

Тригонометрические уравнения и неравенства

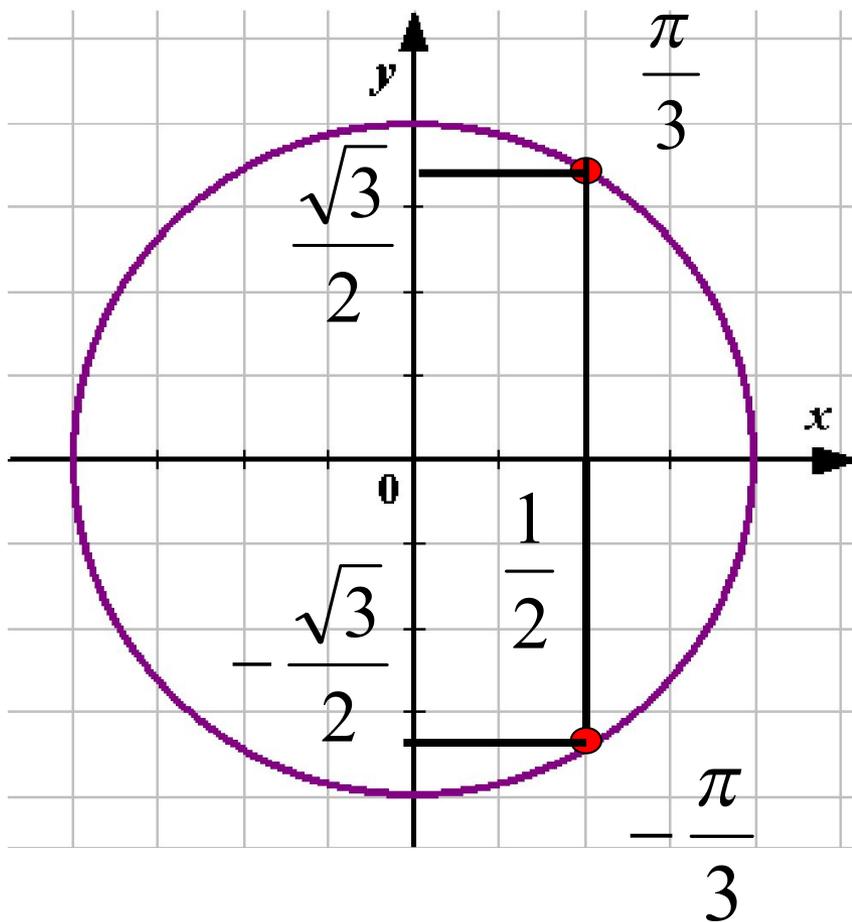


Решение простейших тригонометрических уравнений.

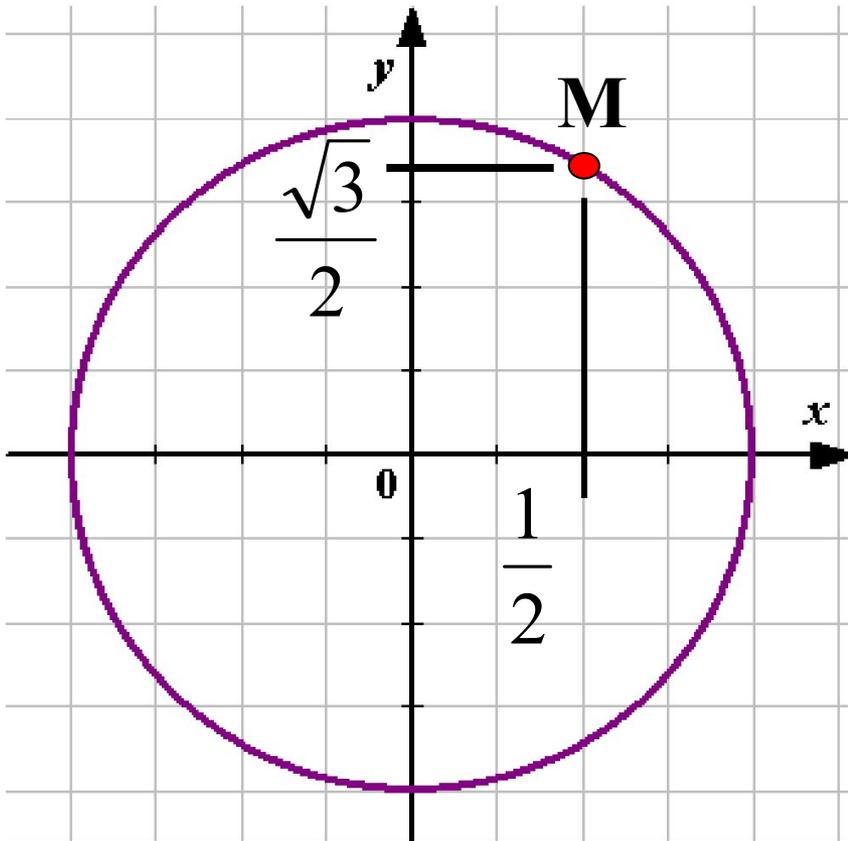
Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения нужно

- 1) уметь отмечать точки на числовой окружности;**
- 2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;**
- 3) знать свойства основных тригонометрических функций;**
- 4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.**

1. Найти координаты точки M , лежащей на единичной окружности и соответствующей числу



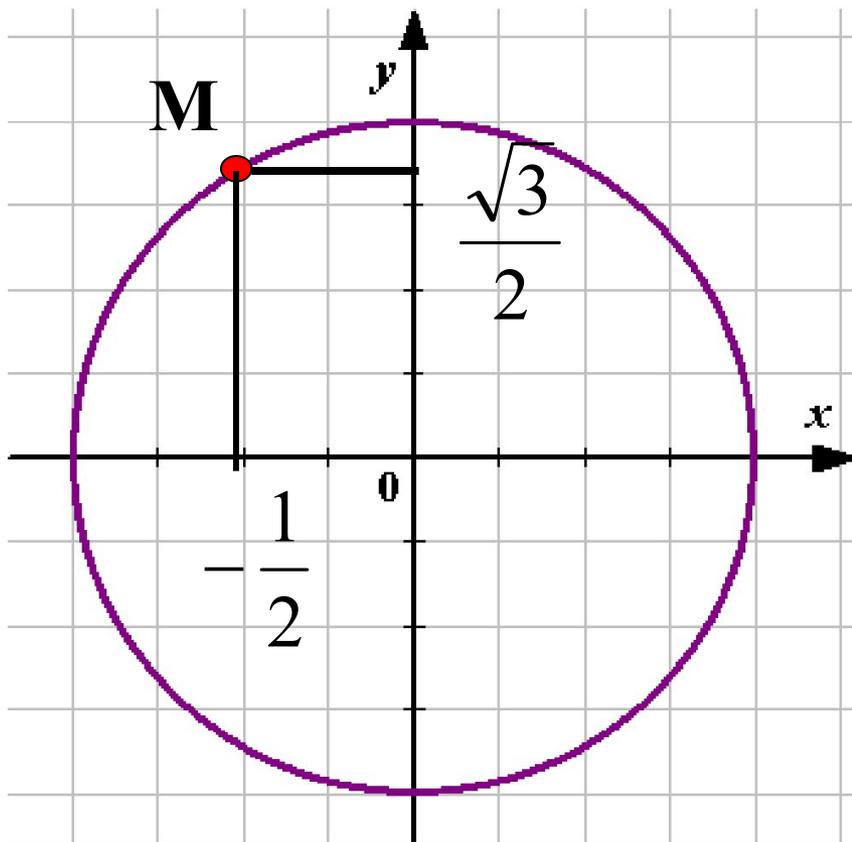
**2. Дана точка M с абсциссой $\frac{1}{2}$.
Найдите ординату этой точки;
укажите три угла поворота, в
результате которых начальная точка
($0;0$) переходит в точку M**



$$\frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$$

**2. Дана точка M с абсциссой $-1/2$.
Найдите ординату этой точки;
укажите три угла поворота, в
результате которых начальная точка
 $(0;0)$ переходит в точку M**

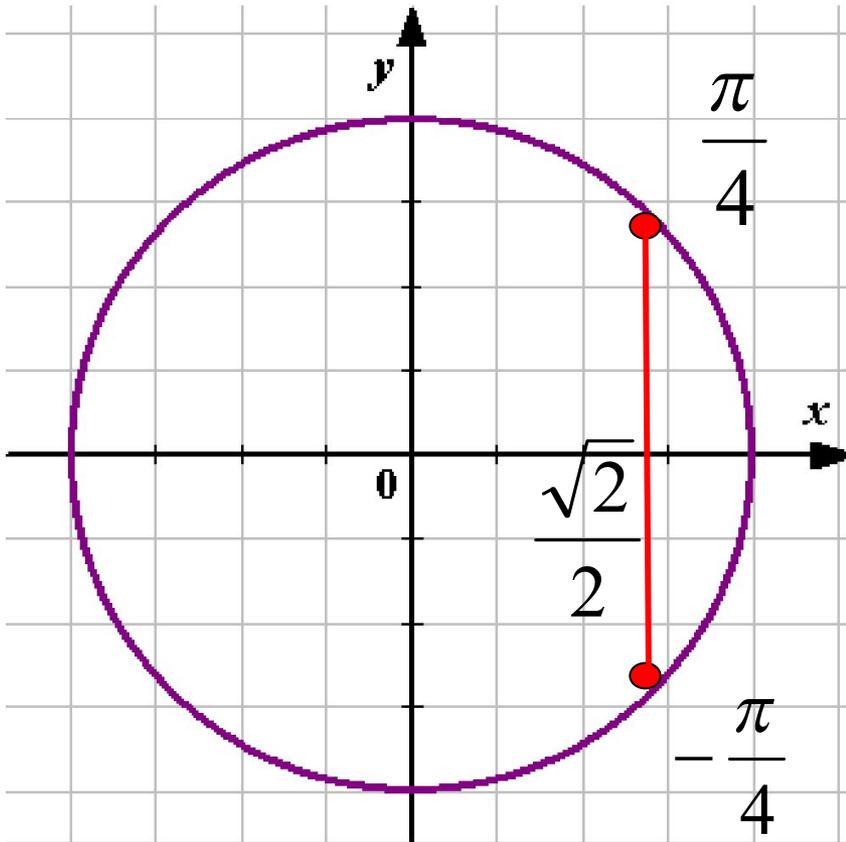


$$\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} + 8\pi = \frac{26\pi}{3}$$

Решите уравнение

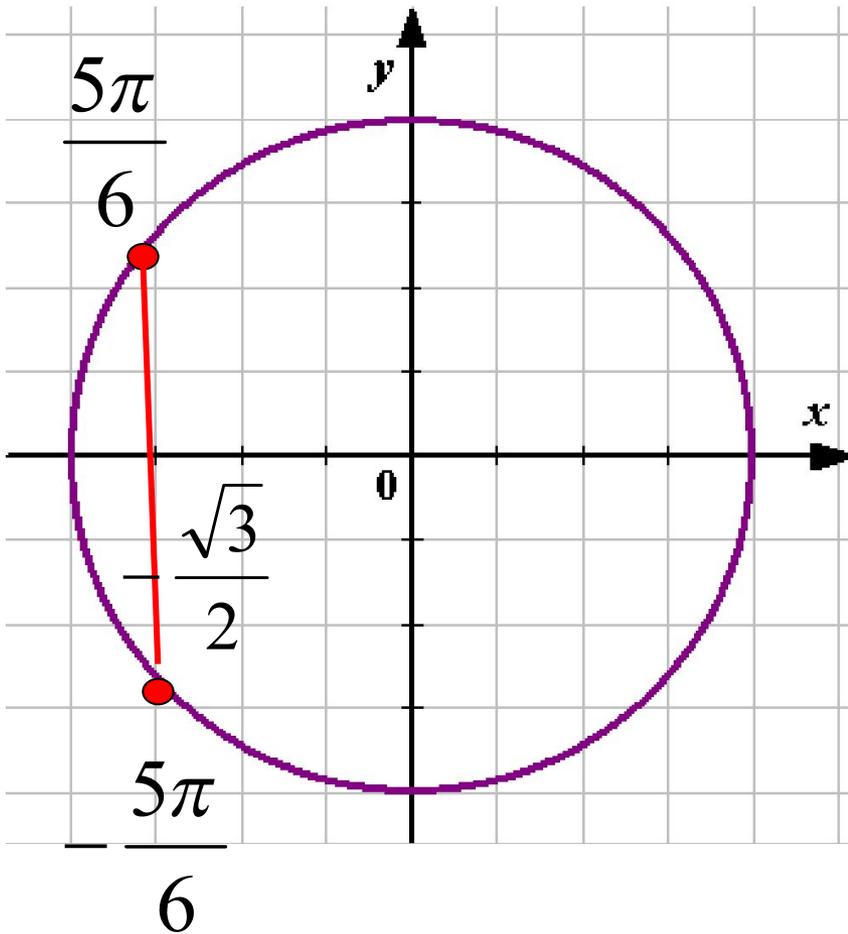


$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение

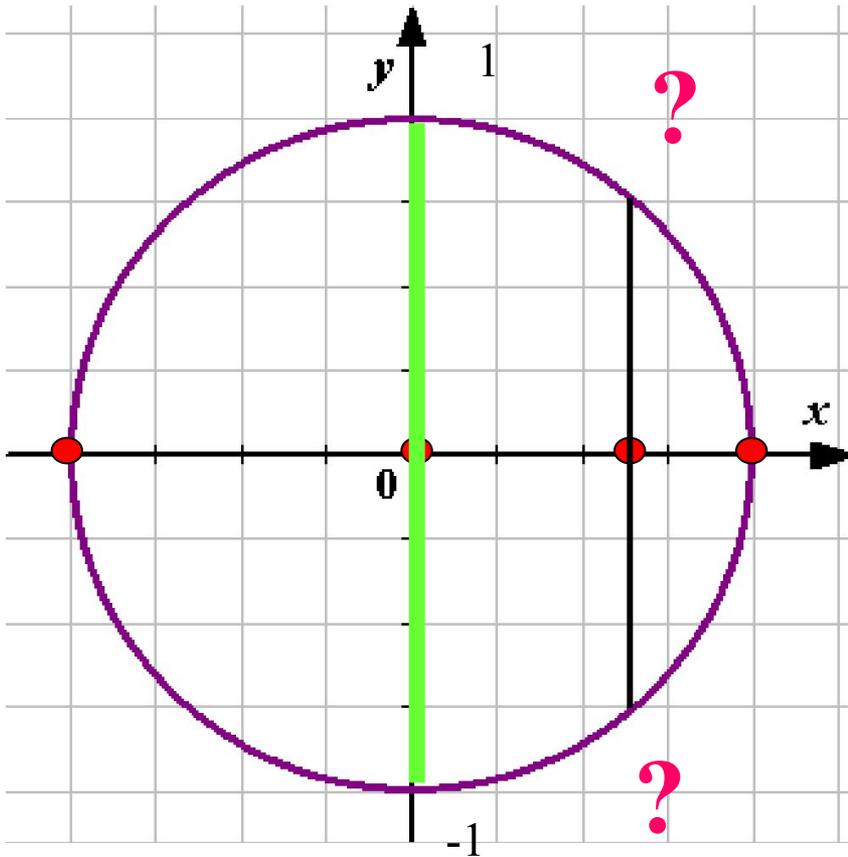


$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение



$$\cos x = 1$$

$$\cos x = -1$$

$$\cos x = 0$$

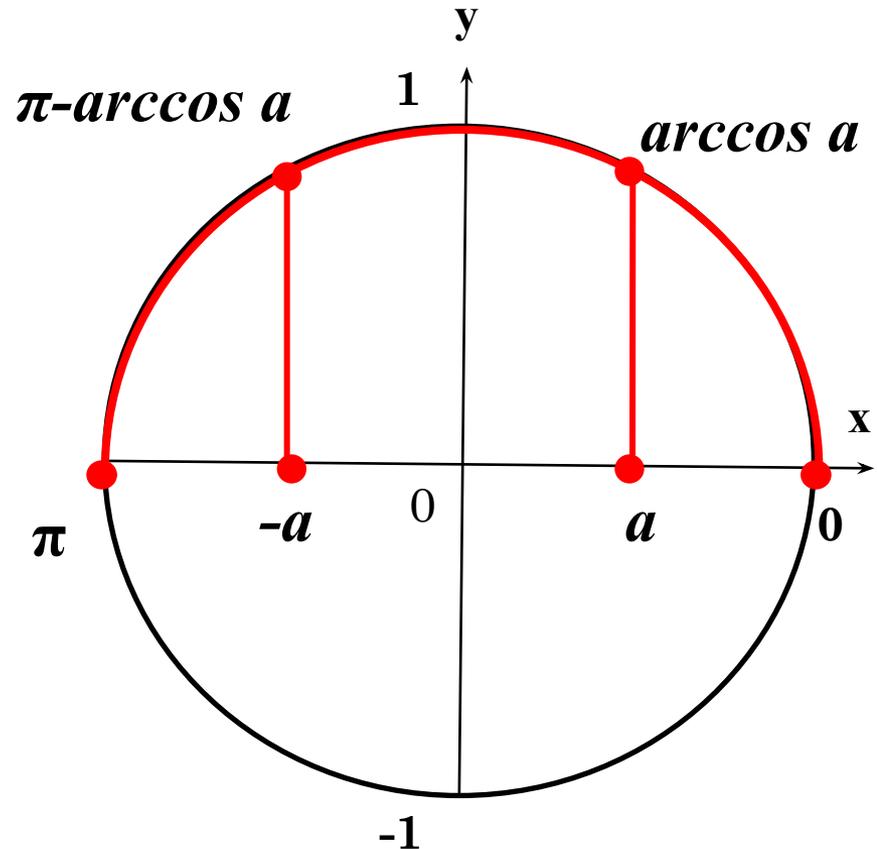
$$\cos x = 1,5$$

$$\cos x = -10$$

$$\cos x = \frac{3}{5}$$

Арккосинус и решение уравнений $\cos x = a$.

Арккосинусом числа a называют такое число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a



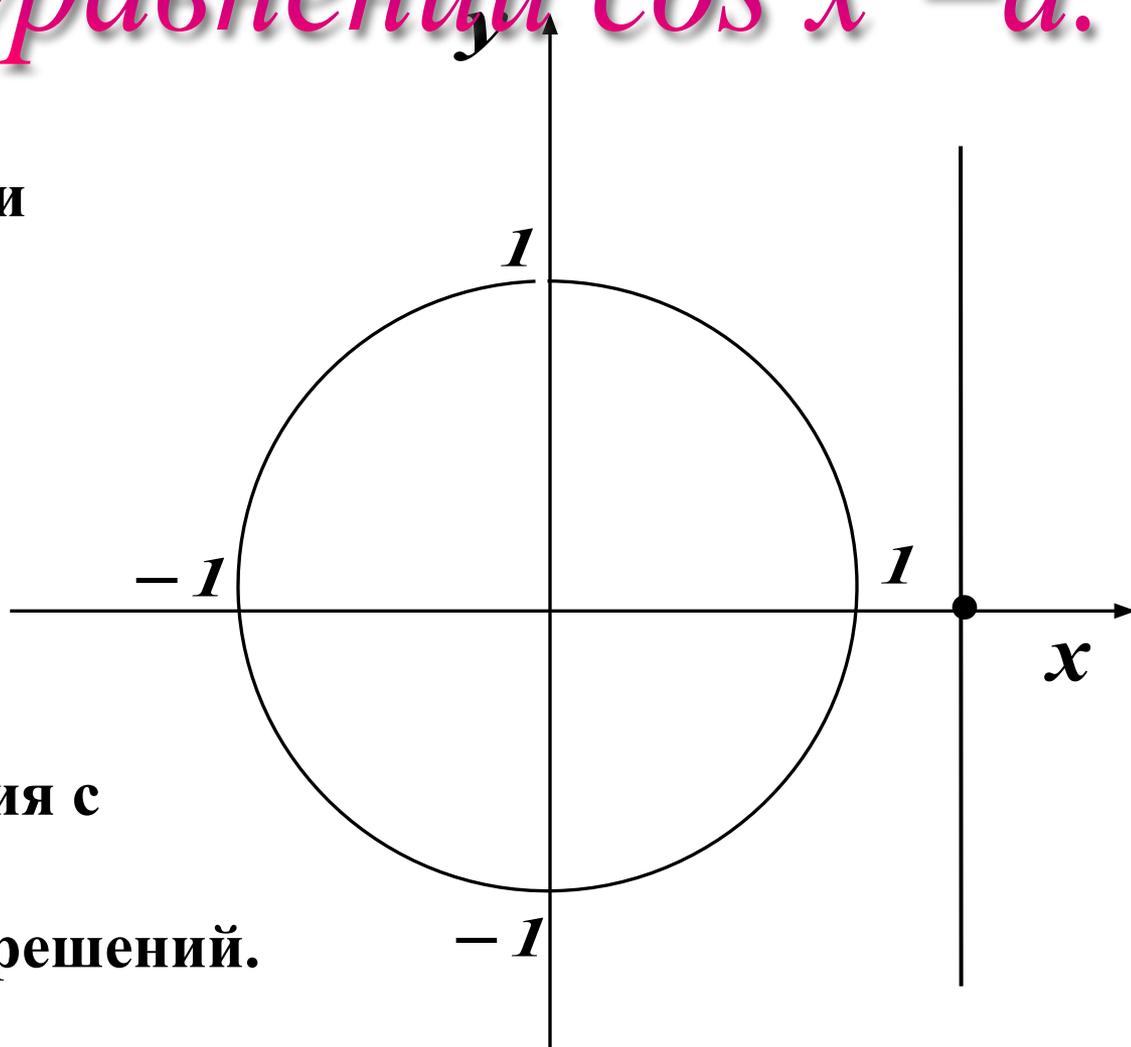
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

$$1) \quad |a| > 1$$

Нет точек пересечения с
окружностью.
Уравнение не имеет решений.



Решение уравнений $\cos x = a$.

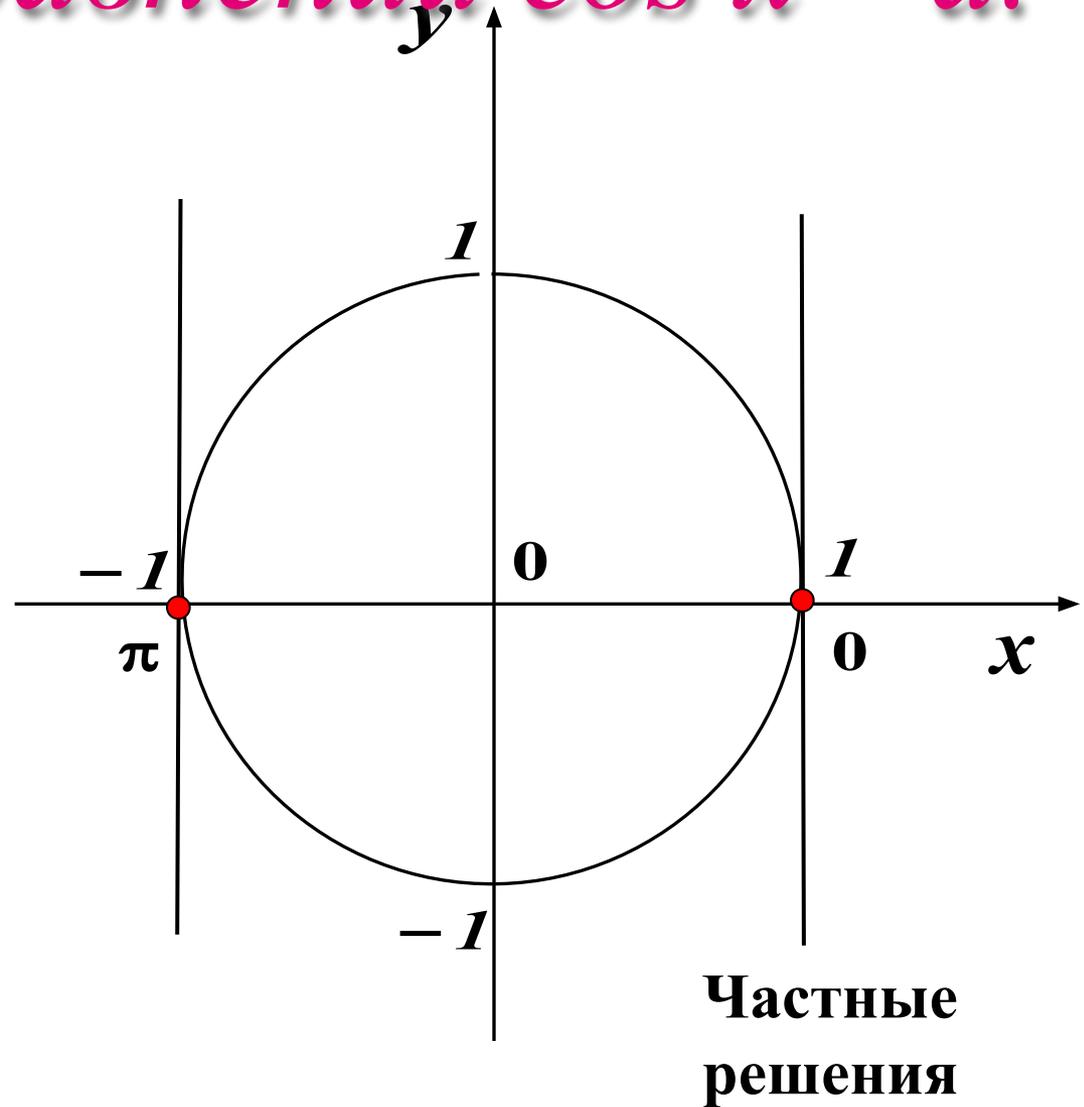
Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

$$2) |a| = 1$$

$$\cos x = 1$$
$$x = 2\pi k$$

$$\cos x = -1$$
$$x = \pi + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

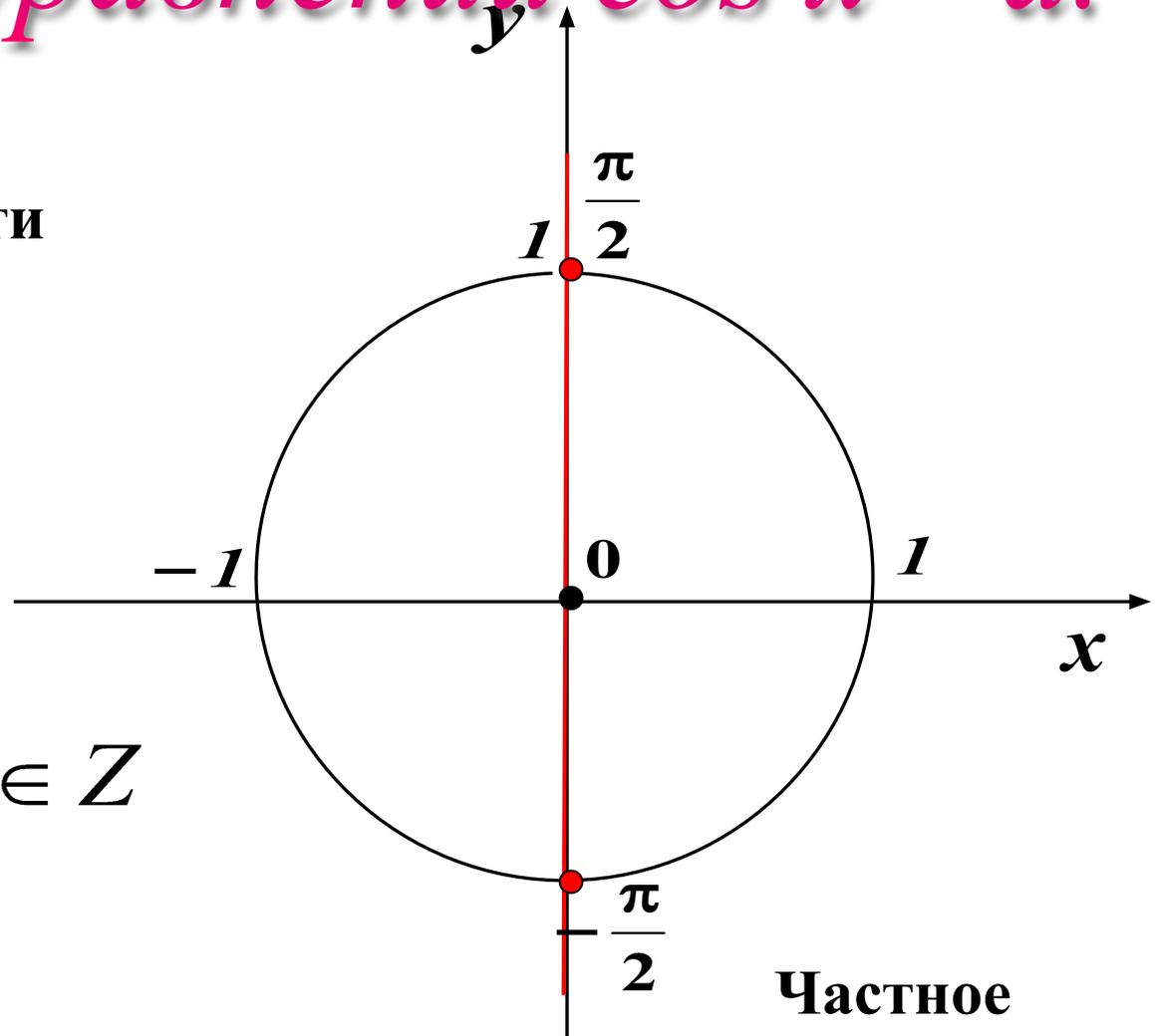


Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

3) $a = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$



Частное
решение

Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

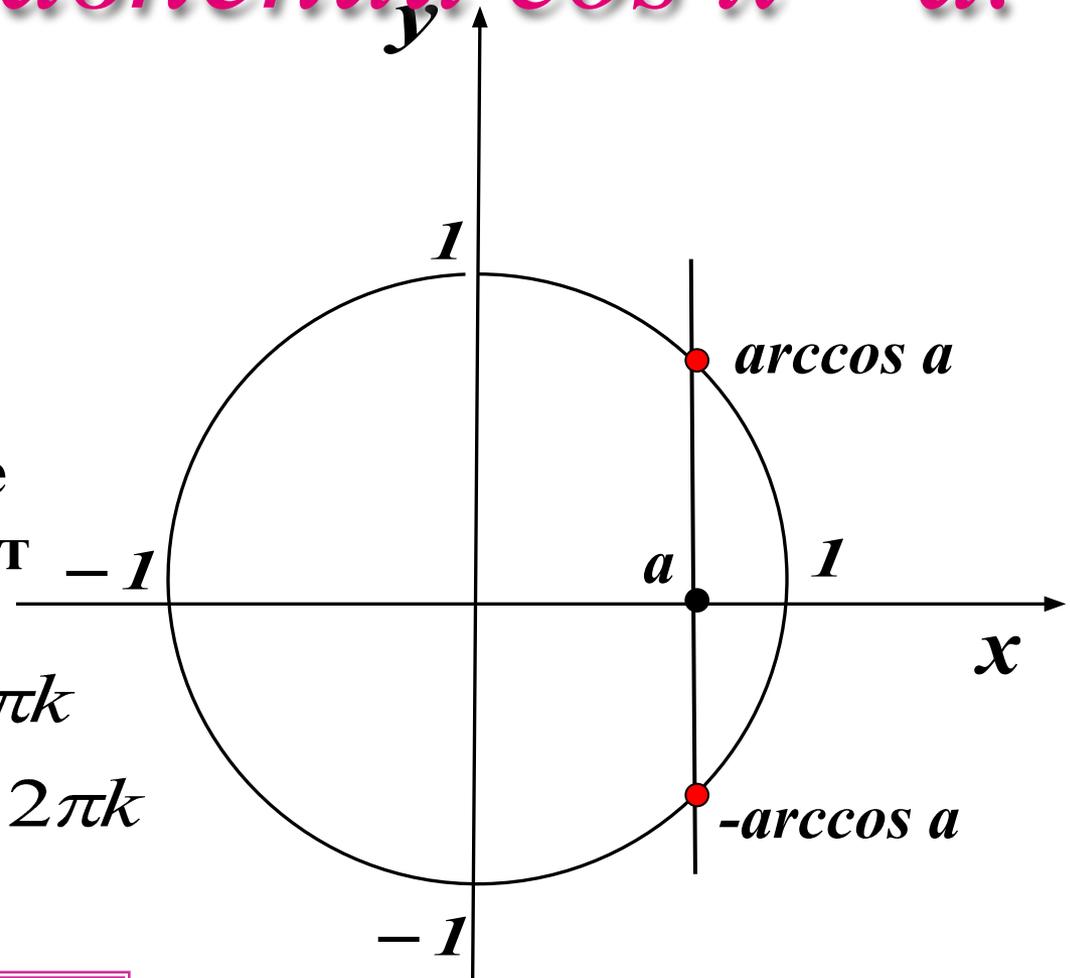
$$4) |a| < 1$$

Корни, симметричные
относительно Ox могут
быть записаны:

$$x = \begin{cases} \arccos a + 2\pi k \\ -\arccos a + 2\pi k \end{cases}$$

или

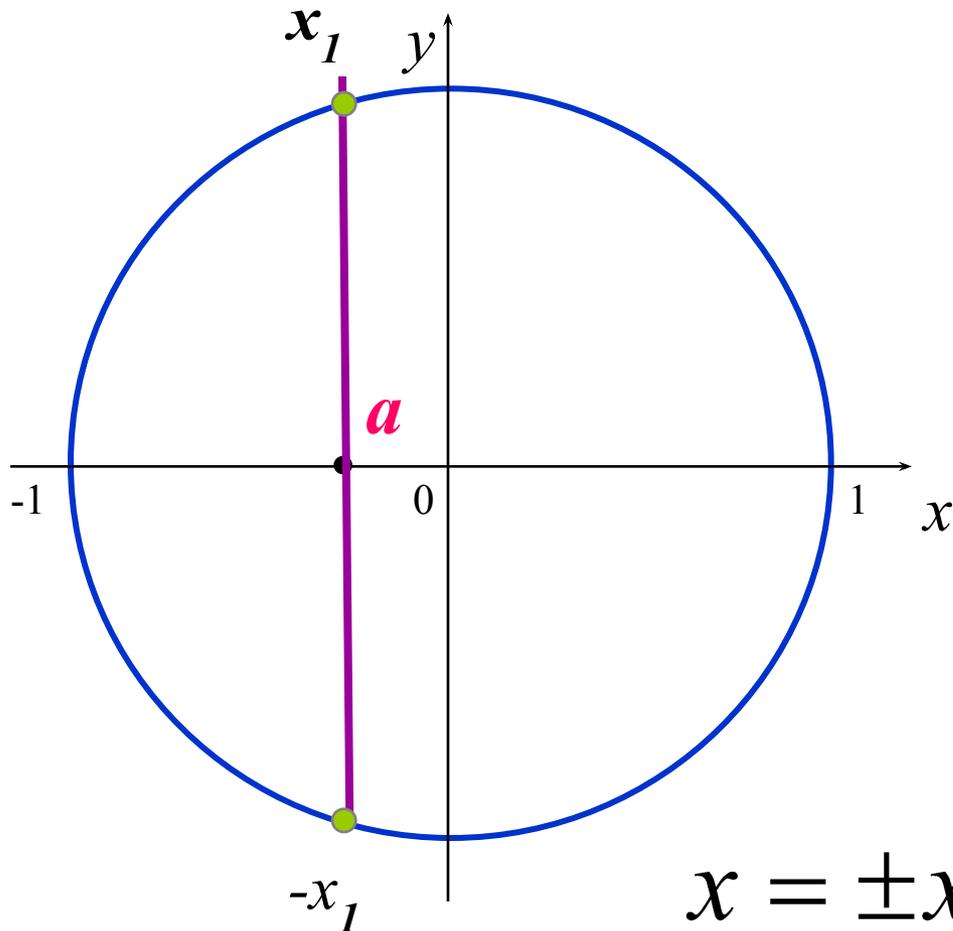
$$x = \pm \arccos a + 2\pi k$$



Общее решение

**Уравнение $\cos x = a$ называется
простейшим тригонометрическим уравнением**

Решается с помощью единичной окружности



1. Проверить условие $|a| \leq 1$
2. Отметить точку a на оси абсцисс (линии косинусов)
3. Провести перпендикуляр из этой точки к окружности
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные числа – решения уравнения $\cos x = a$.
6. Записать общее решение уравнения.

$$x = \pm x_1 + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Подводим итоги

$$\cos x = a$$

При $ a > 1$	Решений нет
$a = 1$ $a = 0$ $a = -1$	Частные решения (единичная окружность!!!)
$-1 < a < 0$ $0 < a < 1$	Общее решение $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Решение уравнений $\cos x = a$.

1) Имеет ли смысл выражение

$$\arccos \frac{3}{4}$$

$$\arccos(-0,7)$$

$$\arccos \frac{4}{3}$$

2) Может ли ***arccos a*** принимать значение

$$\frac{\pi}{7}$$

$$-\frac{12\pi}{13}$$

$$\frac{13\pi}{12}$$

3) Вычислите

$$\arccos(-1)$$

$$\arccos 2$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\arccos \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arccos(-0,5)$$

$$\arccos \pi$$

Решение уравнений $\cos x = a$.

1. Сколько серий решений имеет уравнение:

$$\cos x = 2$$

$$\cos x + 1 = 2$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$$\cos x = -1$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos x = 0,2$$

$$\cos x = -\frac{4}{3}$$

$$\cos x = 0$$

$$2 \cos x = -3$$

2. Вычислить

$$\arccos \frac{1}{2}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\arccos 0$$

$$\arccos \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arccos(-1)$$

$$\arccos\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\arccos \frac{2\pi}{3}$$

3. Вычислить

$$\cos(\arccos 0.2) =$$

$$\cos(\arccos(-\frac{2}{3})) =$$

$$\cos \cos(\pi + \arccos \frac{3}{4}) =$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{3}) =$$

$$\sin(\arccos \frac{4}{5}) =$$

4. Вычислить

$$5 \arccos\left(\cos \frac{\pi}{10}\right) =$$

$$3 \arccos(\cos 2) =$$

$$\arccos\left(\cos \frac{8\pi}{7}\right) =$$

$$\arccos(\cos 4) =$$

Самостоятельная работа

Вариант 1

а) $\arccos \frac{1}{2}$

б) $\sin(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2})$

а) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

б) $\cos 2x = 0,2$

в) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

г) $2 \cos^2 x = 3$

1. Вычислить

2. Решить уравнение

Вариант 2

а) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

б) $\cos(\arccos 0,6)$

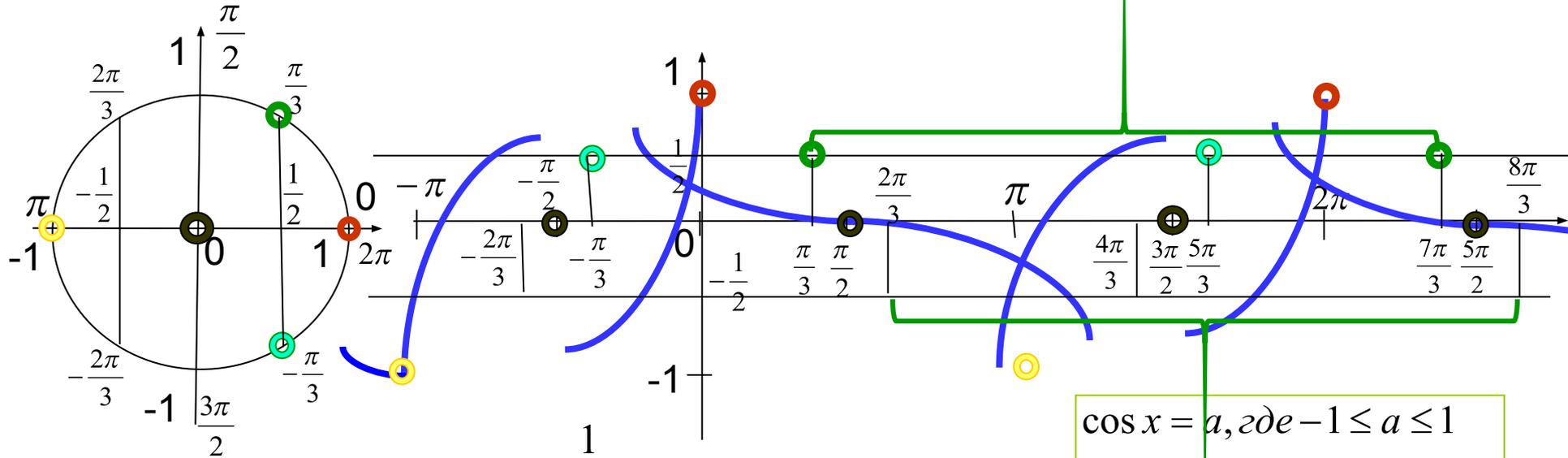
а) $\cos x = \frac{1}{2}$

б) $2 \cos x = 0,3$

в) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1$

г) $\cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x = -1$

Решение уравнения $\cos x = a$



Частные случаи:

1) $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

2) $\cos x = 1$

$$x = 2\pi n$$

3) $\cos x = -1$

$$x = \pi + 2\pi n$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n; \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi n; \\ x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2} \right) + 2\pi n; \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array}$$

$$\cos x = a, \text{ где } -1 \leq a \leq 1$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$