Решение тригонометрических уравнений и неравенств

1. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin \dfrac{a^2}{a^2+1}$;

б) $\arccos \dfrac{a^2+1}{a^2}$;

в) $\arcsin (\sqrt{2}-1)^2$;

г) $\operatorname{arctg} \dfrac{a^2+1}{a^2}$.

да

нет

, при а≠0

2. Решить уравнения:

а) sin x = - 1; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi к, к \in Z$

б) cos x = $\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi к, к \in Z$

в) sin x = 0; $x = \pi к, к \in Z$

г) tg x = 1; $x = \frac{\pi}{4} + \pi к, к \in Z$

3. Решить неравенства:

а) $\cos t < \frac{1}{2}$;

решение

б) $\sin t > -1{,}3$;

решение

в) $\cos t \geq 0$;

решение

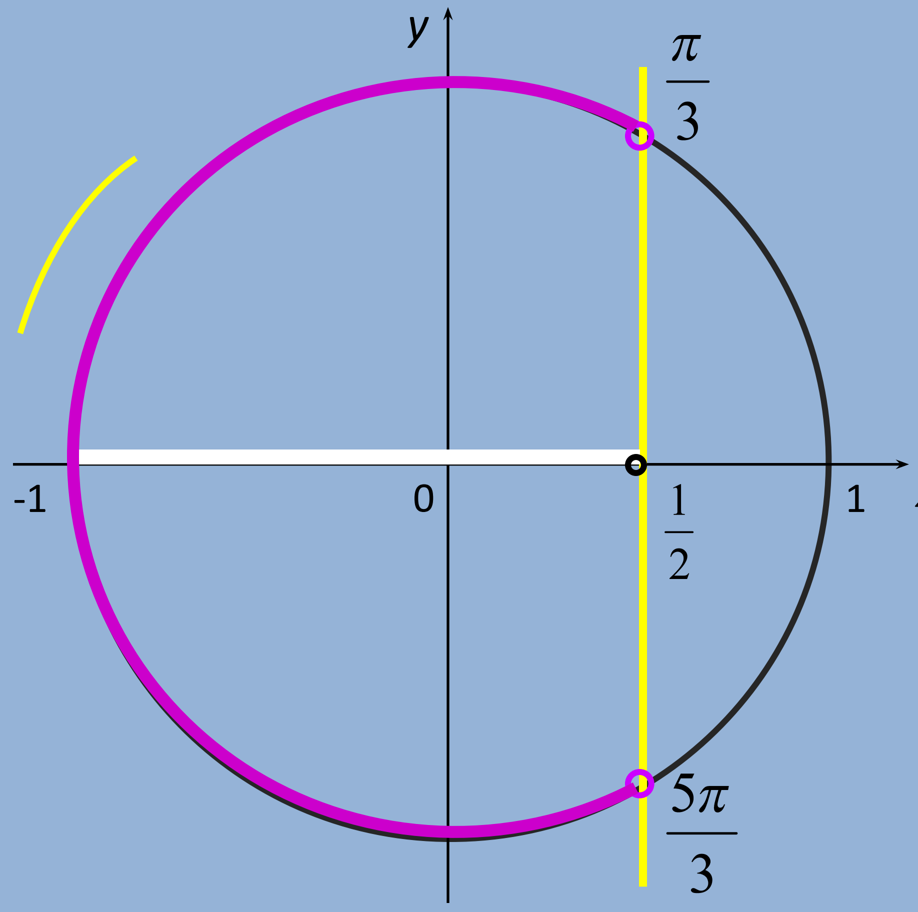
г) $\operatorname{tg} t \leq 1$;

решение

3. Решить неравенства:

а) $\cos t < \dfrac{1}{2}$;

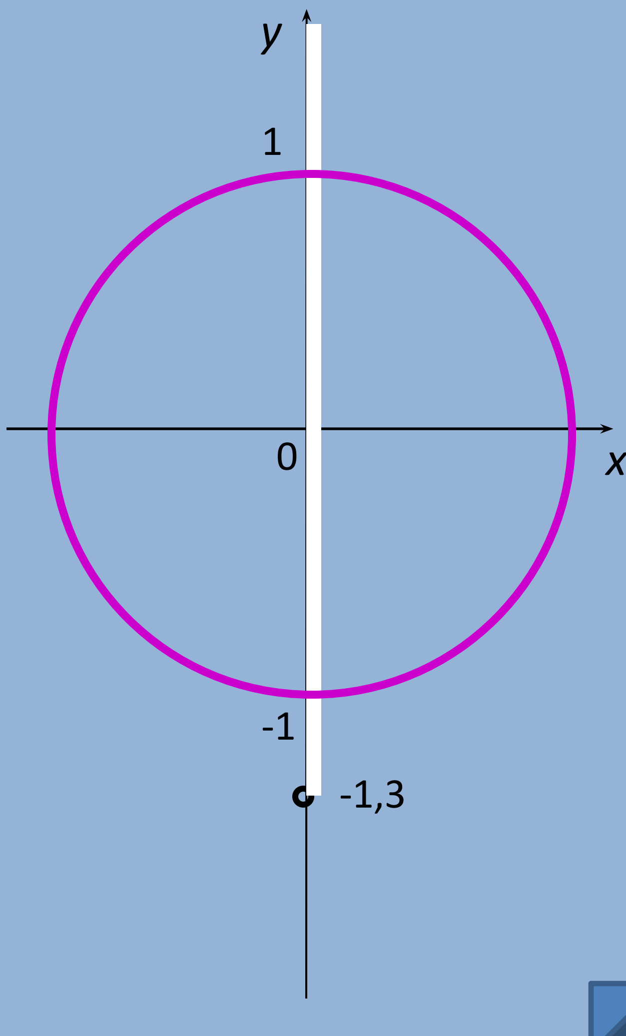
$$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi \kappa\right), \kappa \in Z$$



3. Решить неравенства:

б) sin t > - 1,3;

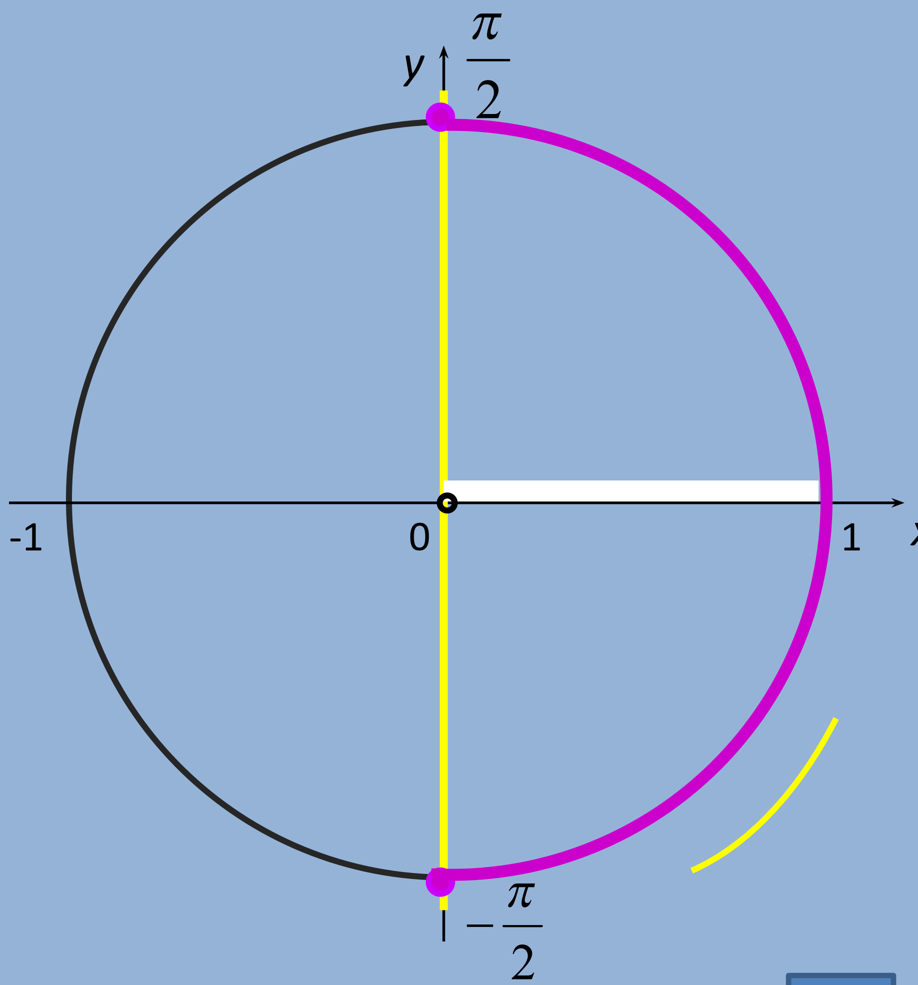
$$t \in R$$



3. Решить неравенства:

в) cos t ≥ 0;

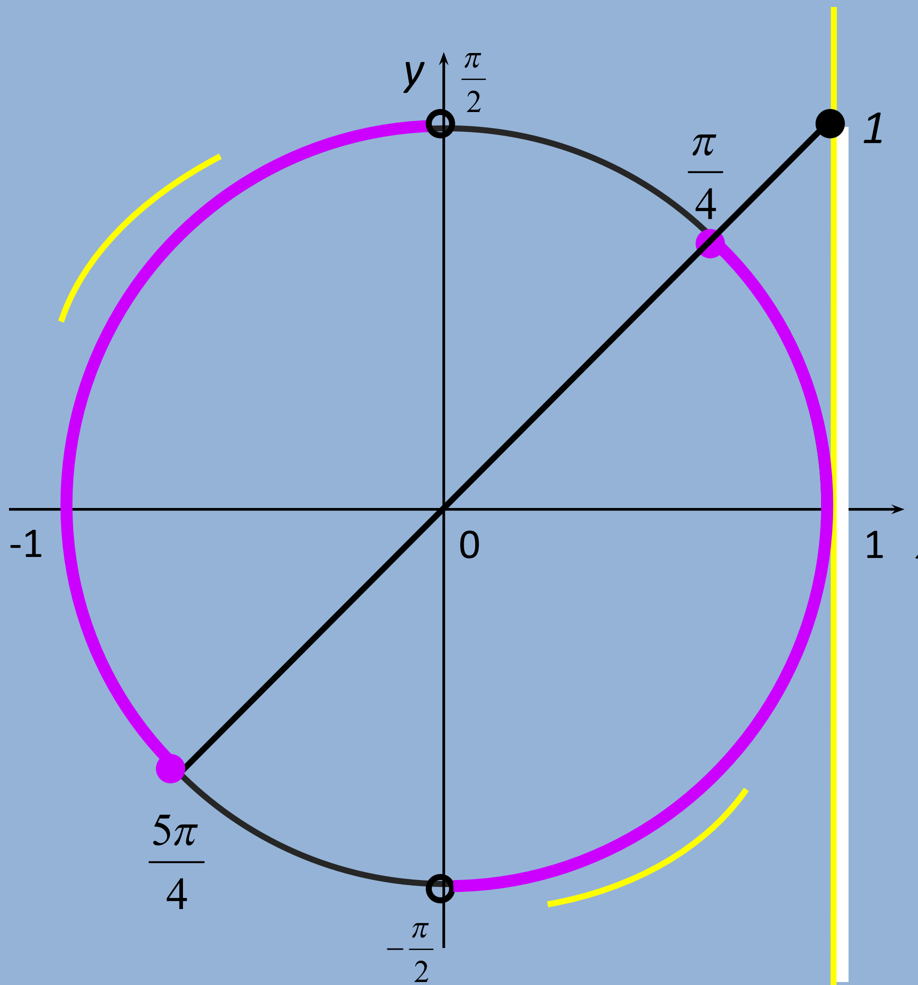
$$t \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \kappa], \kappa \in Z$$



3. Решить неравенства:

г) tg t ≤ 1

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z$$



1. Назовите основные методы решения тригонометрических уравнений

- Введение новой переменной.
- Разложение на множители.
- Деление обеих частей уравнения на $\cos(mx)$ для однородных уравнений первой степени.
- Деление обеих частей уравнения на $\cos^2(mx)$ для однородных уравнений второй степени.

№2. Решите уравнение

а) $\sin^2 x + 4\cos x = 2{,}75;$

решение

б) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4;$

решение

в) $2 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0;$

решение

г) $5 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = 2.$

решение

а) $\sin^2 x + 4\cos x = 2{,}75;$

$1 - \cos^2 x + 4\cos x = 2{,}75;$

Пусть $\cos x = t$, $|t| \le 1$, тогда

$t^2 - 4t + 1{,}75 = 0;$

$D = 16 - 4 \cdot 1{,}75 = 16 - 7 = 9;$

$$t = \frac{-(-4) \pm 3}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2}, \\ t = 3{,}5; \end{array}\right.$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\textit{Ответ}: \{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \,/\, k \in Z\}$$

б) tg x + 3ctg x = 4;

$$tgx + \frac{3}{tgx} = 4;$$

Пусть tg x = t, тогда

$t^2 - 4t + 3 = 0;$

По свойству коэффициентов квадратного уравнения (a+b+c = 0):

$$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 3; \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = 3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x = arctg3 + \pi n, n \in Z; \end{array}\right.$$

$$Ответ: \{\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad arctg3 + \pi n / k, n \in Z\}$$

в) $2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$;

$\cos x(2\sin x - \cos x) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 2\sin x - \cos x = 0; \quad / : \cos x \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ 2tgx - 1 = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ tgx = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = arctg\dfrac{1}{2} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

$$Ответ: \{\frac{\pi}{2} + \pi k, arctg\frac{1}{2} + \pi n \,/\, k, n \in Z\}$$

г) $5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 2;$

$5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x;$

$3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0;$ $\quad / : \cos^2 x \neq 0$

$3\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 4 = 0;$

Пусть tg x = t, тогда

$3t^2 + t - 4 = 0;$

По свойству коэффициентов квадратного уравнения (a+b+c = 0):

$$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -\dfrac{4}{3}; \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = -\dfrac{4}{3}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x = -arctg\dfrac{4}{3} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

$$Ответ: \{\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$-arctg\frac{4}{3} + \pi n \,/\, k, n \in Z\}$$

№3. Решите неравенство

а) $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$;

решение

б) $\sin x \cdot \cos 3x + \cos x \cdot \sin x > \frac{1}{2}$;

решение

в) $\sin x \geq \cos x$;

решение

г) $\operatorname{tg}^2 x \leq 3$.

решение

а) $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{8}\right) < 0;$

Пусть $t = 2x - \frac{3\pi}{8}$, тогда $\cos t < 0.$

$$t \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \kappa\right), \kappa \in Z$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi \kappa, k \in Z$$

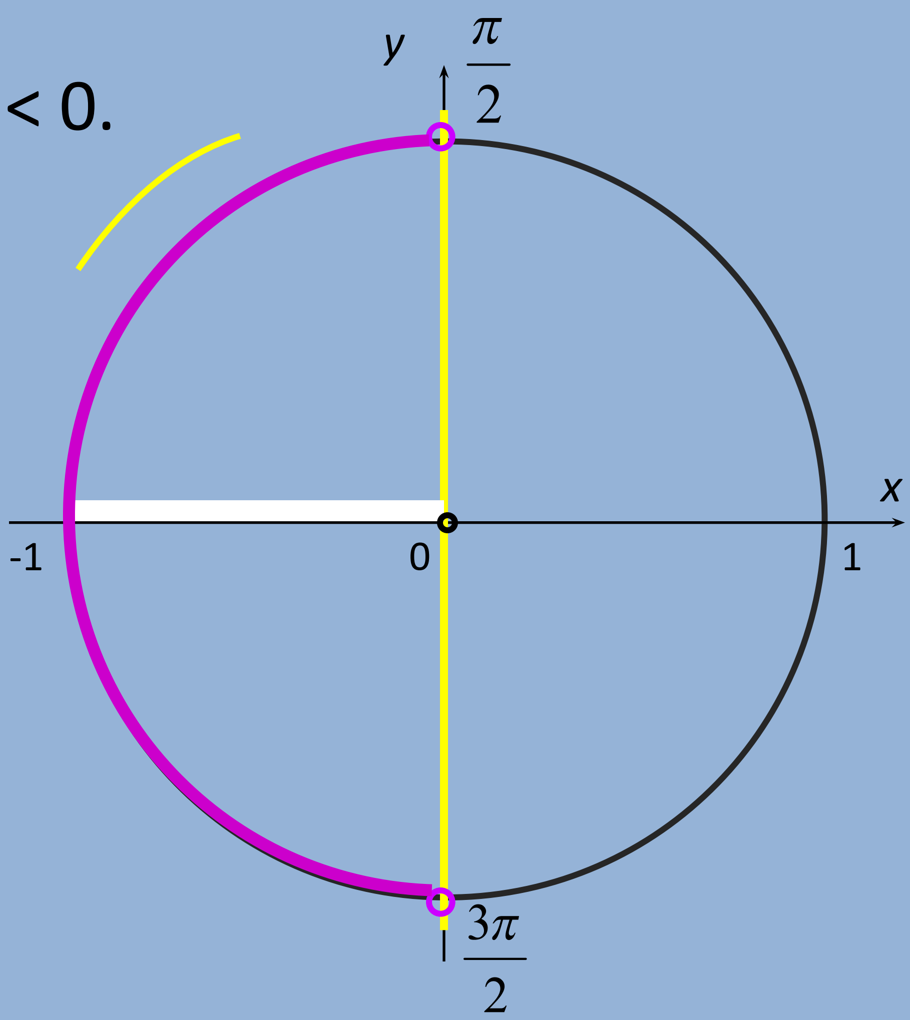
Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x - \frac{3\pi}{8} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi \kappa$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} + 2\pi k < 2x < \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} + 2\pi \kappa$$

$$\frac{7\pi}{8} + 2\pi k < 2x < \frac{15\pi}{8} + 2\pi \kappa \; / : 2$$

$$\frac{7\pi}{16} + \pi k < x < \frac{15\pi}{16} + \pi \kappa, k \in Z$$



$$Ответ: \left(\frac{7\pi}{16} + \pi k; \frac{15\pi}{16} + \pi \kappa\right), \kappa \in Z$$

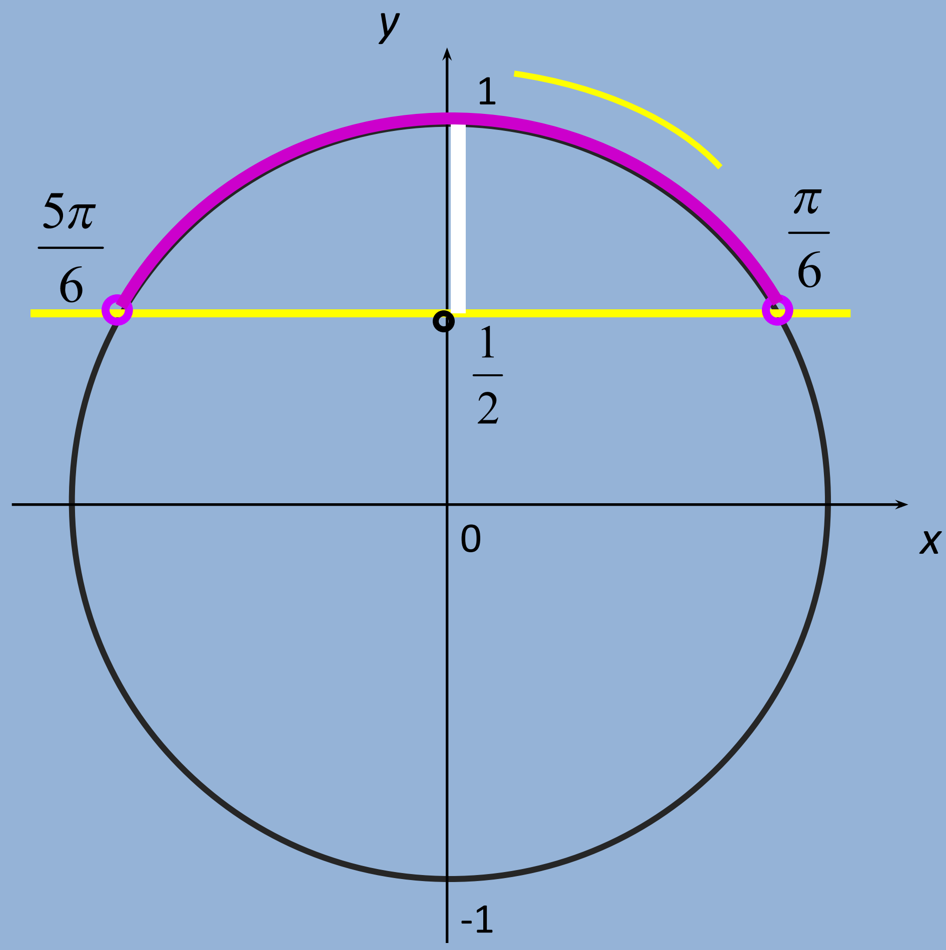
б) sin x · cos3x + cos x ·sin3x > $\frac{1}{2}$;

sin(x + 3x) > $\frac{1}{2}$;

sin4x > $\frac{1}{2}$;

Пусть t = 4x, тогда

sint > $\frac{1}{2}$;



$$t \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi \kappa), \kappa \in Z$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi \kappa, k \in Z$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 4x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi \kappa \;/ : 4$$

$$\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$$

$$Ответ: (\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}; \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}), \kappa \in Z$$

в) sin x ≥ cos x;

1 способ

$\sin x - \cos x \geq 0; \quad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \geq 0;$$

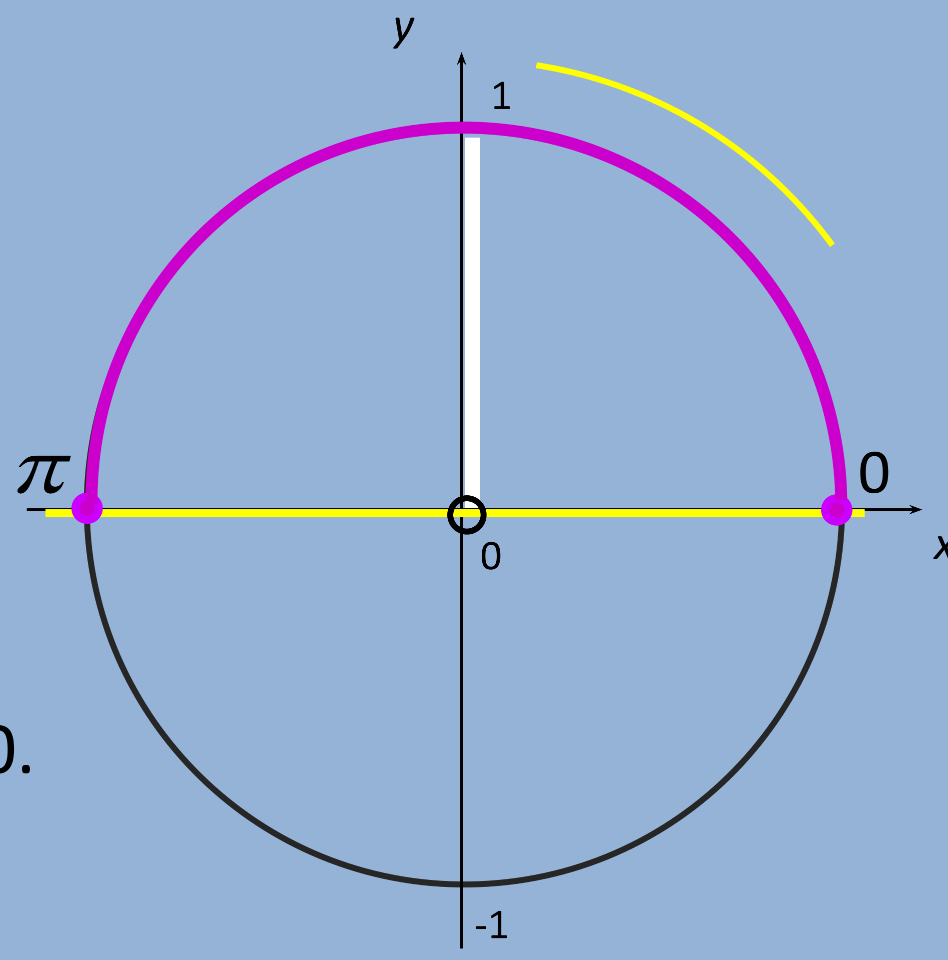
$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x \geq 0;$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) \geq 0;$$

Пусть $t = x - \frac{\pi}{4}$, тогда sin t ≥0.

$$t \in [2\pi k; \pi + 2\pi \kappa], \kappa \in Z$$

$$2\pi k \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2\pi \kappa, \kappa \in Z$$



$$2\pi k \le x - \frac{\pi}{4} \le \pi + 2\pi k; \quad / + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$\textit{Ответ}: [\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi \kappa], \kappa \in Z$$

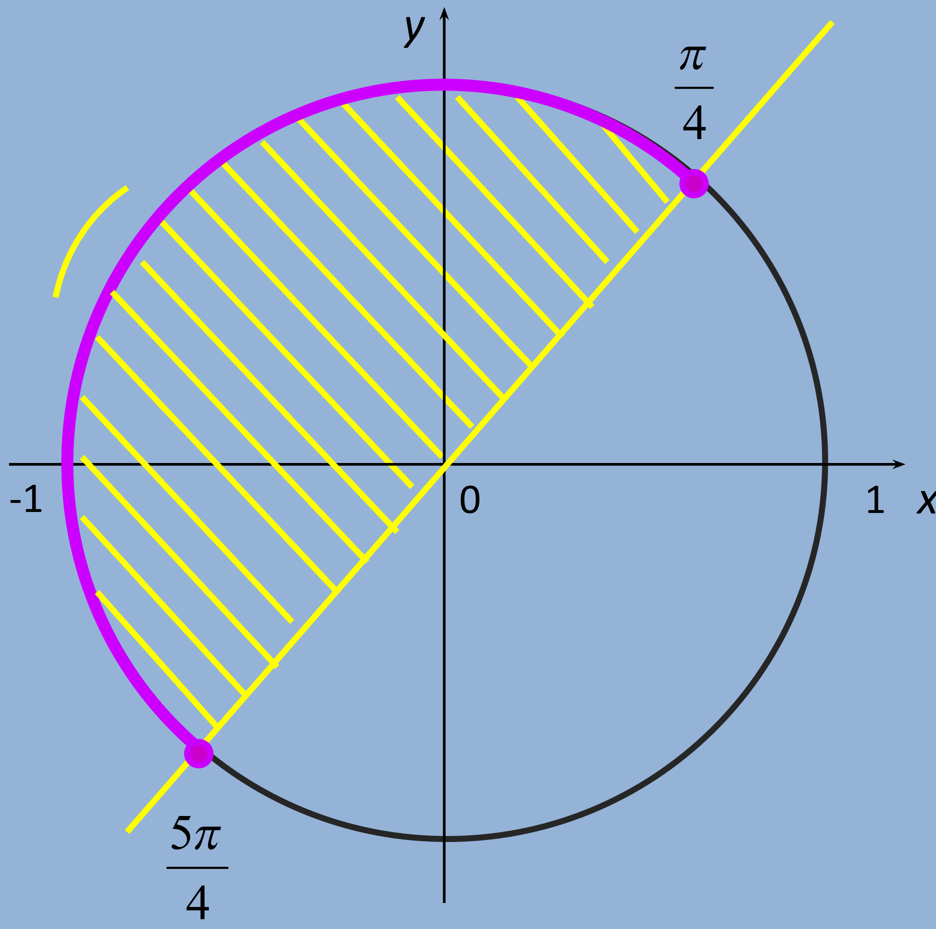
2 способ

в) sin x ≥ cos x;

Проведём прямую, удовлетворяющую условию:
sin x = cos x.

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

$$Ответ: [\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi \kappa], \kappa \in Z$$



г) $\text{tg}^2 x \leq 3$;

$|tgx| \leq \sqrt{3}$;

$-\sqrt{3} \leq tgx \leq \sqrt{3}$;

$x \in [-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi \kappa], \kappa \in Z$

$Ответ: [-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi \kappa], \kappa \in Z$