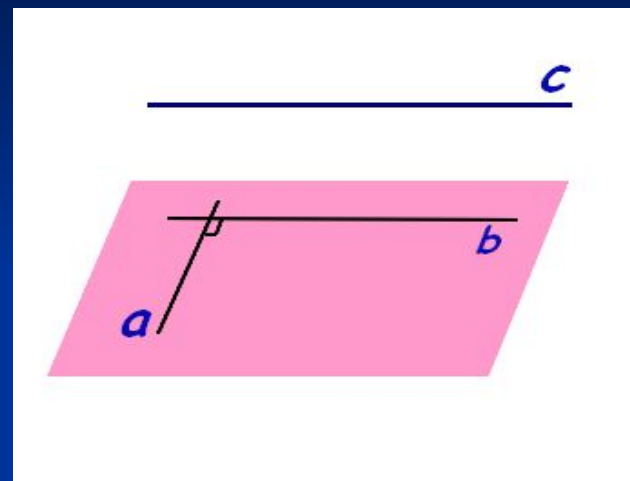


Перпендикулярность прямой и плоскости

Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° . Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: $a \perp b$. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.



На этом рисунке перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые a и c скрещивающиеся

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к этой прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой

Дано: $a \parallel b$ и $a \perp c$.

Доказать: $b \perp c$.

Доказательство:

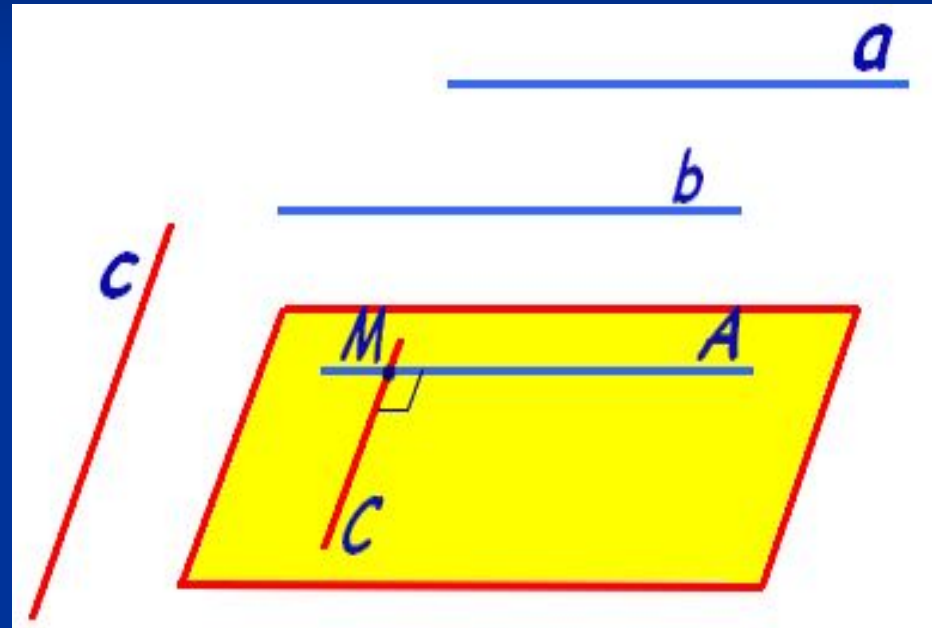
Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведём прямые a и c . Т.к. $a \perp c$, то $\angle AMC = 90^\circ$

Т.к. $a \parallel b$, $a \parallel MA$, то $b \parallel MA$.

Итак, $b \parallel MA$, $c \parallel MC$,

$\angle AMC = 90^\circ$, т. е. $b \perp c$.

Лемма доказана.



Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так:

$$a \perp \alpha.$$

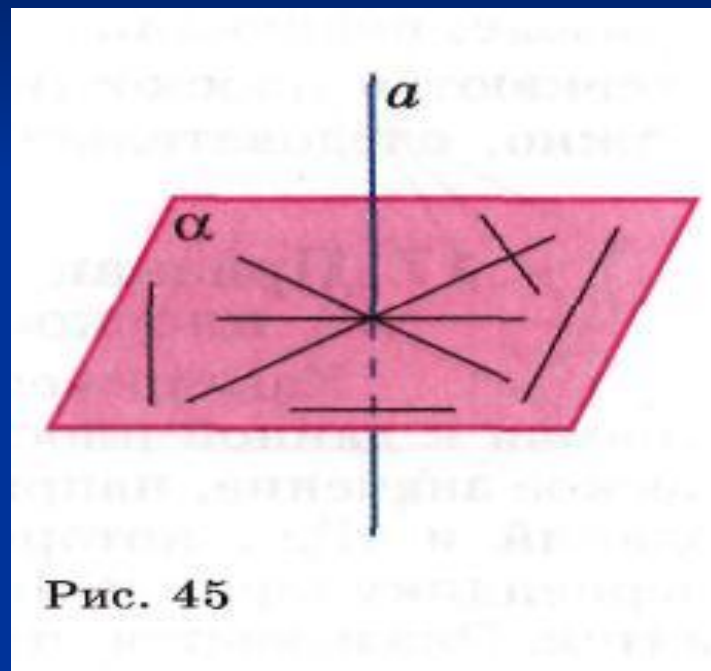


Рис. 45

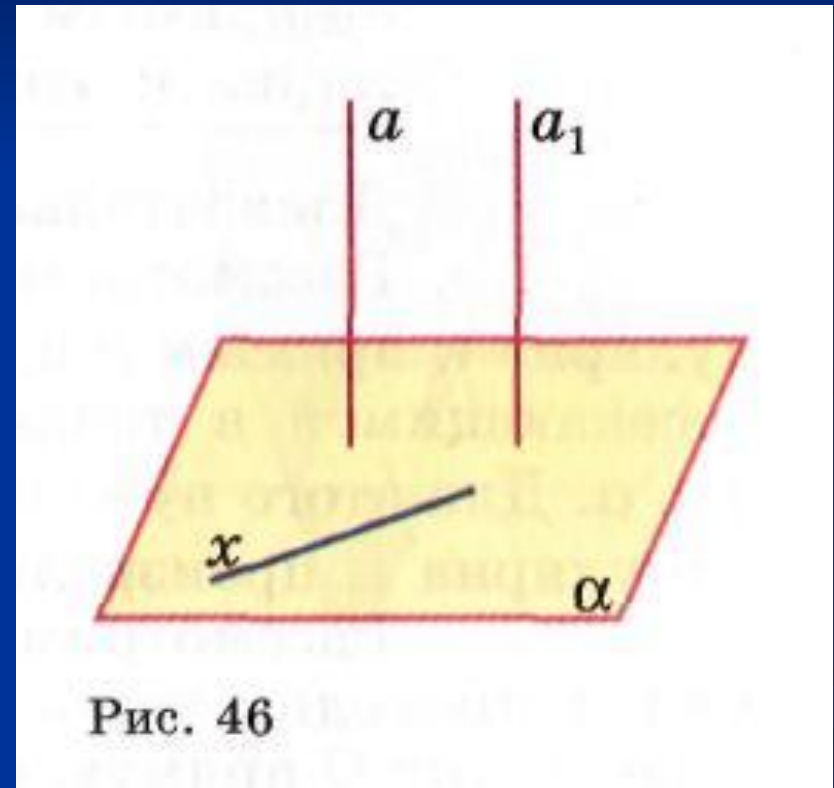
Теорема: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Дано: $a \parallel a_1$, $a \perp \alpha$.

Доказать: $a_1 \perp \alpha$

Доказательство:

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α . Так как a перпендикулярна α , то a перпендикулярна x . По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей a_1 перпендикулярна x . Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α , т. е. a_1 перпендикулярна α . Теорема доказана.



Теорема: Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Дано: $a \perp \alpha, b \perp \alpha$ (а)

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство:

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1 , параллельную прямой a . По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b . Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β , содержащей прямые b и b_1 , через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c , по которой пересекаются плоскости α и β (б). Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана.

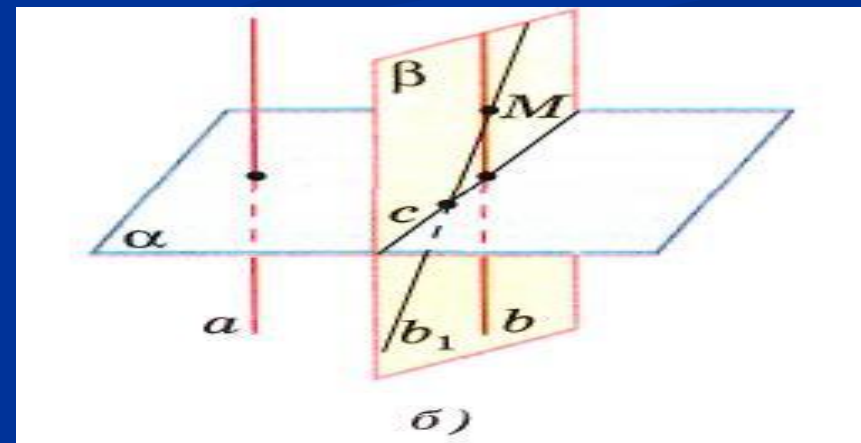
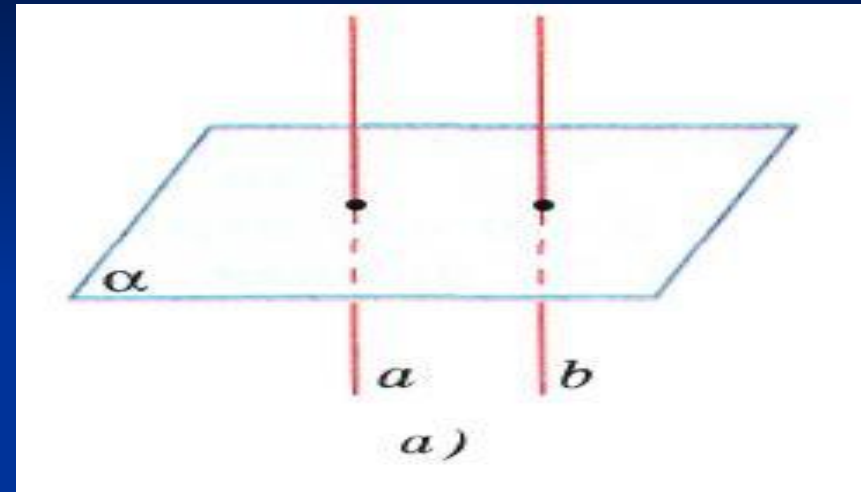


Рис. 47

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема: Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Дано: $a \perp p$, $a \perp q$, p и q лежат в плоскости α .

$p \cap q = O$. Доказать: $a \perp \alpha$

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда прямая a проходит через т. O (рис. а).

Проведём через т. O прямую l , параллельную прямой m .

Отметим на прямой a точки A и B , чтобы $AO=OB$, и проведём в плоскости α прямую, пересекающие прямые p , q , и l соответственно в т. P , Q , и L .

Т.к. p и q – серединные перпендикуляры к отрезку AB , то $AP=BP$ и $AQ=BQ$. Следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по трём сторонам, поэтому углы APQ и BPQ равны

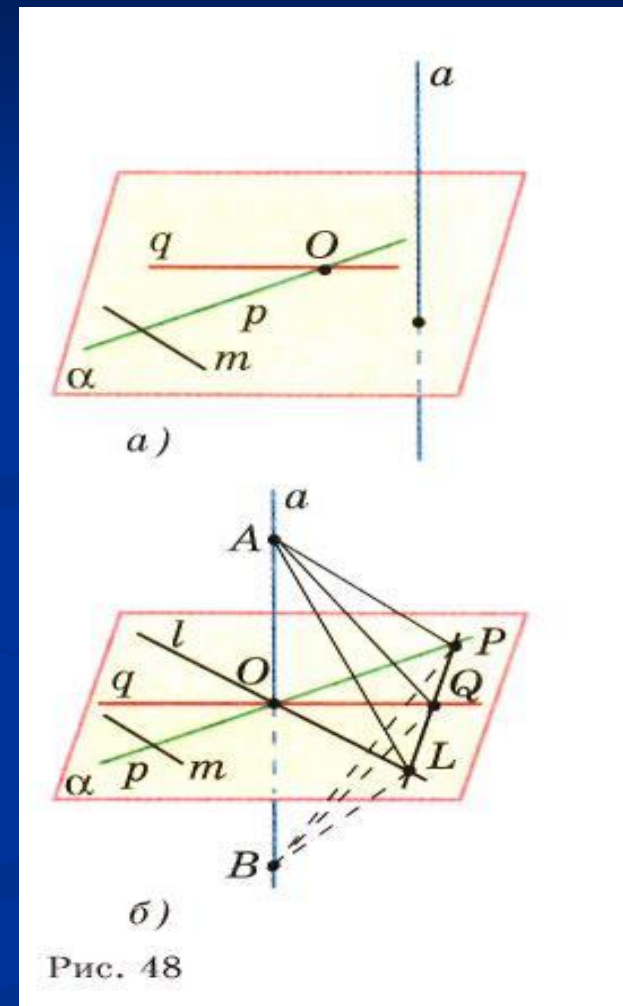
$\triangle APL = \triangle BPL$, поэтому $AL=BL$. Следовательно $\triangle ABL$ – равнобедренный и $l \perp a$. Т.к. $l \parallel m$, $l \perp a$, то $m \perp a$. Итак $a \perp \alpha$.

Рассмотрим случай, когда прямая a не проходит через т. O .

Проведём через т. O прямую a_1 , $a_1 \parallel a$. По лемме

$a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому $a_1 \perp \alpha$. Отсюда, $a \perp \alpha$.

Теорема доказана.



Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Теорема: Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости и притом только одна.

Доказательство: Данную плоскость обозначим α , а произвольную точку пространства — буквой M . **Докажем:** 1) через точку M проходит прямая, перпендикулярная к плоскости α ; 2) такая прямая только одна.

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую a и рассмотрим плоскость β , проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a . Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β . В плоскости β через точку M проведем прямую c , перпендикулярную к прямой b . Прямая c и есть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α , т.к. перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($c \perp b$ по построению и $c \perp a$, так как $\beta \perp \alpha$).

2) Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая (обозначим ее через c_1), перпендикулярная к плоскости α . Тогда $c_1 \parallel c$, что невозможно, т.к. прямые c_1 и c пересекаются в точке M . Т.о., через точку M проходит только одна прямая, перпендикулярная плоскости α . Теорема доказана.

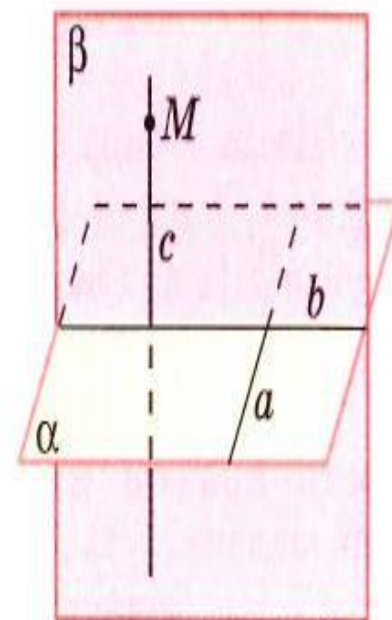


Рис. 50