Занятие 3
Электроёмкость, конденсаторы, энергия электростатического поля

· Электростатическое поле вблизи поверхности проводника, окружённого диэлектриком

· Электроемкости уединённой проводящей сферической поверхности, плоского, коаксиального, сферического конденсаторов

· Энергия взаимодействия, собственная и полная энергии системы заряженных проводников

· Электрическая энергия плоского конденсатора, электростатического поля

· Ауд.: Иродов И.Е. Задачи по общей физике.

- М.: Бином, 1998÷2010. №№ 2.115, 2.119, 2.135, 2.152

Электростатическое поле вблизи поверхности проводника, окружённого диэлектриком

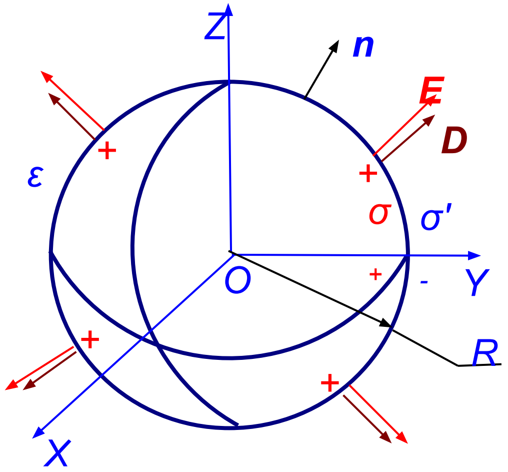


Рис.1а

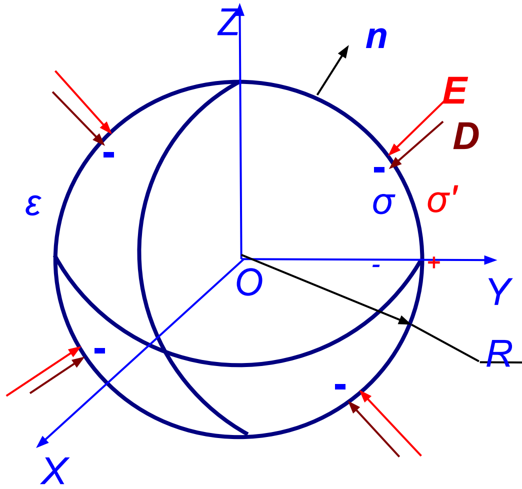


Рис.1б

Проекция D_n на направление внешней n нормали к поверхности проводника S площадью вектора $\boldsymbol{D}$ электрического смещения у поверхности этого проводника:

$$\oint\!\!\oint_{(S)} D_n dS = \oint\!\!\oint_{(S)} \sigma dS \leftrightarrow D_n = \sigma, \qquad (1)$$

где вектор $\boldsymbol{D}$ электрического смещения в зависимости от знака заряда с σ_+, σ_- поверхностной плотностью на поверхности проводника сонаправлен или противонаправлен внешней $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности этого проводника.

Поверхностные σ'_+,σ'_- плотности связанных зарядов диэлектрика, окружающего поверхность проводника S площадью:

$\sigma'_+ = -\sigma_-(\varepsilon - 1)/\varepsilon$; $\sigma'_- = -\sigma_+(\varepsilon - 1)/\varepsilon$,(2) где в случае нахождения на сфере отрицательного q_- заряда с σ_- поверхностной плотностью на диэлектрике с ε диэлектрической проницаемостью, граничащей с этой заряженной сферой, возникает положительный связанный заряд с σ'_+ поверхностной плотностью , а в случае нахождения на сфере положительного q_+ заряда с σ_+ поверхностной плотностью на диэлектрике с ε диэлектрической проницаемостью, граничащей с этой
заряженной сферой, возникает отрицательный
связанный заряд с σ'_- поверхностной плотностью.

Электроемкости уединённой проводящей сферической поверхности, плоского, коаксиального, сферического конденсаторов

Потенциал φ сферической поверхности R радиуса с q свободным зарядом проводника на его поверхности: $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. (3)

Ёмкость C уединённой проводящей сферической поверхности R радиуса, помещённой в среду с ε диэлектрической проницаемостью: $C = q/\varphi = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. (4)

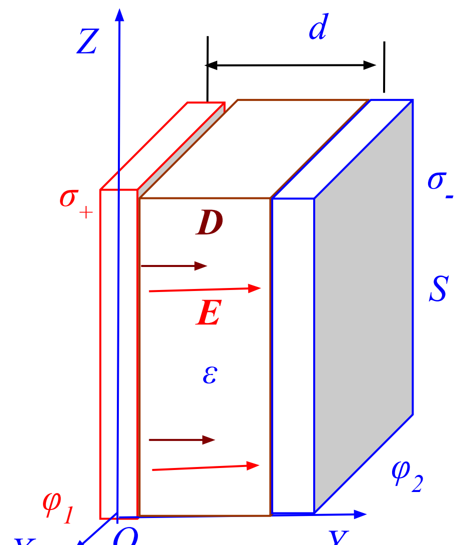


Рис.2

Разность $\varphi_1 - \varphi_2$ потенциалов между пластинами, каждая из которых имеет $q_+ = \sigma_+ S$, $q_- = \sigma_- S$ свободный заряд противоположного знака: $\varphi_1 - \varphi_2 = qd/\varepsilon_0\varepsilon S$. (5)

Ёмкость C плоского конденсатора с линейными размерами обкладок намного большими d зазора и и ε диэлектрической проницаемостью диэлектрика между этими обкладками: $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2) = \varepsilon_0\varepsilon S/d$. (6)

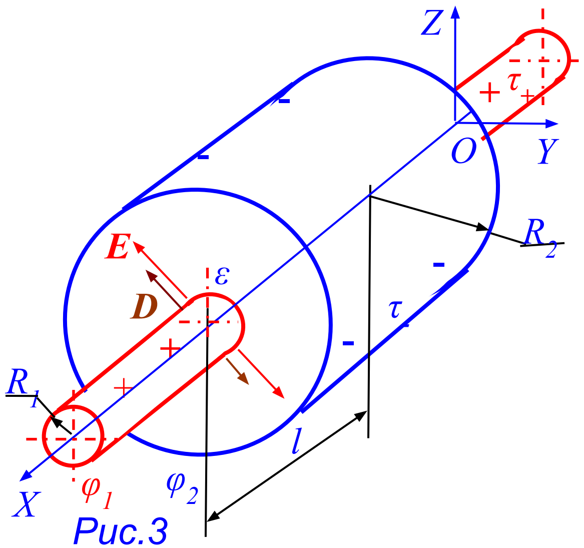


Рис.3

Разность $\varphi_1 - \varphi_2$ потенциалов между цилиндрическими обкладками конденсатора, каждая из которых имеет τ_+, τ_- линейные плотности зарядов и поэтому на каждой обкладке имеется $q_+ = \tau_+ l$, $q_- = \tau_- l$ свободный заряд противоположного знака: $\varphi_1 - \varphi_2 = q\ln(R_2/R_1)/2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l$. (7)

Ёмкость C коаксиального конденсатора с l длиной цилиндрических обкладок R_1, R_2 радиусами и диэлектриком с ε диэлектрической проницаемостью между ними:

$$C = q/(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon l/\ln(R_2/R_1). \quad (8)$$

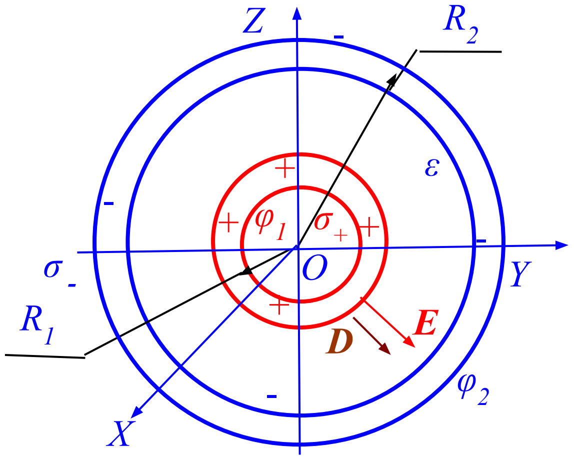


Рис.4

Разность $\varphi_1 - \varphi_2$ потенциалов между сферическими обкладками конденсатора, каждая из которых имеет σ_+, σ_- поверхностные плотности зарядов и поэтому на каждой обкладке имеется $q_+ = \sigma_+ S$, $q_- = \sigma_- S$ свободный заряд противоположного знака: $\varphi_1 - \varphi_2 = (q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon)[(1/R_1) - (1/R_2)]$. (9)

Ёмкость C сферического конденсатора с R_1, R_2 радиусами обкладок и диэлектриком с ε диэлектрической проницаемостью

между ними : $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2) = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R_1R_2)/(R_2 - R_1)$. (10)

Энергия взаимодействия, собственная и полная энергии системы заряженных проводников

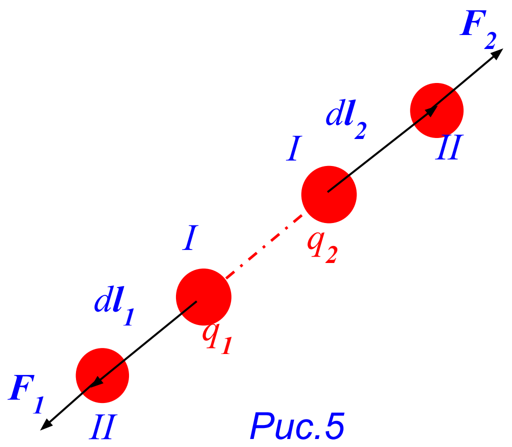


Рис.5

Потенциальная $W_в = W_{12}$ энергия взаимодействия q_1 и q_2 зарядов: $W_в = W_{12} = (1/2)(W_{12} + W_{21})$, (11)
где $W_{12} = W_{21}$ - энергия взаимодействия соответственно q_1 и q_2 зарядов, равная энергии взаимодействия q_2 и q_1 зарядов.

Энергия $W_в$ взаимодействия *n - зарядов*, находящихся в линейном изотропном диэлектрике с ε диэлектрической проницаемостью:

где φ_j – потенциал, создаваемый в j-ой точке нахождения заряда q_i всеми $(n-1)$ – зарядами, окружающих этот q_i заряд.

Собственная W_c энергия всех n - *проводников* с q_i зарядами и φ_{ci} собственными потенциалами:

Полная W энергия всех n - *проводников* с учётом собственных W_c энергий всех n - *проводников* и энергии $W_в$ взаимодействия этих n - *проводников*, находящихся в линейном изотропном диэлектрике с ε диэлектрической проницаемостью или вакууме:

Электрическая энергия плоского конденсатора, электростатического поля

Ёмкость $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2) = q/U$ плоского конденсатора с учётом соотношения между энергией W и q зарядом, U напряжением, C ёмкостью: $W = qU/2 = U^2C/2 = q^2/2C$. (15)

Энергия W_e электростатического поля в V объёме линейного изотропного диэлектрика:

$$W_e = \iiint_V dW_e = \iiint_V w_e dV = \iiint_V (\varepsilon_0 \varepsilon E^2/2) dV = \iiint_V (\mathbf{ED}/2) dV, \qquad (16)$$

где $w_e = \mathbf{ED}/2$ - плотность энергии электростатического поля, а $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ - векторы соответственно напряжённости электростатического поля и электрического смещения в линейном изотропном диэлектрике V объёмом, где определяется w_e плотность энергии электростатического поля.

Задача №2.115

Найти ёмкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого a и b, причём $a < b$, если пространство между обкладками заполнено диэлектриком: а) проницаемости ε; б) проницаемость которого зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha/r$, где α – постоянная. Ответ: а) $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon ab/(b - a)$; б) $C = 4\pi\varepsilon_0\alpha/\ln(b/a)$.

Дано: a, b, ε, α/ $C = ?$

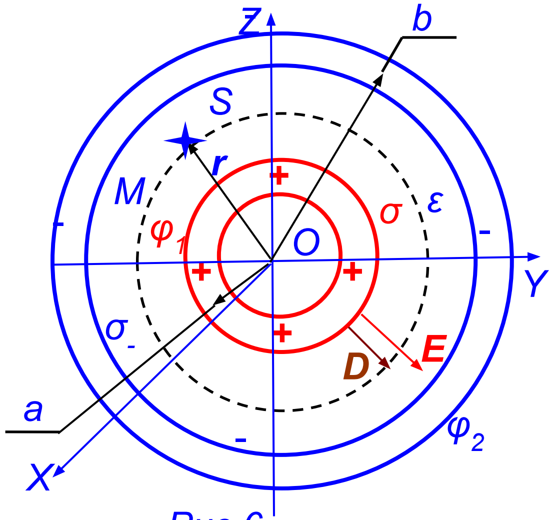


Рис.6

а) Проекция D_r на направление $\boldsymbol{r}$ радиуса – вектора $\mathbf{D}$ вектора электрического смещения в произвольной M точке пространства диэлектрической среды согласно обобщённой теореме Гаусса :

$$\oiint\limits_{(S)} \mathbf{D}d\mathbf{S} = \oiint\limits_{(S)} D_r dS = q \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow D_r 4\pi r^2 = q \leftrightarrow D_r = q/4\pi r^2. \quad (17)$$

С учётом связи $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ вектора D электрического смещения с вектором E напряжённости

электростатического поля E_r проекция на направление r радиуса - вектора E вектора напряжённости в произвольной M точке пространства диэлектрической среды, проницаемость ε которой постоянна :

$$E_r = D_r/\varepsilon_0\varepsilon = q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 \quad (18)$$

Разность $\varphi_1 - \varphi_2$ потенциалов между внутренней и внешней сферами a, b радиусами определяется интегрированием E_r проекции на направление r радиуса - вектора E вектора напряжённости от a до b радиусов:

Ёмкость C сферического конденсатора с обкладками a, b радиусов и диэлектриком с ε диэлектрической

проницаемостью между ними: $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2) = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon(ab)/(b - a)$. (20)
б) Проекция E_r проекция на направление $\boldsymbol{r}$ радиуса - вектора $\boldsymbol{E}$ вектора напряжённости в произвольной M точке пространства диэлектрической среды, проницаемость которой зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha/r$, где α – постоянная:

$$E_r = D_r/\varepsilon_0\varepsilon = q/4\pi\varepsilon_0\alpha r. \qquad (21)$$

Разность $\varphi_1 - \varphi_2$ потенциалов между внутренней и внешней сферами a, b радиусами определяется интегрированием

E_r проекции на направление $\boldsymbol{r}$ радиуса - вектора $\boldsymbol{E}$ вектора напряжённости от a до b радиусов:

Ёмкость C сферического конденсатора с обкладками a, b радиусов и диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha/r$, где α – постоянная:

Задача №2.119

Длинный прямой провод расположен параллельно проводящей плоскости. Радиус сечения провода a, расстояние между осью провода и проводящей плоскостью b. Найти взаимную емкость этой системы на единицу длины провода при условии $a \ll b$.

Ответ: $C \approx 2\pi\varepsilon_0 \alpha/\ln(2b/a)$.

Решение

Дано: *a*, *b*,*a* << *b* / *C* = ?

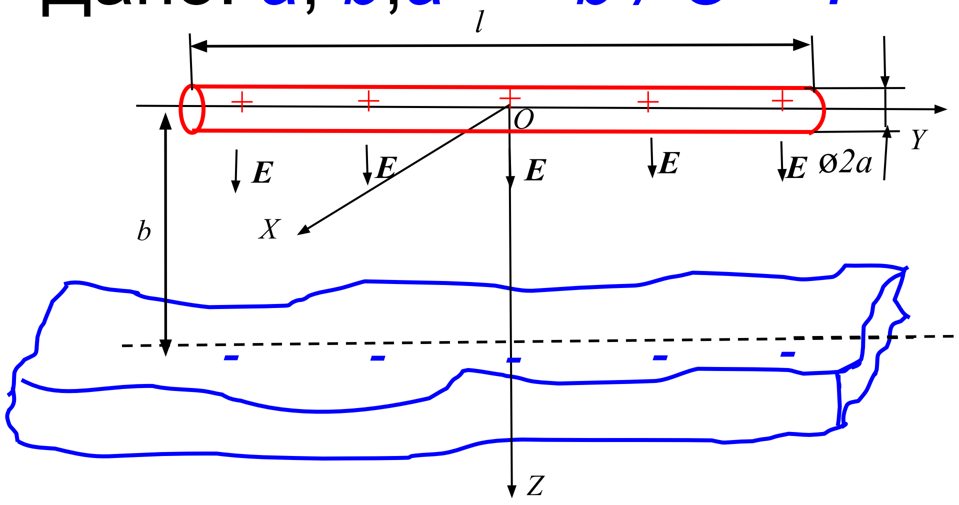


Рис.7а

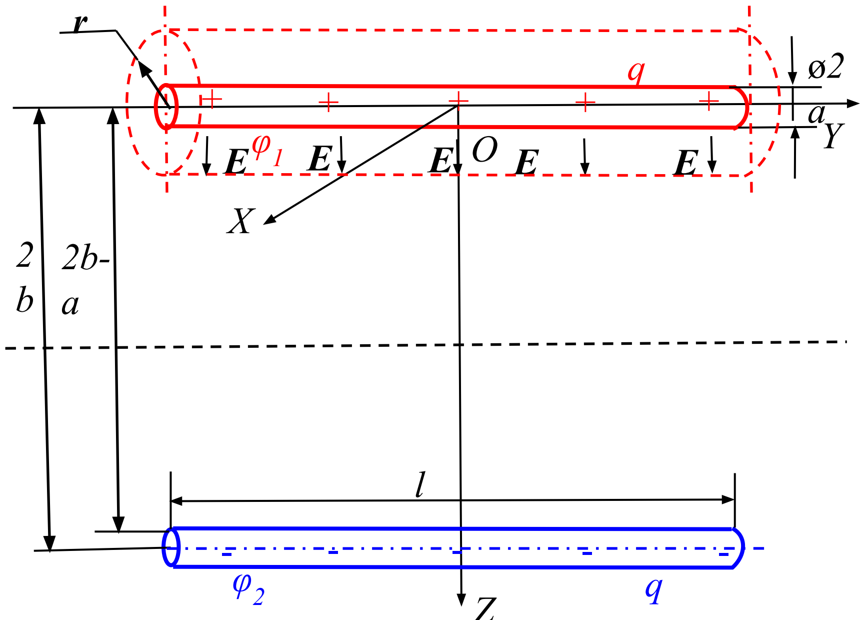


Рис.7б

Электростатическое поле не изменится, если плоскость убрать, и расположить зеркальный провод с *-q* зарядом. Согласно теореме *Гаусса* поток $Ф_E$ вектора **E** напряжённости радиального электростатического поля через воображаемый цилиндр *r* радиусом с учётом пересечения вектором **E** только его боковой поверхности $S = 2\pi r l$ площадью, а также с учётом отсутствия взаимовлияния основного и зеркального проводников, поскольку $a << b$:

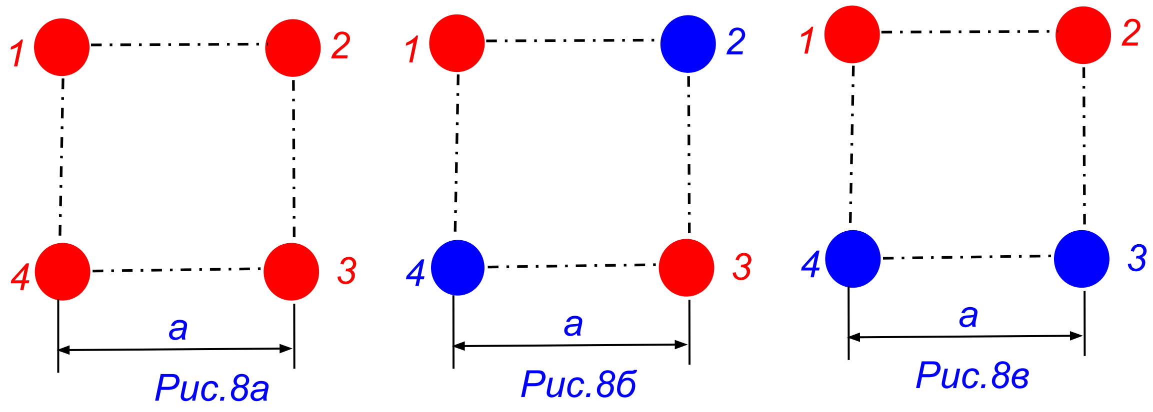
где q - охватываемый воображаемым цилиндром заряд на длинном прямом проводе l длиной, имеющем τ линейную плотность заряда; E_z – проекция на OZ ось вектора $\boldsymbol{E}$ напряжённости радиального электростатического поля основного проводника в OYZ плоскости.

Разность $\varphi_1 - \varphi_2$ потенциалов между основным и зеркальным проводниками определяется с учётом $a << b$ интегрированием E_z проекции на OZ ось вектора ***E*** напряжённости радиального электростатического поля от *a* поверхности основного проводника до $2b - a$ поверхности зеркального проводника:

Линейная ёмкость *C* между основным и зеркальным проводниками, которая равна взаимной $C_в$ линейной емкости прямого провода, расположенного параллельно проводящей плоскости:

Задача №2.135

Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со a стороной в системах, которые показаны на рисунке.



Ответ:

Решение

Дано: $a/W_в$ = ? Энергия $W_в$ взаимодействия n - *зарядов*, находящихся в линейном изотропном диэлектрике с ε диэлектрической проницаемостью:

где φ_j – потенциал, создаваемый в j-ой точке нахождения заряда q_i всеми $(n-1)$ – зарядами, окружающих этот q_i заряд.

а)

где $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ – модуль равных положительных зарядов; φ_{12}, φ_{13}, φ_{14} – положительные потенциалы, создаваемые в точке нахождения q_1 заряда q_2, q_3, q_4 зарядами, окружающих этот q_1 заряд; φ_{21}, φ_{23}, φ_{24} –

положительные потенциалы, создаваемые в точке нахождения q_2 заряда q_1, q_3, q_4 зарядами окружающих этот q_2 заряд; φ_{31}, φ_{32}, φ_{34} – положительные потенциалы, создаваемые в точке нахождения q_3 заряда q_1, q_2, q_4 зарядами окружающих этот q_3 заряд; φ_{41}, φ_{42}, φ_{43} – положительные потенциалы, создаваемые в точке нахождения q_4 заряда q_1, q_2, q_3 зарядами окружающих этот q_4 заряд; положительный знак энергии $W_{в}$ взаимодействия свидетельствует о том, что это энергия отталкивания

б)

где $q_1 = q_3 = q$; $q_2 = q_4 = -q$ – положительные и отрицательные заряды, модули которых одинаковы; отрицательный знак энергии $W_в$ взаимодействия свидетельствует о том, что это энергия притяжения

в)

где $q_1 = q_2 = q$; $q_3 = q_4 = -q$ – положительные и отрицательные заряды, модули которых одинаковы; отрицательный знак энергии $W_в$ взаимодействия свидетельствует о том, что это энергия притяжения.

Задача №2.152

Плоский конденсатор расположен горизонтально так, что одна его пластина находится над поверхностью жидкости, другая – под её поверхностью. Диэлектрическая проницаемость жидкости ε, её плотность ρ. На какую высоту поднимется уровень жидкости в конденсаторе после сообщения его пластинам заряда с поверхностной плотностью σ?

Ответ: $h = (\varepsilon - 1)\sigma^2/2\varepsilon_0\varepsilon\rho g$.

Решение

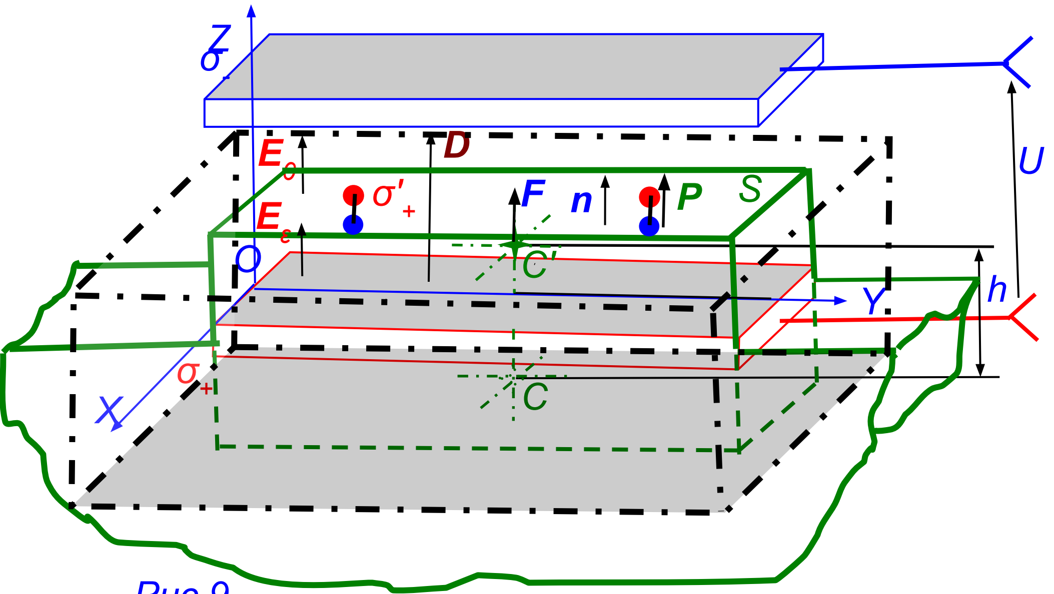


Рис.9

Дано: ε, ρ, $\sigma / h = ?$ Поток Φ_D вектора $\boldsymbol{D}$ электрического смещения согласно теореме *Гаусса* для поля $\boldsymbol{D}$ вектора через воображаемый параллелепипед с учётом пересечения вектором $\boldsymbol{D}$ только его верхнего основания S площадью

одинаков в вакууме и диэлектрике:

где $\sigma_+ S$- охватываемый воображаемым параллелепипедом заряд на нижней обкладке конденсатора с σ_+ поверхностной плотностью, одинаковый для вакуума и диэлектрика. В однородном изотропном диэлектрике $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$, поэтому E_0, E_ε проекции на OZ ось векторов

векторов $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{E}_\varepsilon$ напряжённости электростатического поля между обкладками плоского конденсатора соответственно в вакууме, диэлектрике:

Проекция P на OZ ось вектора $\boldsymbol{P}$ поляризованности на поверхности жидкого диэлектрика:

Поверхностная σ'_+ плотность связанных зарядов с учётом положительной проекции P на внешнюю $\boldsymbol{n}$ нормаль к поверхности жидкого диэлектрика вектора

$\boldsymbol{P}$ поляризованности, вследствие чего $\sigma'_{.} > 0$:

Проекция F на OZ ось вектора $\mathbf{F}$ силы, действующего на связанный q' заряд на поверхности жидкого диэлектрика S площадью:

где E_1 - проекция на OZ ось вектора $\mathbf{E}_1$ напряжённости электростатического поля в вакууме верхней обкладки конденсатора с модулем плотности σ_- свободного отрицательного заряда; $\sigma = \sigma_+ = - \sigma_-$ - модуль поверхностной плотности верхней и нижней обкладок конденсатора.
Согласно уравнению изменения механической энергии приращение ΔW_p потенциальной энергии поднятой жидкости в конденсаторе на h высоту равно работе $A_{ст}$ сторонней силы, которая равна работе вектора $\mathbf{F}$ силы электростатического

поля по подъёму C центра масс жидкости из начального в C' поднятое состояние:

где $m = \rho Sh$ – масса поднятой жидкости ρ плотностью, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда с основанием S площадью и h высотой.

Дома:* *Иродов И.Е.* *Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2010. №№ 2.116, 2.149

Спасибо за внимание!