (2)$$

$$ru = -\frac{q_V r^2}{2\lambda} + C_1 \qquad (3)$$

Первый интеграл

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q_V r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r}$$

Общее решение

$$T = -\frac{q_V r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2 \qquad (4)$$

Условие в центре для сплошного цилиндра

$$dT/dr = 0; \quad r = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0$$

Цилиндр с объемным тепловыделением

Внешнее условие: $r = R$ $\qquad -\lambda \frac{dT}{dr} = \alpha(T - T_e)$ (5)

$$C_2 = \frac{q_V R}{2\alpha} + \frac{q_V R^2}{4\lambda} + T_e \qquad T = \frac{q_V}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e \quad (6)$$

$$\boxed{T_{max} = \frac{q_V}{4\lambda} R^2 + \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e} \qquad T_s = \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e \quad (7)$$

<u>плотность теплового потока на поверхности цилиндра:</u> $q = \alpha(T_s - T_e) = \frac{q_V R}{2}$

<u>полный тепловой поток с поверхности цилиндра:</u> $Q = qF = \frac{q_V R}{2} 2\pi R l = q_V \pi R^2 l$

Задача об охлаждении цилиндра с объемным тепловыделением представляет, в частности, интерес для нахождения распределения температуры в катодах, используемых в плазмотронах для генерации потоков ионов. ***В практическом приложении*** эта задача может быть переформулирована так: найти мощность источника, достаточную для распыления катода при условии, что для этого нужно достичь температуру плавления материала катода.

Используя общее решение (4), можно найти распределение температуры по толщине стенки полого цилиндра или по толщине цилиндра, покрытого защитным слоем (рассмотрим далее). *<u>В первом случае</u>* нужно задать условия на внутренней поверхности цилиндра. *<u>Во втором случае</u>* потребуется дополнительное условие на границе раздела двух материалов с разными свойствами, т.е. граничное условие четвертого рода.

Шар с объемным тепловыделением

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{q_V}{\lambda}=0 \qquad (1) \qquad T=-\frac{q_V r^2}{6\lambda}+\frac{C_1}{r_1}+C_2 \qquad (2)$$

Дома: покажите, что общее решение (1) имеет вид (2)

Условия: $dT/dr=0;\ r=0$ и $-\lambda\frac{dT}{dr}=\alpha(T-T_e);\ r=R$

дают $C_1=0$ и $C_2=T_e+\frac{q_V}{3\alpha}R+\frac{q_V}{6\lambda}R^2$

$$T=T_e+\frac{q_V}{3\alpha}R+\frac{q_V}{6\lambda}R^2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (3)$$

максимальная температура

$$\boxed{T_{max}=T_e+\frac{q_V}{3\alpha}R+\frac{q_V}{6\lambda}R^2} \qquad (4)$$

Температура поверхности

$$T_s=T_e+\frac{q_V}{3\alpha}R+\frac{q_V}{6\lambda}R^2 \qquad (5)$$

Полный поток тепла через поверхность шара

$$Q=-\pi\frac{R^2}{4}\lambda\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=R}=\frac{1}{3}\pi R^3 q_V$$

<u>цилиндр</u> $T_{max}=\frac{q_V}{4\lambda}R^2+\frac{q_V R}{2\alpha}+T_e \qquad T_s=\frac{q_V R}{2\alpha}+T_e$

<u>Плоский слой</u> $T_{max}=\frac{q_V\delta}{2\alpha}+\frac{q_V\delta^2}{8\lambda}+T_e \qquad T_s=\frac{q_V\delta}{2\alpha}+T_e$

Сравните с (4), (5)

Пример 1. Найти максимальную силу тока, который можно пропускать по алюминиевой проволоке (λ=204 Вт/(м·К)) диаметром 1 мм, чтобы ее температура не превышала 200 С. Проволока подвешена в воздухе с температурой 25 С. Коэффициент конвективной теплоотдачи от проволоки к воздуху равен 10 Вт/(м^2·К). Электрическое сопротивление R_e/l на единицу длины проволоки есть 0,037 Ом/м.

Решение. Воспользуемся формулой (66), из которой следует

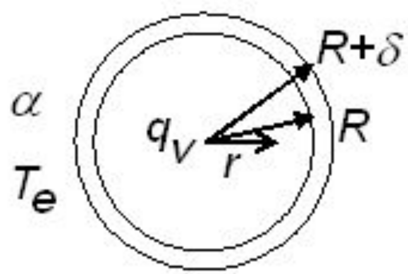
$$q_V = \frac{R_e I^2}{\pi R^2 l} \qquad T_{\max} = T_e + \frac{q_V}{2}\frac{R}{\alpha}\left[1 + \frac{R\alpha}{2\lambda}\right] = T_e + \frac{I^2}{2\pi R\alpha}\frac{R_e}{l}\left[1 + \frac{R\alpha}{2\lambda}\right]$$

Подставляем заданные значения физических величин:

$$200 = 25 + \frac{I^2}{2\cdot\pi\cdot\left(10^{-3}/2\right)\cdot 10}\cdot 0{,}037\left[1 + \frac{\left(10^{-3}/2\right)\cdot 10}{2\cdot 204}\right]$$

Отсюда находим силу тока: $I = 12{,}2 \text{ А}$

Провод с изоляцией



Строгая математическая постановка задачи:

$$\frac{d^2T_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT_1}{dr}+\frac{q_V}{\lambda_1}=0 \qquad r<R \qquad (1)$$

$$\frac{d^2T_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT_2}{dr}=0 \qquad R<r<R+\delta \qquad (2)$$

$$r=0: \; dT/dr=0 \qquad (3)$$

Первое условие есть условие симметрии; второе говорит о том, что тепловой контакт между проводом и изоляцией – идеальный, а третье соответствует конвективному теплообмену провода с изоляцией с окружающей средой.

$$r=R: \quad \lambda_1\frac{dT_1}{dr}=\lambda_2\frac{dT_2}{dr}; \quad T_1=T_2 \qquad (4)$$

$$r=R+\delta: \quad \lambda_2\frac{dT_2}{dr}=\alpha(T_2-T_e) \qquad (5)$$

Общее решение задачи:

$$T_1=-\frac{q_V r^2}{4\lambda_1}+C_1\,\boldsymbol{ln}\,r+C_2$$

$$T_2=C_3\,\boldsymbol{ln}\,r+C_4$$

Дома: покажите справедливость

Провод с изоляцией

Общее решение задачи:

$$T_1 = -\frac{q_V r^2}{4\lambda_1} + C_1 \ln r + C_2$$

$$T_2 = C_3 \ln r + C_4$$

Из условия (3) имеем: $C_1 = 0$

Условия (4) дают:

$$\lambda_1\left(-\frac{q_V R}{2\lambda_1}\right) = \lambda_2 \frac{C_3}{R} \Longrightarrow C_3 = -\frac{q_V R^2}{2\lambda_2}$$

$$-\frac{q_V R^2}{4\lambda_1} + C_2 = -\frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln R + C_4$$

Из условия (5) следует:

$$-\lambda_2 \frac{C_3}{R} \equiv \frac{\lambda_2}{R} \cdot \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} = \alpha\left[-\frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln(R+\delta) + C_4 - T_e\right] \Longrightarrow$$

Находим:

$$C_4 = T_e + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln(R+\delta) + \frac{q_V R}{2\alpha}$$

$$C_2 = T_e + \frac{q_V R^2}{4\lambda_1}\left(1 + \frac{2\lambda_1}{\alpha R}\right) + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)$$

Следовательно, распределение температуры в проводе с изоляцией описывается формулами

$$T_1 = T_e + \frac{q_V R^2}{4\lambda_1}\left(1 + \frac{2\lambda_1}{\alpha R}\right) + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) - \frac{q_V r^2}{4\lambda_1}$$

и

$$T_2 = T_e + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2}\frac{\lambda_2}{\alpha R} + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{r}\right)$$

Окончательное решение представим в виде:

Перейдите дома к безразмерным переменным

$$\theta_i = \frac{T_i - T_e}{T_* - T_e} \qquad \xi = \frac{r}{R}$$

$$T_* = T_e + \frac{q_V R^2}{\lambda_1}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\frac{Bi}{K_\lambda}\right) + \frac{K_\lambda}{2}\ln(1+\varepsilon) - \frac{\xi^2}{4} \qquad 0 \le \xi \le 1$$

$$\theta_2 = \frac{K_\lambda}{2Bi} + \frac{K_\lambda}{2}\ln\left(\frac{1+\varepsilon}{\xi}\right) \qquad 1 \le \xi \le 1+\varepsilon$$

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_2}$$

$$K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{R}$$

Определим поток тепла с поверхности проводника

$$q = \alpha\left(T_2(R+\delta) - T_e\right)$$

$$Q = \pi R^2 l\alpha\left(T_2(R_2) - T_e\right)$$

$$\boxed{\frac{Q}{\left(\pi R^2/2\right) l\alpha\left(T_* - T_e\right)} = \frac{K_\lambda}{Bi}}$$

$K_\lambda/Bi < 1$ - изоляция не отводит тепло от проводника с током

$K_\lambda/Bi > 1$ - возможно остывание проводника за счет потерь тепла в окружающую среду

Пример 2. Пусть по длинной алюминиевой проволоке диаметром 1 см течет электрический ток силой тока 1000 А. Проволока покрыта слоем резиновой изоляции толщиной 3 мм (λ_2=0,15 Вт/(м·К)). Температура наружной поверхности изоляции 30 С. Найти температуру внутренней поверхности изоляции. Омическое сопротивление проволоки на единицу длины 3,7·10^{-4} Ом/м.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся второй формулой для T_2 рассмотренной сопряженной задачи. С учетом того, что задана температура внешней поверхности изоляции, т.е. $\alpha_2 \to \infty$

$$q_V = \frac{R_e I^2}{\pi R^2 l} \quad \Longrightarrow \quad T_2(r=R) = T_e + \frac{R_e}{l} \cdot \frac{I^2}{2\pi\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) =$$

$$= (273+30) + 3.7 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{(1000)^2}{2 \cdot 3.14 \cdot 0.15} \boldsymbol{ln}\left[\frac{0.005+0.003}{0.005}\right] \approx 477.6$$

Используя значение коэффициента теплопроводности алюминиевой проволоки $\lambda_1 \approx 232$ Вт/(м·К) и формулу для T_1, можем рассчитать температуру в центре провода. В рассматриваемых условиях имеем

$$T_1(r=R) = T_e + \frac{R_e}{l} \frac{I^2}{2\pi\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) + \frac{R_e}{l} \frac{I^2}{4\pi\lambda_1} = T_2(r=R) + \frac{R_e}{l} \frac{I^2}{4\pi\lambda_1} =$$

$$= 477.6 + \frac{3.7 \cdot 10^{-4} (1000)^2}{4 \cdot 3.14 \cdot 232} \approx 477.7$$

Задание на дом.

1.Ток силой ***I***=200А пропускается через проволоку из нержавеющей стали диаметром 2 мм и длиной 1 м. Электрическое сопротивление проволоки – 0.125 Ом, коэффициент теплопроводности 17Вт/(м·К). Температура поверхности проволоки 150 С. Требуется рассчитать температуру на оси проволоки.

2.Предположить в этой же задаче, что проволока покрыта слоем изоляции (коэффициент теплопроводности изоляции 0,15 Вт/(м·К)), а коэффициент теплоотдачи на поверхности изоляции равен 60 Вт/($м^2$К). Как нужно изменить силу тока (увеличить или уменьшить), чтобы температура поверхности проволоки осталась равной 150 С.

Эффективные (эквивалентные) теплофизические свойства

Реально используемые в машиностроении и окружающие нас материалы являются многокомпонентными и многофазными. Это относится к сталям, сплавам, интерметаллидным композитам, спеченным материалам, волокнистым композитам, композитам на полимерной основе, смесям, растворам и т.д.

Если для исходных компонентов (из которых композиты синтезируют в разных технологиях) или дано используемых материалов со свойствам все более или менее ясно, то для вновь разрабатываемых материалов определение свойств представляет собой серьезную проблему.

Стандартные экспериментальные методы могут не работать или становятся дорогими или трудоемкими
Для расчета необходимо знать свойства составляющих, структуру и взаимное влияние физических явлений друг на друга.

Без данных о физических свойствах невозможен ни один научный или инженерный расчет

Дульнев Г.Н., Заринчак Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов

Модели для расчета свойств:
корпускулярные (молекулярные), континуальные и комбинированные

В корпускулярных моделях изучают свойства на основе знаний о природе, строении и характере взаимодействия частиц. Расчет физических свойств в этом случае возможен лишь с использованием данных о других свойствах.

Классификация гетерогенных структур:
Дульнев, стр.10-52 (открыть)
Композиты: стр.106-130

Известны многочисленные способы расчета эффективных коэффициентов теплопроводности гетерогенных и пористых материалов

В простейшем приближении для процесса теплопроводности в отдельной микрообласти (которую рассматривают как представительный объем) справедливы физические уравнения

$$\mathbf{J}_{T,k} = -\lambda_k grad\left(T_k\right), \quad div\left(\mathbf{J}_{T,k}\right) = 0$$

Граничные условия на поверхностях раздела областей с идеальным тепловым контактом имеют вид:

$$\lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial n} = \lambda_{k-1} \frac{\partial T_{k-1}}{\partial n}; \qquad T_k = T_{k-1}$$

Для определения эффективной теплопроводности материала (состоящего из различных фаз) необходимо определить распределения физических полей во всех микрообластях, а потом уже перейти к квазигомогенной среде, для которой справедливы соотношения

$$\left\langle \mathbf{J}_T \right\rangle = -\lambda^* \left\langle \nabla T \right\rangle$$

$$\left\langle \mathbf{J}_T \right\rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{J}_k dV; \qquad \left\langle \nabla T \right\rangle = \frac{1}{T} \int_V \nabla T_k d\varphi$$

Эффективный коэффициент: $\lambda = f\left(\lambda_k, \xi_k\right);$

Установление вида этой зависимости и является основной задачей различных теории.

ξ - доли фаз

Двухфазная система

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \frac{1}{V}\left[\int\limits_{(V_1)} \mathbf{J}_1 dV_1 + \int\limits_{(V_2)} \mathbf{J}_2 dV_2\right] = -\left(\lambda_1 \xi_1 \langle \nabla T_1 \rangle + \lambda_2 \xi_2 \langle \nabla T_2 \rangle\right)$$

$$\xi_1 = V_1 / V, \ \xi_2 = V_2 / V$$

Следует из предыдущего

(1) $$\lambda = \lambda_1 \xi_1 \bar{\varphi}_1 + \lambda_2 \xi_2 \bar{\varphi}_2; \quad \xi_1 \bar{\varphi}_1 + \xi_2 \bar{\varphi}_2 = 1$$

$$\bar{\varphi}_k = \frac{\langle \nabla T_k \rangle \langle \nabla T \rangle}{\langle \nabla T \rangle^2}, \ k = 1{,}2$$

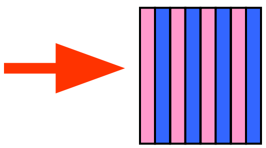
$(\nabla T) = \xi_1 \langle \nabla T_1 \rangle + \xi_2 \langle \nabla T_2 \rangle$ - средний по объему градиент

Система двух уравнений (1) содержит три неизвестных. Для е замыкания требуется дополнительная информация, например, сведения о структуре гетерогенной системы, данные специально поставленного эксперимента. Решение проблемы замыкания таких систем и привело к появлению всего разнообразия методов определения коэффициентов переноса (не только коэффициента теплопроводности), которое известно в литературе

1. В случае простейшей структуры, представляющей собой систему неограниченных пластин, параллельных потоку $\langle \mathbf{J} \rangle$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1 \quad \text{и} \quad \boxed{\lambda = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2}$$

2. Если слои - перпендикулярны потоку



$$\xi_1 \langle \nabla T_1 \rangle = \xi_2 \langle \nabla T_2 \rangle;$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \lambda_2 / \lambda_1$$

$$\boxed{\lambda = \left(\frac{\xi_1}{\lambda_1} + \frac{\xi_2}{\lambda_2} \right)^{-1}}$$

Типы структур неоднородных сред весьма разнообразны. Так, в случае двухфазных сред, к которых фазы (микрообласти, содержащие разные фазы) могут быть распределены в пространстве как хаотически, так и упорядоченно, можно выделить структуры, содержащие одну из фаз в виде изолированных изомерных (1) или анизотропно ориентированных (2) включений в непрерывной другой фазе, зернистые системы с непрерывным каркасом (3) и порами (4), волокнистые системы из волокон (5) и пор (6), статистически неоднородные (микронеоднородные) системы из близких по размерам компонентов (7), слоистые системы из параллельных (8) и перпендикулярных (9) потоку слоев. Можно представит себе системы, состоящие из отдельных подсистем с различными структурами описанного типа. Дополнительно каждая из фаз, входящих в структуры может быть как многокомпонентной, так и однокомпонентной. В любом случае требуется расчет свойств каждой из фаз или их экспериментальное определение.

Уравнение Кондорского-Оделевского (метод эффективной среды)

$$\lambda = \lambda_1 \left\{ \frac{(3\xi_1 - 1) + (3\xi_2 - 1)\nu}{4} + \sqrt{\frac{[(3\xi_1 - 1) + (3\xi_2 - 1)\nu]^2}{16} + \frac{\nu}{2}} \right\}$$

$$\nu = \xi_2 / \xi_1 \qquad \xi_1 = V_1 / V, \; \xi_2 = V_2 / V$$

Интегральный метод

$$\frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{1/3} = 1 - \xi_2$$

Двусторонние оценки (оценки Хашина-Штрихмана)

$$\nu \left[1 + \frac{\xi_1}{\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{\xi_2}{3}} \right] \le \frac{\lambda}{\lambda_1} \le 1 + \frac{\xi_2}{\frac{1}{\nu - 1} + \frac{\xi_1}{3}}$$

Шермергор:

$$\xi_1 + \nu\xi_2 - \frac{\xi_1\xi_2(1-\nu)^2}{\nu + \nu\xi_1 + \xi_2} \le \frac{\lambda}{\lambda_1} \le \xi_1 + \nu\xi_2 - \frac{\xi_1\xi_2(1-\nu)^2}{1 + \nu\xi_1 + \xi_2}$$

Индекс 1 относится к матрице, а «2» - к включениям

Несмотря на упрощенные модели сред, некоторые из известных формул позволяют проводить вполне достоверные оценки, хотя число формул для различных частных случаев сред быстро возрастает с увеличением числа фаз.

Дома:

Имеется композит. Матрица - сплав на основе фольфрама (считаем его коэффициент теплопроводности равным теплопроводности вольфрама). Частицы (включения) карбид титана.
Используя выписанные выше формулы рассчитать зависимости эффективных коэффициентов теплопроводности композита от доли включений (ξ= от 0 до 0,75). Построить на одном графике.
Какой вывод можно сделать?

Свойства зернистых и пористых материалов

На эффективную теплопроводность пористых материалов при прочих равных условиях оказывает влияние теплопроводность твердой фазы . При этом для одних пористых материалов (на основе $A1_2O_3$, BeO, MgO и др.) коэффициент теплопроводности с ростом температуры уменьшается, в то время, как для других, изготовленных на основе SiO_2, ZrO_2, — увеличивается. Решающее влияние на эффективную теплопроводность оказывает пористость, поскольку сами поры вследствие низкой проводимости газа являются эффективным барьером на пути распространения тепла. Однако здесь имеются иные механизмы теплопереноса (конвекция, излучение).

Самые простые модели основаны на представлении пористого или дисперсного материала в виде плоских чередующихся слоев, составленных и твердого каркаса (остова) и воздуха.

$$\lambda = \left(\frac{\eta}{\lambda_2} + \frac{(1-\eta)}{\lambda_1} \right)^{-1} \qquad \lambda = \lambda_1 (1-\eta) + \lambda_2 \eta$$

η - доля пор; пористость

λ_2 - теплопроводность воздуха или другого вещества, заполняющего пористое пространство

Модели, представленные на рис в центре связывают с именами Maxwell–Eucken (Максвелла-Эйкена). Результат имеет вид

$$\lambda = \lambda_1 \frac{2\lambda_1 + \lambda_2 - 2(\lambda_1 - \lambda_2)\eta}{2\lambda_1 + \lambda_2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\eta}$$

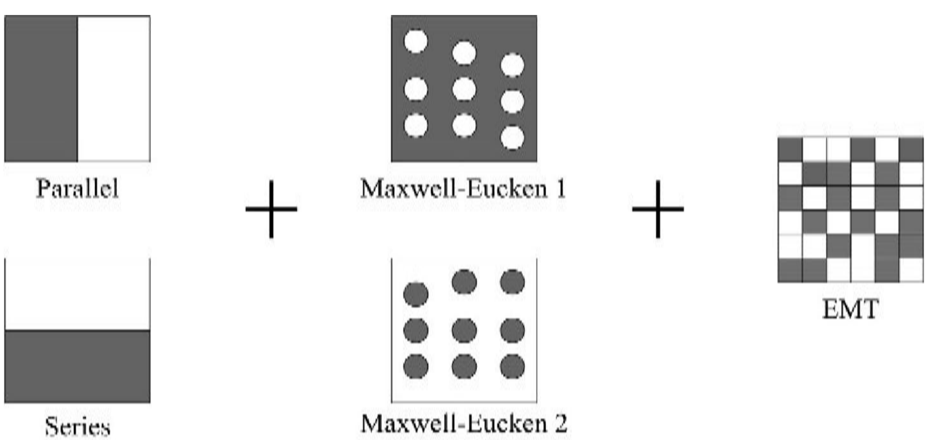
непрерывным является твердый каркас

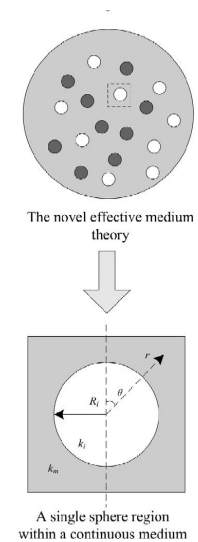
$$\lambda = \lambda_2 \frac{2\lambda_2 + \lambda_1 - 2(\lambda_2 - \lambda_1)(1-\eta)}{2\lambda_2 + \lambda_1 + 2(\lambda_2 - \lambda_1)(1-\eta)}$$

непрерывным является пористое пространство

$$(1-\eta)\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + 2\lambda} + \eta\frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 + 2\lambda} = 0$$

модель теории эффективной среды





Свойства многокомпонентных материалов