Занятие 2

- ***Связь поляризованности диэлектрика в электростатическом поле с плотностью связанных зарядов***
- ***Теорема Гаусса для поля D вектора***
- ***Тангенциальные составляющие вектора электрического смещения и напряжённости электрического поля на границе раздела диэлектриков***
- ***Нормальные составляющие вектора электрического смещения, напряжённости и поляризованности на границе раздела диэлектриков***
- ***Ауд.: Иродов И.Е. Задачи по общей физике.***

- М.: Бином, 1998÷2010. №№ 2.32, 2.33, 2.93, 2.96

Связь поляризованности диэлектрика в электростатическом поле с плотностью связанных зарядов

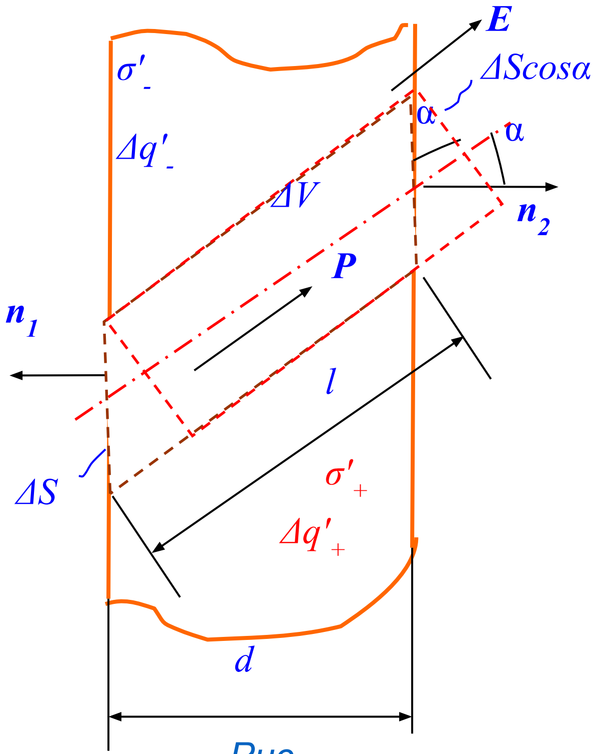


Рис. 1

В диэлектрике *d* толщиной, находящегося в вакууме, выделен воображаемый косой цилиндр, ось которого совпадает с направлением ***E*** вектора напряжённости внешнего электрического поля, с *l* длиной боковой поверхности, ΔS площадью основания, в котором вектор ***P*** поляризованности этого диэлектрика: $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$, где χ - диэлектрическая восприимчивость вещества. Поверхностная плотность связанных зарядов на σ'_+ правой и σ'_- левой поверхностях диэлектрика: $\sigma' = P_n$, где P_n - проекция на внешнюю $\boldsymbol{n}$ нормаль к поверхности диэлектрика $\boldsymbol{P}$ вектора поляризованности. Для правой поверхности диэлектрика проекция P_n на внешнюю $\boldsymbol{n}_2$ нормаль к поверхности диэлектрика вектора $\boldsymbol{P}$ поляризованности положительна, вследствие этого $\sigma'_+ > 0$. Для левой поверхности диэлектрика проекция P_n на внешнюю $\boldsymbol{n}_1$ нормаль к поверхности диэлектрика вектора $\boldsymbol{P}$ поляризованности отрицательна, вследствие этого $\sigma'_- < 0$. Связанный заряд на поверхности ΔS площадью диэлектрика при условии его нахождения во внешнем электрическом поле с $\boldsymbol{E}$ вектором напряжённости:

$$\Delta q' = P\Delta S\cos\alpha = \boldsymbol{Pn}\Delta S, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{n}$ - нормаль к поверхности диэлектрика; $\boldsymbol{P}$ - вектор поляризованности диэлектрика и α - угол между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{P}$.

Теорема Гаусса для вектора поляризованности диэлектрика

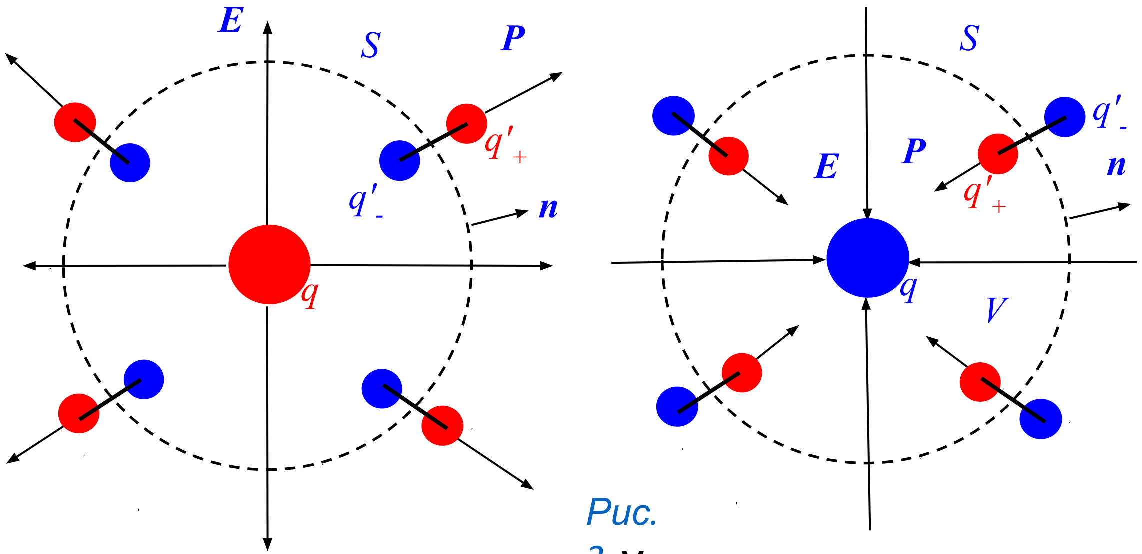


Рис. 2

Свободный q заряд создаёт в диэлектрике сферическое векторное электростатическое поле с $\mathbf{E}$ вектором напряжённости. Через всю воображаемую сферу S площадью при поляризации диэлектрика пройдет связанный q' заряд:

$$q' = -\iint_{(S)} dq' = -\iint_{(S)} \mathbf{P}\mathbf{n}\, dS = -\Phi'; \qquad (2)$$

где знак связанного q' заряда (q'_+ или q'_-) определяется знаком $\mathbf{Pn}$ скалярного произведения вектора $\mathbf{P}$ поляризованности и внешней $\mathbf{n}$ нормали к поверхности диэлектрика.

Дивергенция *(div)* от $\mathbf{P}$ вектора поляризованности диэлектрика в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\rho' = -\Delta\mathbf{P} = -\,div\mathbf{P} = -\,[(\partial P_X/\partial x) + (\partial P_Y/\partial y) + (\partial P_Z/\partial z)], \qquad (3)$$

где сумма приращений проекций P_X; P_Y и P_Z на оси *OX*, *OY* и *OZ* координат вектора $\mathbf{P}$ поляризованности диэлектрика на единице длины каждой из координат пропорциональна ρ' объёмной плотности связанного заряда, находящегося в рассматриваемой точке объёма диэлектрика. Знак ρ' объёмной плотности связанного ρ' заряда (ρ'_+ или ρ'_-) определяется знаком $[(\partial P_X/\partial x) + (\partial P_Y/\partial y) + (\partial P_Z/\partial z)]$.

Теорема *Гаусса* для поля **D** вектора

Вектор ***D*** электрического смещения или электрической индукции:

$$\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} \leftrightarrow \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} \leftrightarrow \boldsymbol{D} = \varepsilon_0(\varepsilon + 1)\boldsymbol{E}, \qquad (4)$$

где ***E***, ***P*** векторы соответственно напряжённости электрического поля и поляризованности диэлектрика.Теорема *Гаусса* для электростатического поля в дифференциальной форме в диэлектрике: $\Delta \boldsymbol{D} = \rho$, (5) согласно которой ρ объёмная плотность свободных зарядов равна дивергенции *(div)* вектора ***D*** электрического смещения в рассматриваемой точке объёма диэлектрика. Теорема *Гаусса* в интегральной форме в диэлектрике:

$$\oiint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \leftrightarrow \phi_{\vec{D}} = \rho dV \iiint_V \rho dV = \sum_{i=1}^{n} q_i . \qquad (6)$$

Поток Φ_D вектора $\mathbf{D}$ электрического смещения через замкнутую поверхность S площадью равен всему q свободному заряду, распределённому с ρ объёмной плотностью в V объёме при непрерывном распределении заряда или алгебраической сумме заключённых внутри V объёма и ограниченных замкнутой воображаемой поверхностью S площадью свободных q_i дискретных зарядов. Заряд в *1 Кл* создаёт через замкнутую воображаемую поверхность S площадью N_D поток вектора $\mathbf{D}$ электрического смещения, равного *1 Кл*. Силовые линии вектора $\mathbf{D}$ электрического смещения начинаются и заканчиваются только на q свободных зарядах.

Тангенциальные составляющие вектора электрического смещения и напряжённости электрического поля на границе раздела диэлектриков

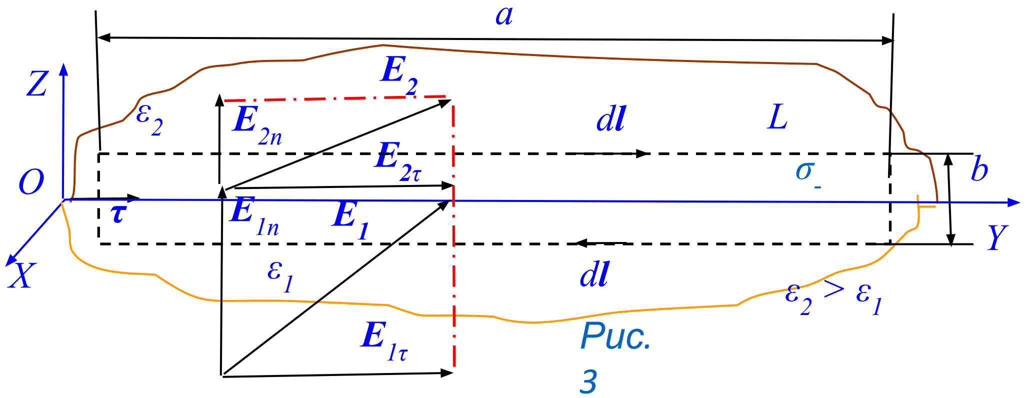


Рис. 3

Силовые линии вектора $\boldsymbol{E}$ напряжённости электрического поля находятся в OYZ плоскости. Тангенциальная $\boldsymbol{E}_\tau$ составляющая не меняется на границе между диэлектриками с ε_1 и ε_2 диэлектрическими проницаемостями при отсутствии или наличии на границе между этими диэлектриками свободного q заряда с поверхностной σ плотностью:

$E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Тангенциальная $\boldsymbol{D}_\tau$ составляющая вектора $\boldsymbol{D}$ электрического смещения: $D_{1\tau}/\varepsilon_0\varepsilon_1 =$
$= D_{2\tau}/\varepsilon_0\varepsilon_2 \leftrightarrow D_{1\tau}/D_{2\tau} = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ претерпевает разрыв.

Нормальные составляющие вектора электрического смещения,напряжённости и поляризованности на границе раздела диэлектриков

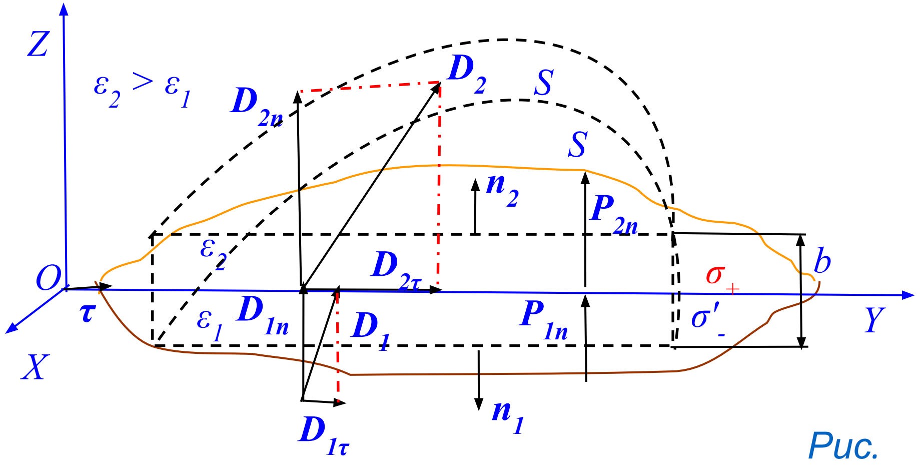
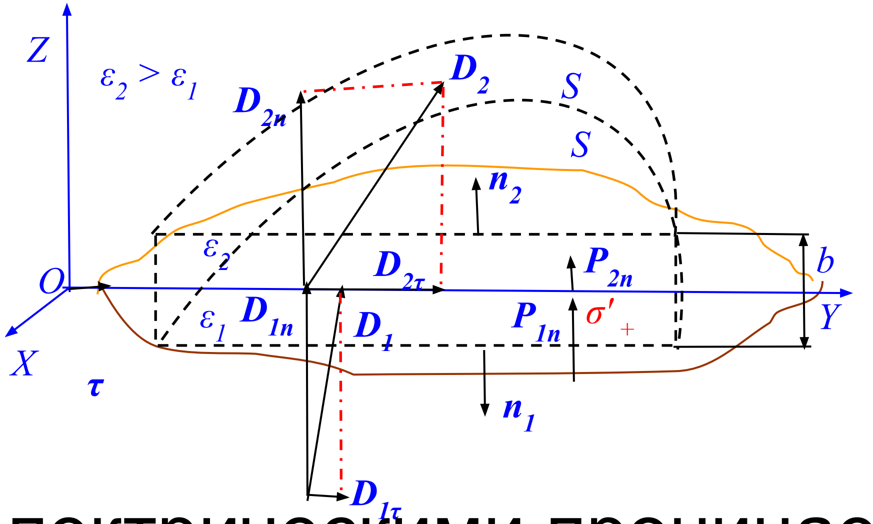


Рис. 4



Воображаемый цилиндр с S площадью оснований и b толщиной охватывает диэлектрики с ε_1 и ε_2 диэлектрическими проницаемостями при наличии на границе между диэлектриками q свободного заряда с σ поверхностной плотностью и при отсутствии его.

При переходе вектора $\boldsymbol{E}$ напряжённости электрического поля через границу диэлектриков с различными ε_1, ε_2 диэлектрическими проницаемостями при наличии на границе между этими диэлектриками q свободного заряда с σ поверхностной плотностью модули D_{1n}, D_{2n} векторов $\mathbf{D}_{1n}$, $\mathbf{D}_{2n}$ нормальных составляющих векторов электрического смещения, а также модули E_{1n}, E_{2n} векторов $\mathbf{E}_{1n}$, $\mathbf{E}_{2n}$ нормальных составляющих напряжённости электрического поля претерпевают разрыв:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma; \; E_{2n} = (\varepsilon_1 E_{1n}/\varepsilon_2) + (\sigma/\varepsilon_0\varepsilon_2). \qquad (7)$$

При переходе вектора $\mathbf{E}$ напряжённости электрического поля через границу диэлектриков с различными ε_1, ε_2 диэлектрическими проницаемостями при отсутствии на границе между этими диэлектриками свободного заряда модули D_{1n}, D_{2n} векторов $\mathbf{D}_{1n}$, $\mathbf{D}_{2n}$ нормальных составляющих векторов электрического смещения остаются постоянными:

$D_{1n} = D_{2n}$, а модули E_{1n}, E_{2n}

векторов $\boldsymbol{E}_{1n}$, $\boldsymbol{E}_{2n}$ нормальных составляющих напряжённости электрического поля претерпевают разрыв: $E_{1n}/E_{2n} = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Разность проекций P_{2n}, P_{1n} на внешние $\boldsymbol{n}_2$ и $\boldsymbol{n}_1$ нормали вектора $\boldsymbol{P}$ поляризованности в диэлектриках с соответственно ε_2 и ε_1 диэлектрическими проницаемостями равна со знаком "-" σ' поверхностной плотности связанных зарядов на границе этих диэлектриков: $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$. Знак σ' поверхностной плотности связанных зарядов на границе диэлектриков(σ'_+ или σ'_-) определяется соотношением модулей P_{2n}, P_{1n} векторов $\boldsymbol{P}_{2n}$, $\boldsymbol{P}_{1n}$ нормальных составляющих поляризованности в диэлектриках с ε_2, ε_1 диэлектрическими проницаемостями.

Задача №2.32

Система состоит из шара R радиуса, заряженного сферически – симметрично, и окружающей среды, заполненной зарядом с $\rho = \alpha/r$ объёмной плотностью, где α – постоянная, r – расстояние от центра шара. Пренебрегая влиянием вещества, найти заряд шара, при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от r. Чему равна эта напряжённость?

Ответ: $q = 2\pi R^2 \alpha$, $E = \alpha/2\varepsilon_0$.

Решение

Дано: $\rho = \alpha/r$, R/q = ? E = ?

Согласно теореме *Гаусса* модуль E вектора $\mathbf{E}$ напряжённости электростатического поля в M точке на сфере

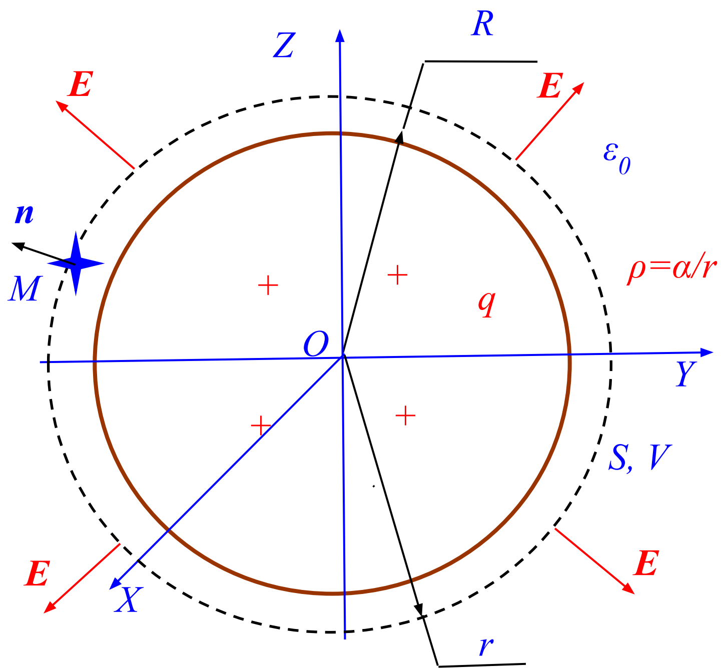


Рис. 5

r радиусом, охватывающей q заряд и шаровой слой, заряженный с объёмной плотностью $\rho = \alpha/r$, с внутренним R радиусом, внешним r радиусом:

$$\oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} (q + \int_R^r \frac{\alpha}{r} 4\pi r^2 dr) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} [q + 2\pi\alpha(r^2 - R^2)] \leftrightarrow E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} + \frac{q - 2\pi\alpha R^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \leftrightarrow E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}, \quad (8)$$

Если $q = 2\pi\alpha R^2$.

Задача №2.33

Внутри шара, заряженного равномерно с ρ объёмной плотностью, имеется сферическая полость. Центр полости смещен относительно центра шара на $\mathbf{a}$ вектор расстояния. Пренебрегая влиянием вещества шара, найти $\mathbf{E}$ вектор напряжённости электростатического поля внутри полости.

Ответ: $\mathbf{E} = \mathbf{a}\rho/3\varepsilon_0$.

Решение

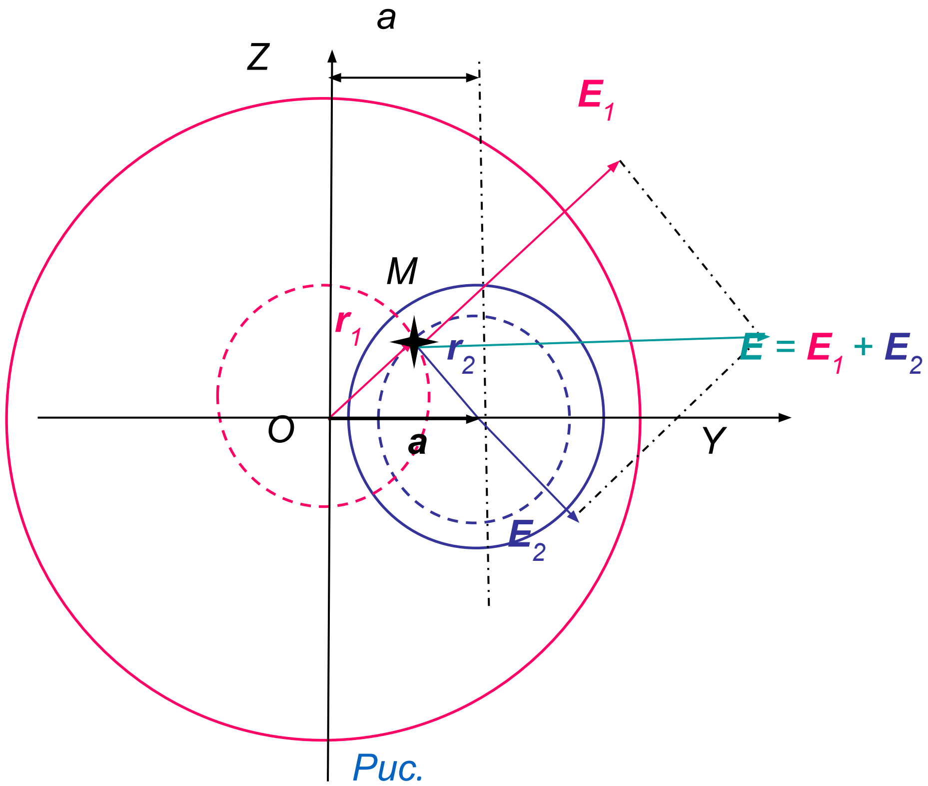


Рис. 6

Дано: ρ, **a**/E = ?
Электростатическое поле, вследствие его центральной симметрии, достаточно определить в его сечении, например,в *OYZ* плоскости. Представляем шар со сферической полостью двумя шарами с положительным и отрицательным зарядами с ρ и -ρ объёмными плотностями, вложенными друг в друга со смещением их центров на длину ***a*** вектора. Тогда в пересечении этих шаров заряд отсутствует.

Согласно теореме *Гаусса* модули E_1, E_2 векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ на сферической поверхности r_1, r_2 радиусами в *M* точке каждого заряженного шара, т.е. внутри полости:

$$\oiint_{(S)} \vec{E}_{1,2} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV \leftrightarrow E_{1,2} 4\pi r_{1,2}{}^2 = \frac{4\pi r_{1,2}{}^3 \rho}{3\varepsilon_0} \leftrightarrow E_{1,2} = \frac{r_{1,2}\rho}{3\varepsilon_0}, \quad (9)$$

Вследствие отрицательного заряда, охватываемого сферической поверхностью r_2 радиусом, $\mathbf{E}_2$ вектор направлен противоположно $\mathbf{r}_2$ радиусу-вектору:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{r}_1\rho}{3\varepsilon_0}; \vec{E}_2 = -\frac{\vec{r}_2\rho}{3\varepsilon_0}. \quad (10)$$

Вектор $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ напряжённости электростатического поля в *M* точке, т.е. внутри полости, как суперпозиция векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ от каждого заряженного шара r_1, r_2 радиусами:

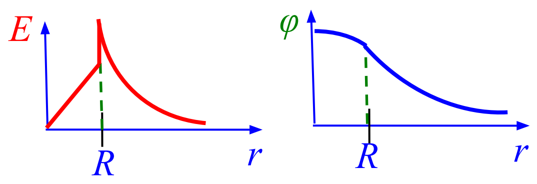
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\vec{a}\rho}{3\varepsilon_0}, \quad (11)$$

где $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}$. Вектор $\mathbf{E}$ сонаправлен $\mathbf{a}$ вектору и *OY* оси.

Задача №2.93

Сторонние заряды равномерно распределены с ρ объёмной плотностью по шару R радиуса из однородного изотропного диэлектрика с ε проницаемостью. Найти:
а) модуль напряжённости электрического поля как функцию r расстояния центра шара; изобразить примерные графики $E(r)$ и $\varphi(r)$ зависимостей; б) объёмную и поверхностную плотности связанных зарядов.

Ответ: а) Модуль $E(r < R) = \rho r/3\varepsilon\varepsilon_0$, $E(r > R) = \rho R^3/3\varepsilon_0 r^2$;
б) $\rho' = -\rho(\varepsilon - 1)/\varepsilon$, $\sigma' = \rho R(\varepsilon - 1)/3\varepsilon$.



Решение

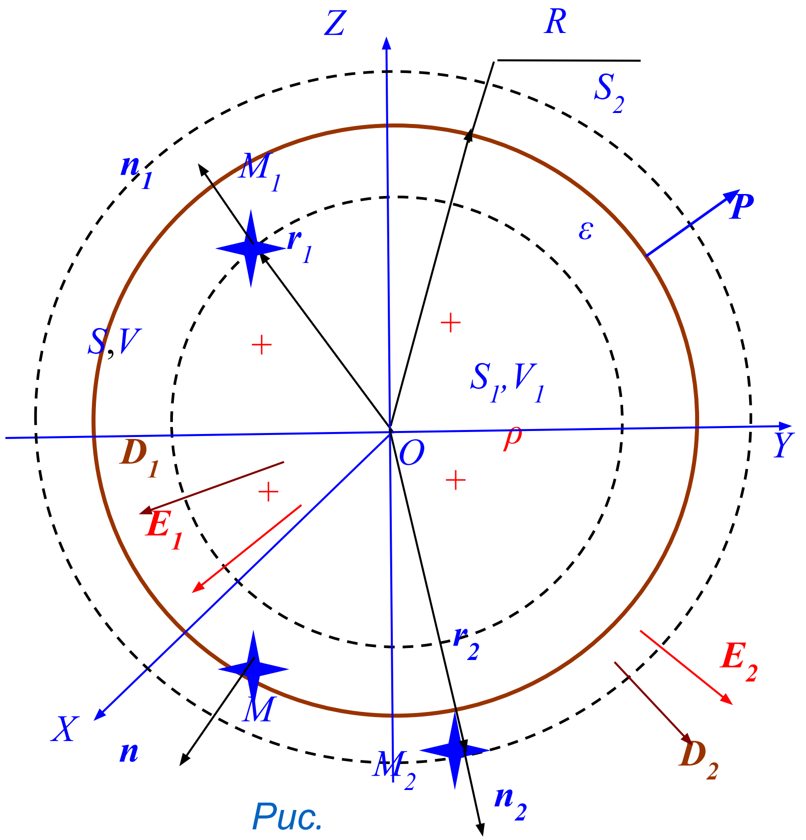


Рис. 7

Дано: R, ε, ρ / $E(r) = ?$ $\varphi(r) = ?$ $\rho' = ?$ $\sigma' = ?$

Поток Φ_{D1} вектора $\mathbf{D}_1$ электрического смещения согласно теореме *Гаусса* для поля $\mathbf{D}$ вектора через воображаемую сферическую поверхность S_1 площадью и r_1 радиусом, которая охватывает V_1 объём с $4\rho\pi r_1^3/3$ зарядом:

$$\Phi_{D1} = \oiint\limits_{(S_1)} \vec{D}_1 d\vec{S} = \frac{4\rho\pi r_1^3}{3} \leftrightarrow D_{1r} 4\pi r_1^2 = \frac{4\rho\pi r_1^3}{3} \leftrightarrow D_{1r} = \frac{\rho r_1}{3}, \quad (12)$$

где D_{1r} проекция вектора $\mathbf{D}_1$ электрического смещения на направление $\mathbf{r}_1$ радиуса – вектора в произвольной M_1 точке пространства диэлектрика внутри шара, т.е. при $r_1 \le R$.

В однородном изотропном диэлектрике $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$, поэтому проекция E_{1r} вектора $\mathbf{E}_1$ напряжённости электростатического поля на направление $\mathbf{r}_1$ радиуса – вектора в произвольной M_1 точке пространства диэлектрической среды внутри шара, т.е. при $r_1 \le R$:

$$E_{1r} = \frac{D_{1r}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (13)$$

Поток Φ_{D2} вектора $\mathbf{D}_2$ электрического смещения согласно теореме *Гаусса* для поля $\mathbf{D}$ вектора через воображаемую сферическую поверхность S_2 площадью и r_2 радиусом, которая охватывает V_2 объём с $4\rho\pi R^3/3$ зарядом:

$$\Phi_{D2} = \oiint_{(S_2)} \vec{D}_2 d\vec{S} = \frac{4\rho\pi R^3}{3} \leftrightarrow D_{2r} 4\pi r_2^{\,2} = \frac{4\rho\pi R^3}{3} \leftrightarrow D_{2r} = \frac{\rho R^3}{3r_2^{\,2}}, \quad (14)$$

где D_{2r} проекция вектора $\mathbf{D}_2$ электрического смещения на направление $\mathbf{r}_2$ радиуса – вектора в произвольной M_2 точке в вакууме вне шара, т.е. при $r_2 \geq R$. В вакууме $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, поэтому проекция E_{2r} вектора $\mathbf{E}_2$ напряжённости электростатического поля на направление $\mathbf{r}_2$ радиуса – вектора в произвольной M_2 точке в вакууме вне шара, т.е. при $r_2 \geq R$:

$$E_{2r} = \frac{D_{2r}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3r_2^{\ 2}\varepsilon_0}. \qquad (15)$$

В M точке на границе раздела заряженный диэлектрический шар – вакуум отношение проекции E_{1r} вектора $\mathbf{E}_1$ напряжённости электростатического поля внутри шара, т.е. при $r_1 \leq R$, к проекции E_{2r} вектора $\mathbf{E}_2$ напряжённости электростатического поля вне шара, т.е. при $r_2 \geq R$, поскольку E_{1r}, E_{2r} являются проекциями нормальных составляющих вектора напряжённости:

$$\frac{E_{1r}}{E_{2r}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \leftrightarrow \frac{E_{1r}}{E_{2r}} = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad (16)$$

где $\varepsilon_1 = 1$ – диэлектрическая проницаемость вакуума;
$\varepsilon_2 = \varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость заряженного шара.
Примерный график $E(r)$ зависимости:

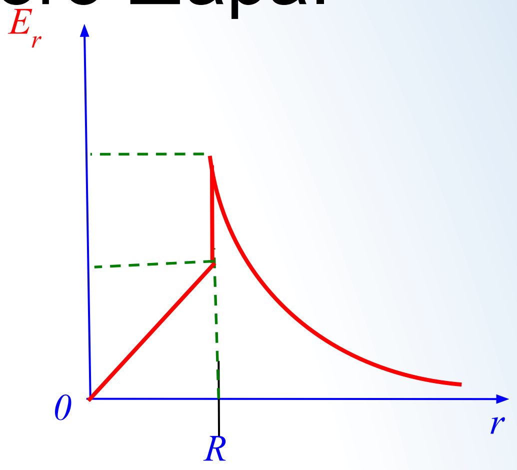


Рис. 8

На границе раздела заряженный диэлектрический шар – вакуум проекция E_{1r} вектора $\mathbf{E}_1$ напряжённости электростатического поля внутри шара, т.е. при $r_1 \leq R$, и проекция E_{2r} вектора $\mathbf{E}2$ напряжённости электростатического поля вне шара, т.е. при $r_2 \geq R$, претерпевают разрыв.
Потенциал φ_1 внутри заряженного шара, т.е. при $r_1 \leq R$, считая потенциал на

бесконечном расстоянии от этого шара, равным *нулю*, согласно связи напряжённости и разности потенциалов в электростатическом поле в интегральной форме:

$$\varphi_1 = \int_{r_1}^{R} E_{1r} dr + \int_{R}^{\infty} E_{2r} dr = \int_{r_1}^{R} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon} dr + \int_{R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{\rho (R^2 - r_1^{\ 2})}{6\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}. \quad (17)$$

Потенциал φ_2 вне заряженного шара, т.е. при $r_2 \geq R$, считая потенциал на бесконечном расстоянии от этого шара, равным *нулю*, согласно связи напряжённости и разности потенциалов в электростатическом поле в интегральной форме:

$$\varphi_2 = \int_{r_2}^{\infty} E_{2r} dr = \int_{r_2}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}. \quad (18)$$

Примерный график $\varphi(r)$:

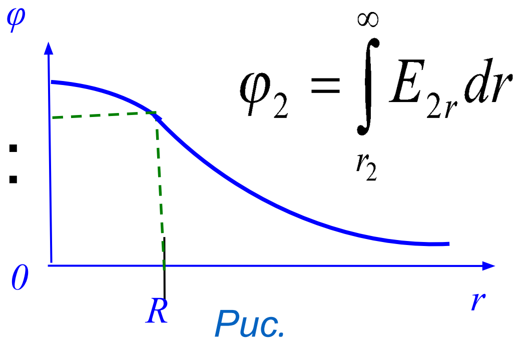


Рис. 9

Потенциал φ_1 внутри заряженного шара монотонно уменьшается от максимального значения в его 0 центре до значения на поверхности и уменьшается до *нуля* при $r \to \infty$:

$$\varphi_1\Big|_{r_1=R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \qquad (19)$$

Вектор $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\boldsymbol{E}$ поляризации в однородном изотропном диэлектрике коллинеарен и совпадает в нём по направлению с вектором $\boldsymbol{E}$ напряжённости электростатического поля. Вектор $\boldsymbol{E}$ направлен по вектору $\boldsymbol{n}$ нормали к сферической поверхности заряженного диэлектрического шара S площадью. Поэтому вектор $\boldsymbol{P}$ поляризации тоже направлен по этому вектору $\boldsymbol{n}$ нормали, вследствие чего он имеет только нормальную P_n проекцию к сферической поверхности заряженного диэлектрического шара S площадью. Поверхностная σ' плотность связанных зарядов:

$$\sigma' = P_n = P\cos(\vec{P}\,\hat{}\,\vec{n}) = \varepsilon_0(\varepsilon-1)E_{1r}\cos(\vec{P}\,\hat{}\,\vec{n}) = \varepsilon_0(\varepsilon-1)E_{1r} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0\varepsilon} = (\varepsilon-1)\frac{\rho R}{3\varepsilon}, \quad (20)$$

где $P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{1r}$ – модуль вектора $\mathbf{P}$ поляризации, поскольку вектор $\mathbf{E}$ напряжённости имеет одну E_{1r} проекцию; $r_1 = R$, т.к.имеет место поверхность шара. Полный $q_{\sigma'}$ связанный заряд на сферической поверхности заряженного диэлектрического шара $S = 4\pi R^2$ площадью:

$$q_{\sigma'} = \sigma' S = \frac{\rho R(\varepsilon-1)}{3\varepsilon}4\pi R^2 = \frac{4(\varepsilon-1)\rho\pi R^3}{3\varepsilon}. \quad (21)$$

Объёмная ρ' плотность связанных зарядов с учётом того, что векторы $\mathbf{P}$ поляризации внутри заряженного диэлектрического шара образуют сферическое векторное поле с P_{1r} проекцией на направление $\mathbf{r}_1$ радиуса – вектора:

$$\rho' = -div\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P_{1r})}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial[r^2\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_{1r}]}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[\dfrac{r^2\varepsilon_0(\varepsilon-1)\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon}\right]}{\partial r} = -\frac{(\varepsilon-1)\rho}{\varepsilon}. \quad (22)$$

Полный $q_{\rho'}$ объёмный заряд в $V = 4\pi R^3/3$ объёме заряженного диэлектрического шара:

$$q_{\rho'} = \rho' V = -\frac{4(\varepsilon-1)\rho\pi R^3}{3\varepsilon}. \quad (23)$$

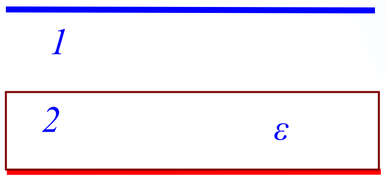
Согласно закону сохранения электрических зарядов электронейтральность диэлектрика должна сохранится после введения в него сторонних зарядов, что выполняется при равенстве модулей и противоположности знаков полного $q_{\sigma'}$ связанного заряда на сферической поверхности заряженного диэлектрического шара и полного $q_{\rho'}$ объёмного заряда в его объёме :

$$q_{\sigma'} + q_{\rho'} = \frac{4(\varepsilon-1)\rho\pi R^3}{3\varepsilon} - \frac{4(\varepsilon-1)\rho\pi R^3}{3\varepsilon} = 0, \quad (24)$$

что является проверкой правильности решения.

Задача №2.96

Первоначально пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено воздухом и напряжённость электрического поля в зазоре равна E_0.



Затем половину зазора, как показано на *рис.*, заполнили однородным диэлектриком с проницаемостью ε. Найти модули векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в обеих частях зазора (*1* и *2*), если при введении диэлектрика: а) напряжение между обкладками не менялось; б) заряды на обкладках оставались неизменными.

Ответ: а) $E_1 = 2\varepsilon E_0/(\varepsilon + 1)$, $E_2 = 2E_0/(\varepsilon + 1)$, $D_1 = D_2 = 2\varepsilon\varepsilon_0 E_0/(\varepsilon + 1)$; б) $E_1 = E_0$, $E_2 = E_0/\varepsilon$, $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$.

Решение

Дано: E_0, $\varepsilon / E_1 = ?$ $E_2 = ?$ $D_1 = ?$ $D_2 = ?$

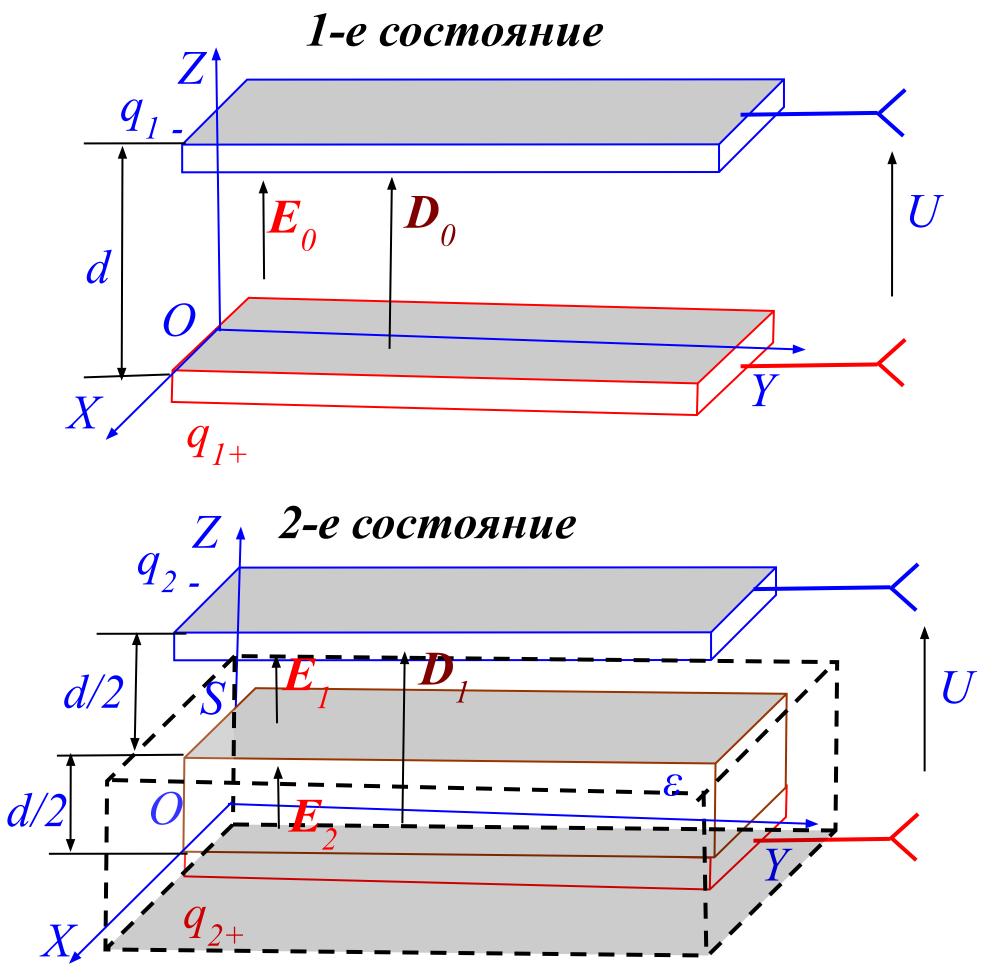


Рис.10

а) Согласно связи напряжённости и разности потенциалов в электростатическом поле в интегральной форме для 1-го состояния:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = U = \int_0^d E_0 dz = E_0 d, \qquad (25)$$

где E_0 - проекция на OZ ось вектора E_0 напряжённости электростатического поля между обкладками. Во 2-м состоянии U напряжение на обкладках конденсатора осталось прежним, а проекции векторов E_1, E_2

на *OZ* ось напряжённости электростатического поля между обкладками соответственно в вакууме, диэлектрике стали равными E_1, E_2 :

$$U = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2}. \qquad (26)$$

Поток Φ_{D1} вектора $\mathbf{D}_1$ электрического смещения во *2-м* состоянии согласно теореме *Гаусса* для поля $\mathbf{D}$ вектора через воображаемый параллелепипед с учётом пересечения вектором $\mathbf{D}_1$ только его верхнего основания *S* площадью одинаков в вакууме и диэлектрике:

$$\Phi_{D_1} = \oiint_{(S)} \vec{D}_1 d\vec{S} = q_{2+}, \qquad (27)$$

где q_{2+} - охватываемый воображаемым параллелепипедом заряд на нижней обкладке конденсатора, одинаковый для вакуума и диэлектрика. В однородном изотропном диэлектрике $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, поэтому E_1, E_2 проекции на *OZ* ось векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ напряжённости электростатического поля между обкладками соответственно в вакууме, диэлектрике: $D_1 = \varepsilon_0 E_1; D_1 = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 \leftrightarrow E_1 = \varepsilon E_2.$ (28)

Приравниваем выражения *U* напряжения на обкладках конденсатора для *1-*,*2-го* состояний:

$$E_0 d = \frac{E_1 d}{2} + \frac{E_2 d}{2} \leftrightarrow E_0 d = \frac{\varepsilon E_2 d}{2} + \frac{E_2 d}{2} \leftrightarrow E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1} \leftrightarrow E_1 = \frac{2\varepsilon E_0}{\varepsilon + 1} \leftrightarrow D_1 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 1}. \quad (29)$$

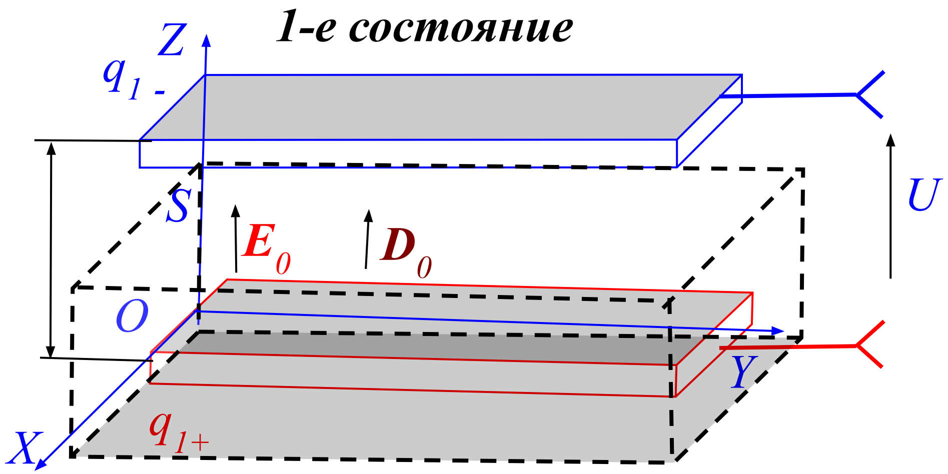


Рис.1 1

б) Для *1-го* состояния поток Φ_{D0} вектора D_0 электрического смещения согласно теореме *Гаусса* для поля **D** вектора через воображаемый параллелепипед

с учётом пересечения в вакууме вектором D_0

только его верхнего основания S площадью:

$$\Phi_{D_0} = \iint_S \vec{D}_0 d\vec{S} = q_{1+}, \leftrightarrow \Phi_{D_0} = D_0 S = q_{1+} \leftrightarrow q_{1+} = D_0 S \leftrightarrow q_{1+} = \varepsilon_0 E_0 S \qquad (30)$$

где q_{1+} - охватываемый воображаемым параллелепипедом заряд на нижней обкладке конденсатора.

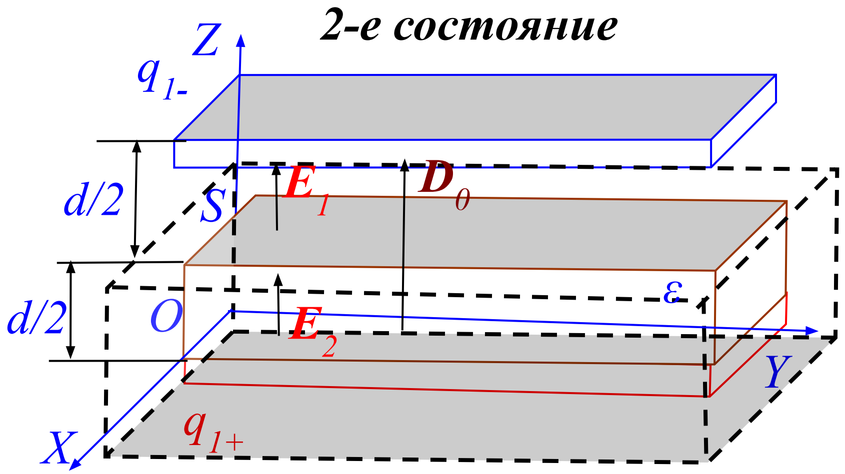


Рис.1

Поток Φ_{D0} вектора D_0 электрического смещения во *2-м* состоянии согласно теореме *Гаусса* для поля D вектора через воображаемый параллелепипед с учётом пересечения вектором D_0 только его верхнего основания S площадью одинаков в вакууме и диэлектрике:

$$N_{D_0} = \int_S \vec{D}_0 d\vec{S} = q_{1+}, \leftrightarrow N_{D_0} = D_0 S = q_{1+} \leftrightarrow D_0 = \frac{q_{1+}}{S} \leftrightarrow D_0 = \frac{\varepsilon_0 E_0 S}{S} \leftrightarrow D_0 = \varepsilon_0 E_0, \quad (31)$$

где q_{1+} - охватываемый воображаемым параллелепипедом заряд на нижней обкладке конденсатора, величина которого равна q_{1+} заряду в *1-ом* состояния, вследствие отключения источника напряжения.

В однородном изотропном диэлектрике $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, поэтому E_1, E_2 проекции векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ на *OZ* ось напряжённости электростатического поля между обкладками соответственно в вакууме, диэлектрике: $E_1 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{E_0\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = E_0; E_2 = \frac{D_0}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{E_0\varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{E_0}{\varepsilon}.$ (32)

Дома: Иродов И.Е. Задачи по общей физике.
- М.: Бином, 1998÷2010. №№ 2.37, 2.99

Спасибо за внимание!