

8. Аналитическая геометрия

Линия (алгебраическая) на плоскости — ГМТ $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен степени n .

Поверхность (алгебраическая) — ГМТ $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — многочлен степени n .

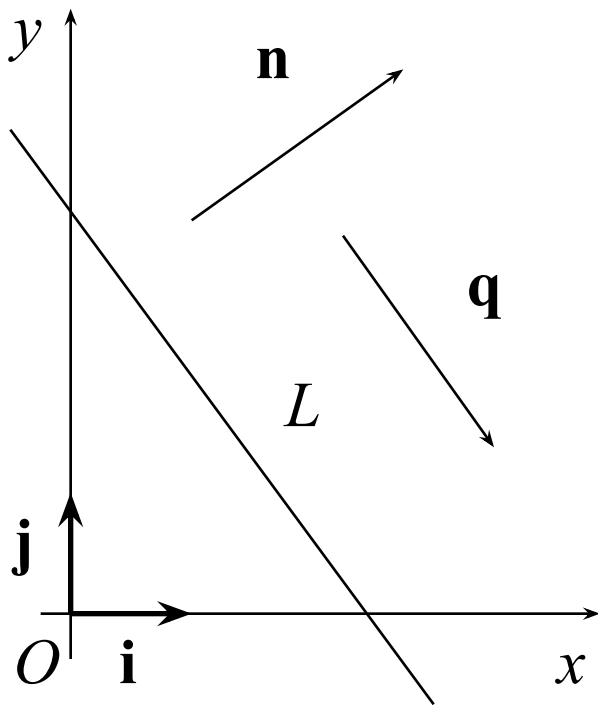
Линия (алгебраическая) в пространстве — пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Уравнение линии или поверхности - нахождение зависимости между координатами текущей точки.

8.1 Прямая на плоскости

8.1.1. Некоторые понятия



Декартова прямоугольная система координат

Прямая линия L на плоскости

Нормальный вектор - любой ненулевой вектор, ортогональный этой прямой: $\mathbf{n} \perp L$, $|\mathbf{n}| \neq 0$.

Направляющий вектор - любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой: $\mathbf{q} \parallel L$, $|\mathbf{q}| \neq 0$.

По определению, $\mathbf{n} \perp L$, т.е. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0$

Пусть $\mathbf{n} = (A, B) = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, $\mathbf{q} = (l, m) = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0 \Rightarrow Al + Bm = 0$$

Отсюда, если задан $\mathbf{n} = (A, B)$, то $\mathbf{q} = (B, -A)$ или $\mathbf{q} = (-B, A)$.

И наоборот, если задан $\mathbf{q} = (l, m)$, то $\mathbf{n} = (m, -l)$ или $\mathbf{n} = (-m, l)$.

$$\text{Проверяем: } \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = AB - BA = -AB + BA = lm - ml = -lm + ml = 0$$

Вывод: один из этих векторов на плоскости полностью задаёт положение прямой, и по нему можно найти другой вектор.

8.1.2. Общее уравнение прямой на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно вектору *нормали*

$O(0, 0)$ - дано (начало коор-т)

$M_0(\mathbf{r}_0) = M_0(x_0, y_0)$ - дана

$\mathbf{n} = (A, B)$ - дан

$M(\mathbf{r}) = M(x, y)$ - лежит на заданной прямой

$$\mathbf{n} \cdot \overline{M_0M} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

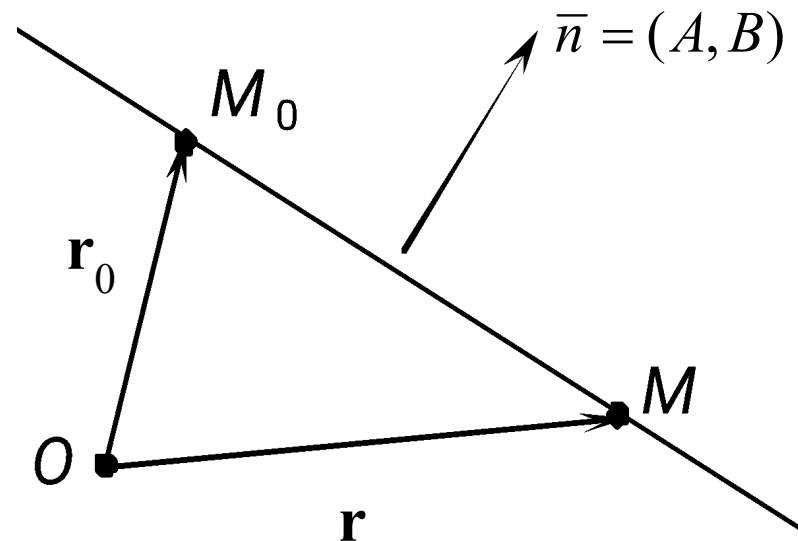
$$\Leftrightarrow \mathbf{n}\mathbf{r} - \mathbf{n}\mathbf{r}_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{n}\mathbf{r} + C = 0}$$

общее векторное уравнение прямой на плоскости

Аналогично для \mathbf{q} : $\mathbf{q} \parallel \overline{M_0M} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{q} \parallel (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{q} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{q}}$$

векторное параметрическое уравнение прямой на плоскости



То же самое для координат:

$$\mathbf{n} \cdot \overline{M_0M} = 0 \Leftrightarrow (A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$$

Полное уравнение $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow A, B, C$ — ненулевые.

Частные случаи:

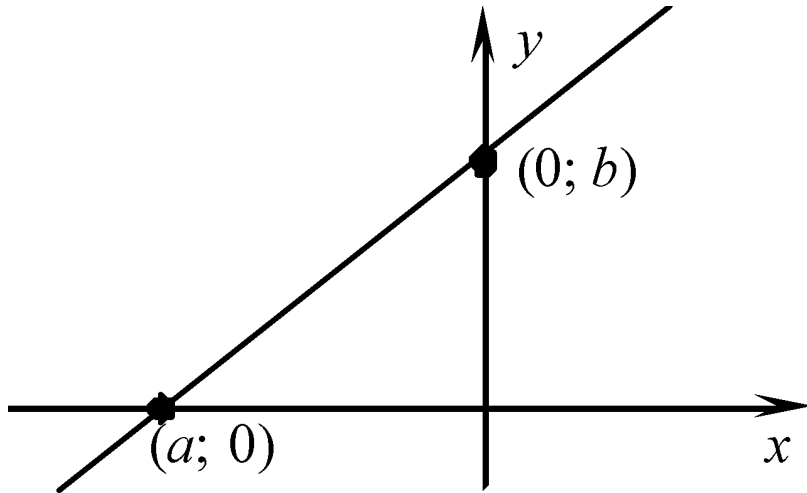
- (1) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0 \Rightarrow By + C = 0$ или $y = y_1$ - прямая параллельна оси Ox .
- (2) $B = 0, A \neq 0, C \neq 0 \Rightarrow Ax + C = 0$ или $x = x_1$ - прямая параллельна оси Oy .
- (3) $C = 0, A \neq 0, B \neq 0 \Rightarrow Ax + By = 0$ или $y = kx$ - проходит через начало коор-т.
- (4) $A = 0, C = 0, B \neq 0 \Rightarrow y = 0$ - прямая совпадает с осью Ox .
- (5) $B = 0, C = 0, A \neq 0 \Rightarrow x = 0$ - прямая совпадает с осью Oy .

Выводы:

1. Общее уравнение прямой на плоскости - линейное уравнение, коэффициенты которого - координаты нормального вектора.
2. Если коэффициент при x (y) равен нулю, то прямая параллельна оси Oy (Ox).
3. Если отсутствует свободный член, то прямая проходит через начало координат.

8.1.3. Уравнение прямой в отрезках

$$Ax + By + C = 0 - \text{полное} \Leftrightarrow \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1 \Leftrightarrow$$



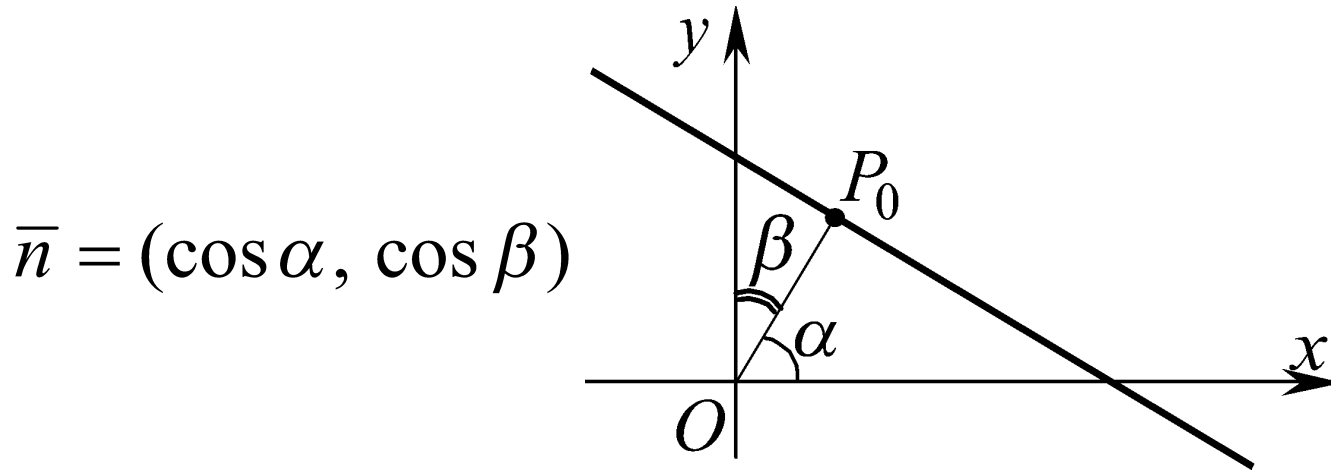
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy .

Замечание: для частных случаев общего уравнения прямой уравнения прямой в отрезках не существует.

8.1.4. Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая ℓ не проходит через $O(0;0)$.



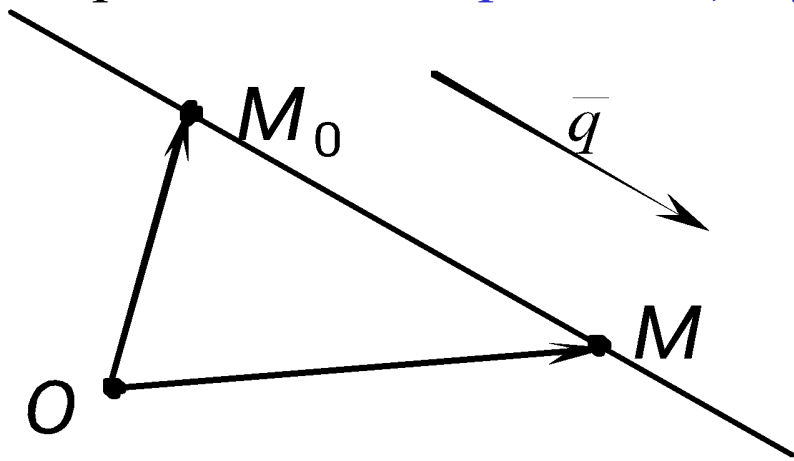
$\rho = |\overline{OP_0}|$ – расстояние от начала координат до прямой ☒

$$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + C = 0,$$

нормальное уравнение прямой
($C = -\rho$).

8.1.5. Каноническое уравнение прямой

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, параллельно *направляющему* вектору $\bar{q} = (l, m)$



$$\overline{M_0M} \parallel \bar{q} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}}$$

Частные случаи:

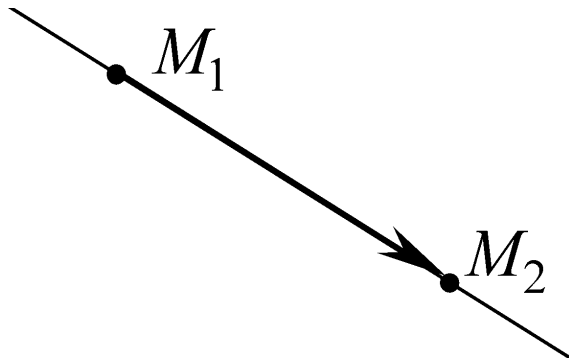
$$(1) \quad \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \mathbf{q} = (0, m)$$

- прямая параллельна оси Oy ,
уравнение прямой $x - x_0 = 0$;

$$(2) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{0}, \quad \mathbf{q} = (l, 0)$$

- прямая параллельна оси Ox ,
уравнение прямой $y - y_0 = 0$.

8.1.6. Уравнение прямой, проходящей через две точки



$$q = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Подставляем в каноническое уравнение:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Следствие: условие того, что три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой:

$$\boxed{\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}}$$

8.1.7. Параметрические уравнения прямой

Векторное параметрическое уравнение прямой: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{q}$

Найдём это уравнение в декартовых координатах из канонического уравнения прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = t l \\ y - y_0 = t m \end{cases}$$

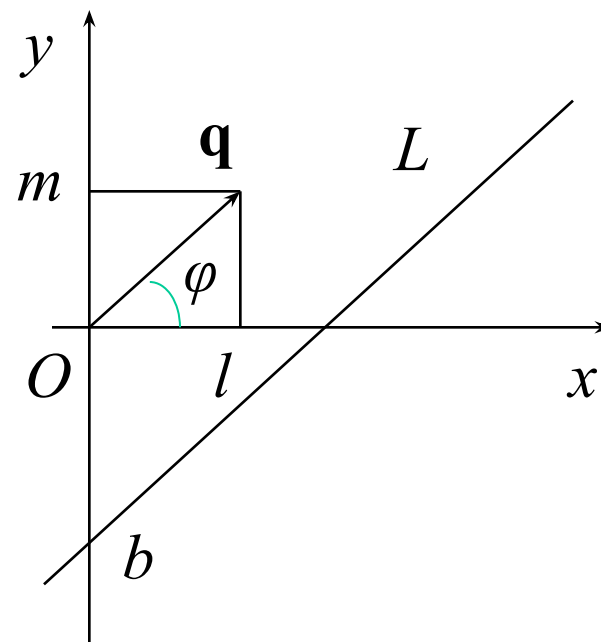
$$\boxed{\begin{cases} x = t l + x_0 \\ y = t m + y_0 \end{cases}}$$

8.1.8. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow y - y_0 = \frac{m}{l}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{m}{l}x + \left(y_0 - \frac{m}{l}x_0 \right) \Rightarrow \boxed{y = kx + b}$$

$$k = \frac{m}{l} = \operatorname{tg} \varphi$$



Частные случаи:

- (1) если $\varphi = 0$, то $k = 0$ и $y = b$, т.е. прямая параллельна оси Ox ;
- (2) если $\varphi < \pi/2$, то $k = \operatorname{tg} \varphi > 0$;
- (3) если $\varphi > \pi/2$, то $k = \operatorname{tg} \varphi < 0$;
- (4) если $\varphi = \pi/2$, то $k = \operatorname{tg} \varphi$ не существует, уравнения прямой с угловым коэффициентом – тоже;
- (5) если $b = 0$, то $y = kx$, и прямая проходит через начало коор-т.

8.1.9. Взаимное расположение прямых на плоскости

либо параллельны, либо пересекаются.

$$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

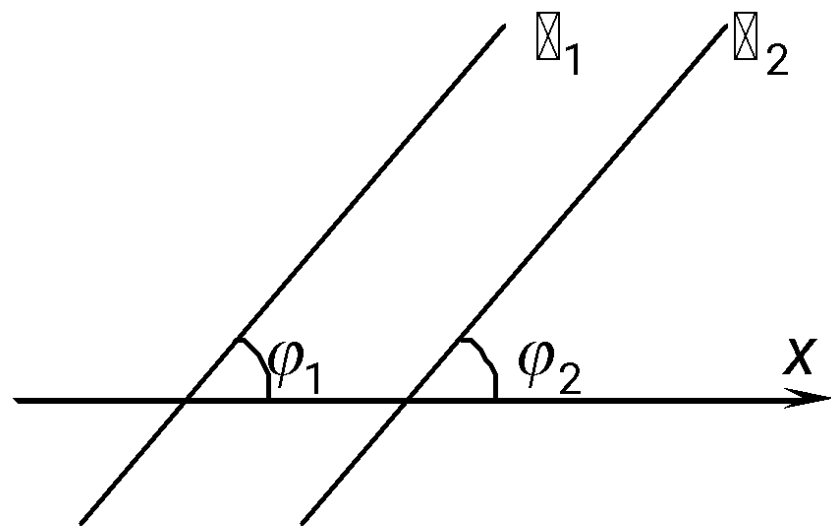
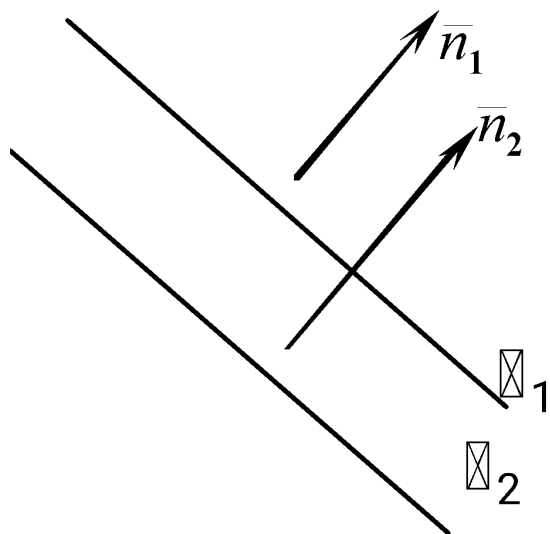
$$\ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1), \mathbf{q}_1 = (l_1, m_1), k_1$$

$$\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2), \mathbf{q}_2 = (l_2, m_2), k_2$$

Прямые параллельны, если:

$$(1) \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \quad (2) \mathbf{q}_1 \parallel \mathbf{q}_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}; \quad (3) k_1 = k_2.$$



Прямые перпендикулярны, если:

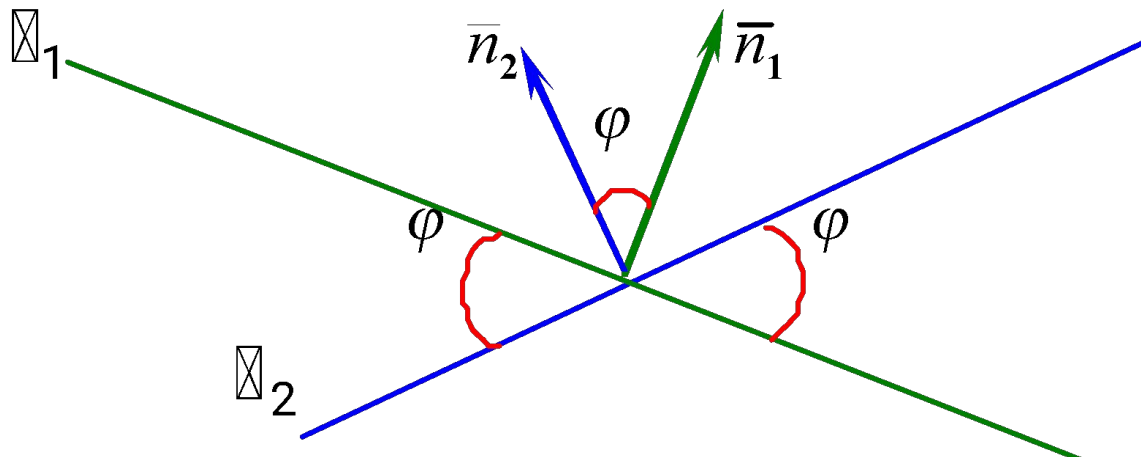
$$(1) \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Rightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0;$$

$$(2) \mathbf{q}_1 \perp \mathbf{q}_2 \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0; \quad (3) k_1 k_2 = -1.$$

Угол между прямыми:

$$(1) \cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

$$(2) \cos \varphi = \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}; \quad (3) \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$



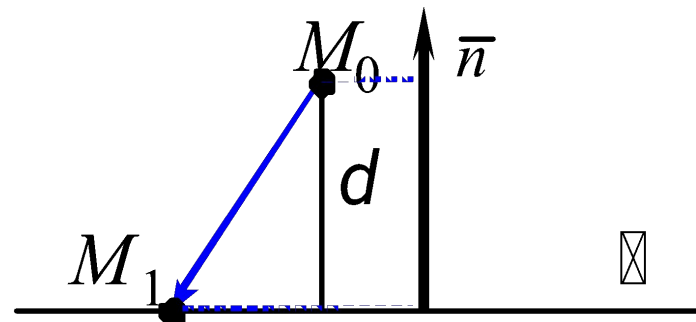
8.1.10. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая ℓ задана уравнением $Ax + By + C = 0$,

$M_0(x_0; y_0)$ — точка, не на прямой ℓ .

Найти расстояние от т. M_0 до прямой ℓ .

расстояние от т. M_0 до прямой ℓ —
модуль скалярной проекции
вектора M_0M_1 на нормаль прямой ℓ :



$$d = \left| \text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_1M_0} \right| = \left| \frac{\bar{n} \cdot \overline{M_1M_0}}{|\bar{n}|} \right| = \left| \frac{(A, B) \cdot (x_0 - x_1, y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| =$$

$$= \frac{|Ax_0 - Ax_1 + By_0 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\overset{\square \square \square C \square \square}{|Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)|}}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.1.11. Уравнение прямой, проходящей через точку

Дано: фиксированная точка прямой $M_0(x_0, y_0)$.

1. Пусть задан вектор нормали $\mathbf{n} = (A, B)$. Найти уравнение прямой, проходящей через M_0 и перпендикулярной \mathbf{n} .

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$

M_0 лежит на прямой $\Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0$

$$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

2. Пусть задан угловой коэффициент k . Найти уравнение прямой, проходящей через M_0 , с коэффициентом k .

$$y = kx + b \quad \Rightarrow y_0 = kx_0 + b$$

$$\Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0)$$

Пример на нахождение других уравнений прямой

Дано: общее уравнение $3x - 4y - 12 = 0$

Найти: другие уравнения этой прямой

Из уравнения: $A = 3; B = -4 \Rightarrow \mathbf{n} = (3; -4) \Rightarrow \mathbf{q} = (4; 3)$

Выражаем y : $4y = 3x - 12 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 3$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом

Делим на свободный член: $3x - 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$ - уравнение прямой в отрезках

Каноническое уравнение прямой: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow \frac{x - 4}{4} = \frac{y}{3} \quad (x_0 = 4, y_0 = 0)$

Параметрическое уравнение прямой: $\frac{x - 4}{4} = \frac{y}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4t + 4 \\ y = 3t \end{cases}$

или: $\begin{cases} x = lt + x_0 = 4t + 4 \\ y = mt + y_0 = 3t \end{cases}$

Пример на нахождение угла между прямыми

Дано: прямая $2x + y - 1 = 0$

Найти: угол между прямой и прямой с $\mathbf{q}_2 = (1; 3)$, проходящей через точку $(3; 2)$.

$$\mathbf{n}_1 = (2; 1) \quad \mathbf{q}_2 = (1; 3) \Rightarrow \mathbf{n}_2 = (3; -1)$$

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Ещё пример на нахождение угла между прямыми

Дано: прямая L_1 отсекает на координатных осях отрезки $(2; -3)$, а прямая L_2 проходит через точки $A(-1; 2)$ и $B(1; -3)$.

Найти: угол между прямыми.

$$L_1: \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow -3x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow n_1 = (-3; 2)$$

$$L_2: \frac{x+1}{1-(-1)} = \frac{y-2}{-3-2} = 1 \Rightarrow 5x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow n_2 = (5; 2)$$

$$\cos \varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{-3 \cdot 5 + 2 \cdot 2}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{25+4}} = \frac{-11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} = -\frac{11}{\sqrt{377}}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{377}}\right)$$

Пример на нахождение уравнения прямой, проходящей через точку

Дано: точка $M(4; -1)$, прямая $4x + 3y + 5 = 0$

Найти: общее уравнение прямой, проходящей через M и перпендикулярной данной.

$$\mathbf{n}_1 = (4; 3) \quad \mathbf{n}_2 = (3; -4) \text{ (по условию)}$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно \mathbf{n}_2 :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x - 4) - 4(y + 1) = 0 \quad \Rightarrow 3x - 4y - 16 = 0$$

Пример на нахождение высоты в треугольнике

Дано: треугольник ABC , где $A(2; 1)$, $B(1; -1)$, $C(3; 5)$.

Найти: длину высоты, опущенной из A .

Другими словами, нужно найти расстояние от A до прямой, проходящей через B и C .

Уравнение прямой, проходящей через B и C :
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y + 1}{5 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x - 3 = y + 1 \quad \Rightarrow \quad 3x - y - 4 = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{|3x_A - y_A - 4|}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \frac{|3 \cdot 2 - 1 - 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$