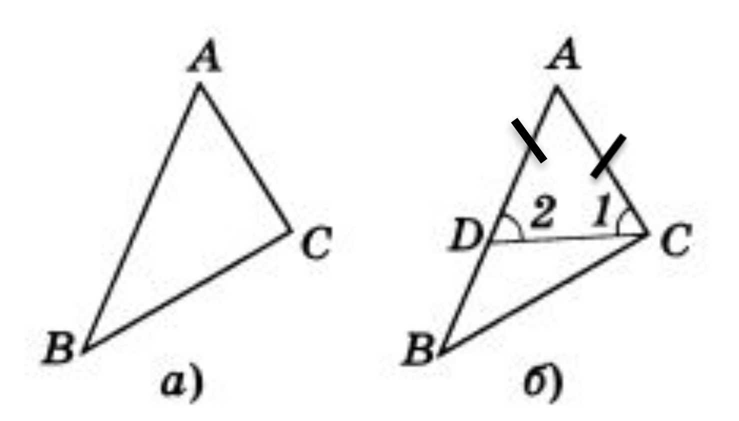
Основные свойства треугольников

Выполнил: Вергаскин Алексей

1. Против большей стороны лежит больший угол

Дано: треугольник ABC, AB > BC.
Доказать: ∠ C > ∠ A.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC **сторона AB больше стороны AC** (рис.1, а)



Докажем, что **∠ C > ∠ B**. Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис.1, б). Так как AD < AB, то точка D лежит между точками A и B.

Следовательно, угол 1 является частью угла C и, значит, **∠ C > ∠ 1**. Угол 2 — внешний угол треугольника BDC при вершине D, поэтому **∠ 2 > Z ∠ B**. Углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, **∠ C > ∠ 1,**

∠ 1 = ∠ 2,

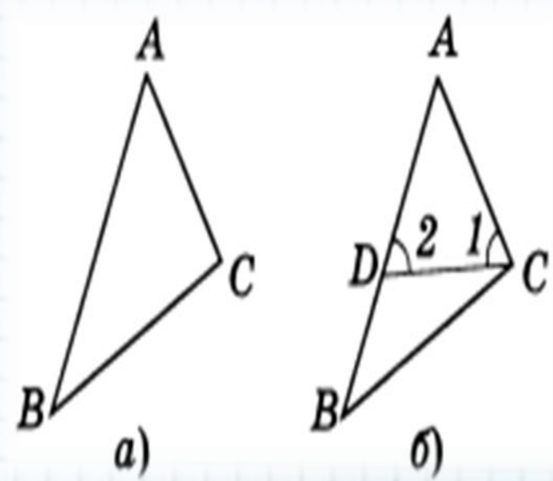
∠ 2 > ∠ B.

Отсюда следует, что ∠ C > ∠ B.

Итак, в треугольнике: против большей стороны лежит больший угол.

2. Против большего угла лежит большая сторона

Дано: треугольник ABC, ∠ C > A.
Доказать: AB > BC.



Доказательство (методом от противного)
1) Предположим, что *AB > BC – неверно*.
Тогда либо AB = BC, либо AB < BC.
2) Если AB = BC, то D ABC – равнобедренный и, значит, ∠ C = ∠ A.
Если AB < BC, то ∠ C < ∠ A по доказанному раньше.
Получили, что ∠ C = ∠ A или ∠ C < ∠ A. И то, и другое противоречит условию теоремы, что ∠ C > ∠ A.
3) Получили противоречие с условием теоремы. Значит предположение, что *«AB > BC – неверно»* - было неверным, значит AB > BC.
Итак, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

3. Против равных углов в треугольнике лежат и равные стороны

Пусть в треугольнике ABC, ∠ A = ∠ C

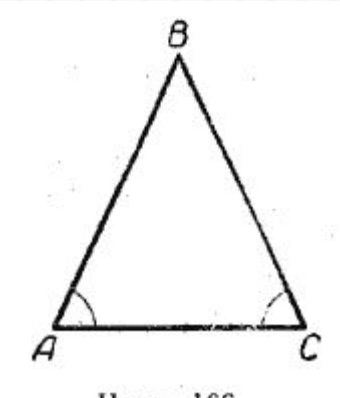
Докажем, что AB = BC, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

Между сторонами AB и BC может быть только одно из тр
следующих соотношений:

1) AB > BC;

2) AB < BC;

3) AB = BC.



Если бы сторона AB была > BC, то ∠ C был бы > A, но это противоречит условию теоремы, следовательно, AB не может быть > BC.

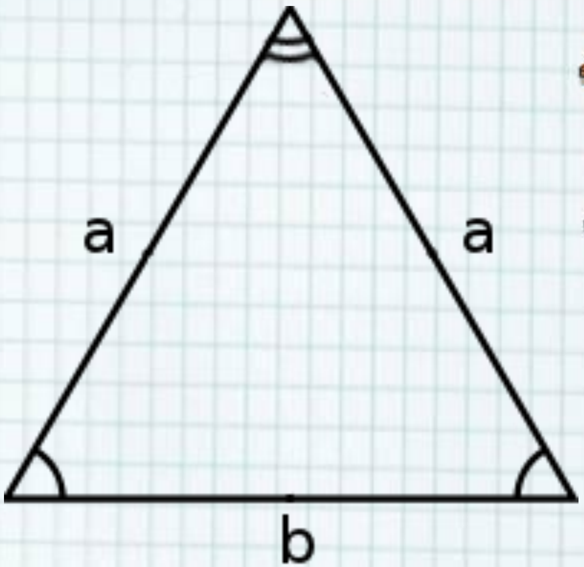
Точно так же AB не может быть < BC, так как в этом случае угол C был бы < A.

Следовательно, возможен только третий случай, т. е. AB = BC

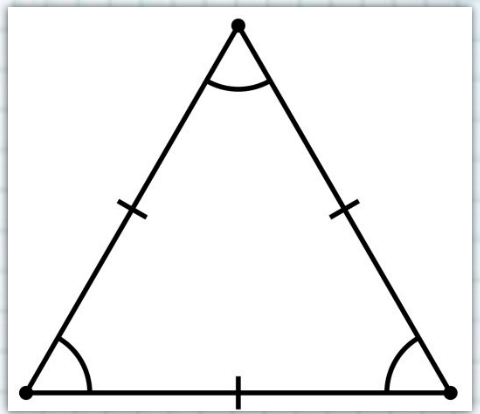
Итак, против равных углов в треугольнике лежат и равные стороны.

Следствие 1.

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный



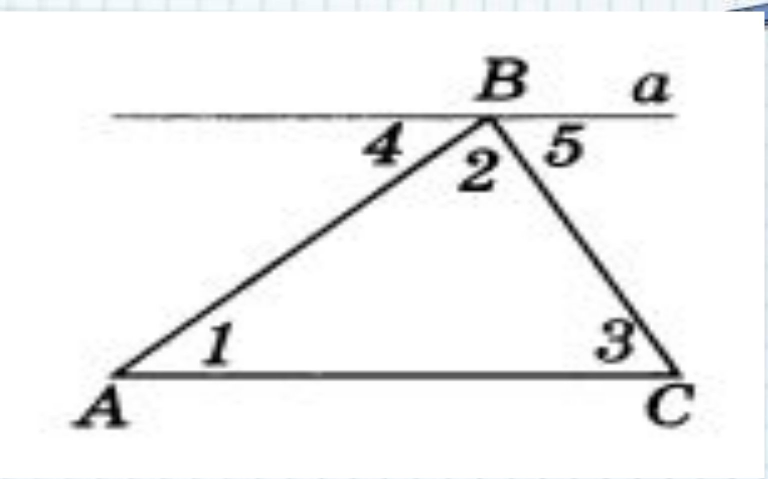
Из *следствия 1* следует, что если три угла треугольника равны, то треугольник равносторонний.



Следствие 2.
В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

4. Сумма углов треугольника равна 180 °

Доказательство.
Рассмотрим произвольный треугольник АВС и докажем, что ∠ A + ∠ B + ∠ C = 180°.



1. Проведем через вершину В прямую а, параллельную стороне АС

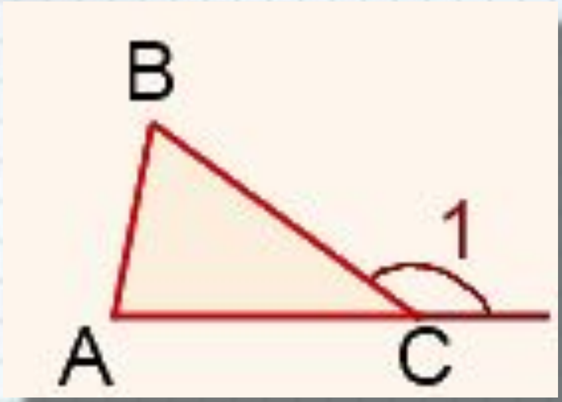
2. Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых а и АС секущей АВ, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей ВС. Поэтому
∠ 4 = ∠ 1, ∠ 5 = ∠ 3.

3. Сумма углов 4, 2 и 5 равна развернутому углу с вершиной В, т. е.
∠ 4 + ∠ 2 + ∠ 5 = 180°.

4. Отсюда, получаем:
∠ l + ∠ 2 + ∠ 3 = 180°, или ∠ A + ∠ B + ∠ C = 180°.

4. Продолжая одну из сторон треугольника, получаем внешний угол

Внешний угол треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника при этой вершине.



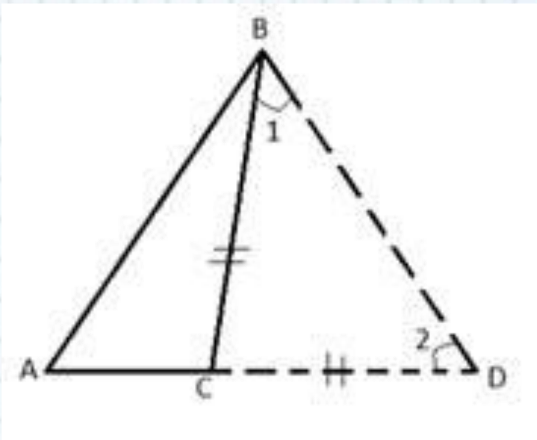
Теорема (о внешнем угле треугольника).
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle 1$ — внешний угол при вершине C.
Доказать: $\angle 1 = \angle A + \angle B$.

Доказательство:
Так как сумма углов треугольника равна 180º, $\angle A + \angle B + \angle C = 180º$.
Следовательно, $\angle C = 180º - (\angle A + \angle B)$.
$\angle 1$ и $\angle C$ ($\angle ACB$) — смежные, поэтому их сумма равна 180º, значит, $\angle 1 = 180º - \angle C = 180º - (180º - (\angle A + \angle B)) = 180º - 180º + (\angle A + \angle B) = \angle A + \angle B$.

5. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон

Дано: ΔABC.
Доказать: $AB<AC+CB$.



Доказательство: Проведём $CD=CB$, $AC+CD=AD$. $\angle 1=\angle 2$. В треугольнике ABD требуется доказать, что $AB<AD$. $\angle 2=\angle 1<\angle ABD$. Пользуясь теоремой о соотношении углов и сторон, $AB<AD=AC+CB$, что и требовалось доказать.

$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

Из теоремы о сумме углов треугольника следует теорема о разности сторон треугольника. **Каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.**

$a > b – c$
$b > a – c$
$c > a – b$