Система учебных задач, направленных на формирование у школьников УУД на уроках математики.

Оздоева Е.Н., учитель математики
ГБОУ СОШ с. Новый Буян,
м.р. Красноярский Самарской обл.

Основная цель образования – переход от преподавания (передачи информации) к учению (овладению компетенцией – потенциалом действия).

Результаты общего образования - **единство** предметного, метапредметного и личностного результатов при условии сохранения здоровья учащихся.

Компетентностно-контекстная модель обучения и воспитания

1 этап – ***осознание структуры изучаемого явления (20%)***
проблемное изложение материала

2 этап – ***осознание генезиса способов деятельности (10%)***
семинар

3 этап – ***самореализация (40%)***
практикум

4 этап – ***рефлексия уровня достижений (30%)***
пред итоговая и итоговая контрольные работы

«Решение показательных уравнений и неравенств»

10 класс

Уравнения вида $\boldsymbol{a^x = b}$ называются **простейшими показательными уравнениями**:

если b $\leq$ 0, то корней нет;

если b > 0, то x = $\boldsymbol{\log_a b}$.

Примеры. $3^x = 9$ $\quad$ $4^x = 5$ $\quad$ $2^x = -4$

$x = \log_3 9$ $\quad$ $x = \log_4 5$ $\quad$ корней нет

$x = 2$

I. Уравнения, сводящиеся к простейшим:

$$\boldsymbol{a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$$

I. Уравнения, сводящиеся к простейшим, путем вынесения за скобки степени с наименьшим показателем.

Примеры:

III. Уравнения, сводящиеся к квадратным:

$$\mathrm{A}\cdot\left(\mathrm{a}^{\boldsymbol{f(x)}}\right)^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{a}^{\boldsymbol{f(x)}}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}\text{ или}$$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{a}^{\boldsymbol{f(x)}}+\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{a}^{-\boldsymbol{f(x)}}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$$

Решаются путем замены переменной:

$$\mathrm{a}^{\boldsymbol{f(x)}}=\mathrm{y},\quad \mathrm{y}>\boldsymbol{0}.$$

Примеры:

Учитель: Решим уравнение $\mathbf{5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24}$

Докажите, что данное уравнение является уравнением рассматриваемого вида.

Ученики: (вслух произносят признак) т.к. в показателях коэффициенты при переменной x^2 противоположные числа, то это уравнение можно свести к квадратному.

Учитель: Предложите способ сведения к стандартному виду

данного вида уравнения.

Ученики: Сначала по свойству степеней преобразуем 5^{1-x^2} и 5^{1+x^2}, затем путем замены 5^{x^2} на новую переменную перейдем к квадратному уравнению.

Учитель: обобщает все сказанное и просит диктовать поэтапно шаги решения:

IV. Однородные уравнения:

$C \cdot a^{f(x)} + D \cdot b^{f(x)} = 0$ – **однородное уравнение первой степени (сводится к простейшему путем деления обеих частей на** $b^{f(x)} \neq 0$**)**

$C \cdot a^{2f(x)} + D \cdot a^{f(x)} b^{f(x)} + E \cdot b^{2f(x)} = 0$ – **однородное уравнение второй степени (сводится к квадратному путем деления обеих частей на** $b^{2f(x)} \neq 0$**)**

Примеры:

V. Уравнения, решаемые методом разложения на множители.

Такие уравнения путем преобразований приводят к виду $\left(\mathrm{a}^{f(x)} - C\right)\left(b^{f(x)} - D\right) = 0$ и далее применяют стандартный метод (произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю): приравнивают к нулю каждый множитель. Всё сводится к решению двух простейших показательных уравнений.

Пример:

$$\mathbf{6^x + 6 \cdot 25^x - 6 = 5^x \cdot 30^x}$$

$$6^x + 6 \cdot 25^x - 6 - 5^{2x} \cdot 6^x = 0$$

$$(6^x - 6) - 25^x \cdot (6^x - 6) = 0$$

$$(6^x - 6) \cdot (1 - 25^x) = 0$$

$$6^x - 6 = 0 \text{ или } 1 - 25^x = 0$$

$$x = 1 \text{ или } x = 0$$

Ответ: $x = \mathbf{1}$ или $x = \mathbf{0}$

VI. Графический способ решения смешанных показательных уравнений вида $a^{f(x)} = g(x)$.

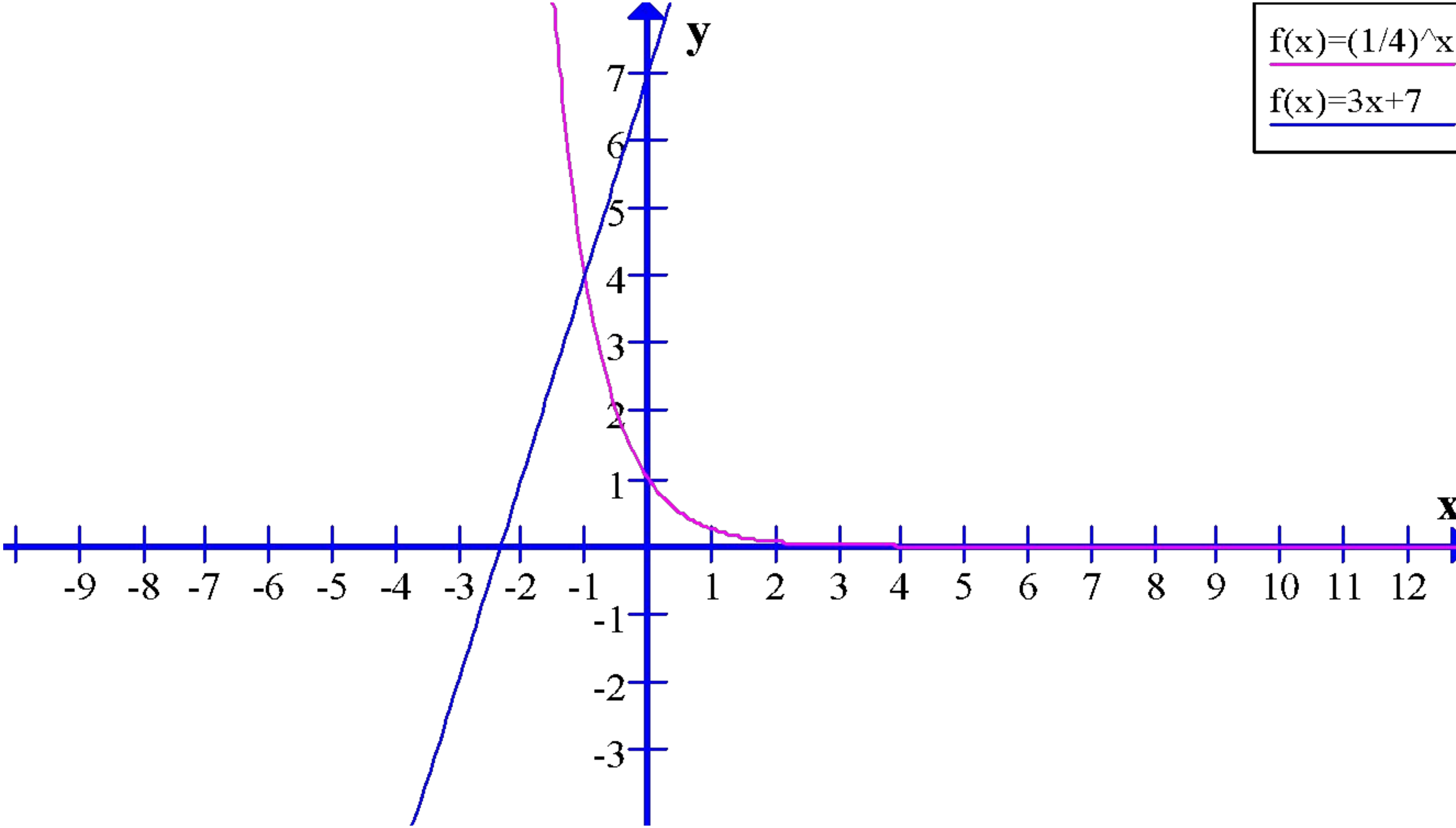
Строят в одной системе координат графики функций левой и правой частей и определяют абсциссы их точек пересечения.

Пример:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 3x + 7$$

Строим в одной системе координат графики функций

$$y_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{x} \text{ и } y_2 = 3x + 7$$



Точка пересечения графиков

$(-1; 4)$

Ответ: $x = \mathbf{-1}$

Показательные неравенства

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \vee g(x), \text{если } a > 1$$

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \wedge g(x), \text{если } 0 < a < 1$$

Примеры:

$$\mathbf{2^x < 8}$$

$$2^x < 2^3$$

$$x < 3, \text{т. к. } 2 > 1$$

Ответ: $(-\infty;\ 3)$

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^x < \mathbf{5}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$$

$$x > \log_{\frac{1}{3}} 5, \text{т. к. } 0 < \frac{1}{3} < 1$$

Ответ: $(\mathbf{\log_{\frac{1}{3}} 5};\ +\infty)$

$$\mathbf{2^x < -1}$$

Т.к. $-1 < 0$, а $2^x > 0$, то решений нет

Ответ: решений нет

$$\mathbf{2^{x-2} + 2^{x+1} < 18}$$

$$2^{x-2} \cdot (1 + 2^3) < 18$$

$$9 \cdot 2^{x-2} < 18$$

$$2^{x-2} < 2$$

$$x - 2 < 1, \text{т. к. } 2 > 1$$

$$x < 3$$

Ответ: $(-\infty;\ 3)$

$$\mathbf{49 \cdot 5^{x} - 25 \cdot 7^{x} > 0} \;|:7^{x} > 0|$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x} > \frac{25}{49}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2}$$

$$x < 2\text{ , т. к. } 0 < \frac{5}{7} < 1$$

Ответ: (- ∞; 2)

$$\mathbf{2}^{\mathrm{x}+\mathbf{1}} + \mathbf{2}^{-\mathrm{x}} - \mathbf{3} < \mathbf{0}$$

$$2 \cdot 2^{\mathrm{x}} + \frac{1}{2^{\mathrm{x}}} - 3 < 0$$

$$2^{\mathrm{x}} = t, t > 0$$

$$2t + \frac{1}{t} - 3 < 0$$

$$\frac{2t^2 - 3t + 1}{t} < 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 < 0$$

$$\mathrm{t} = 1 \ \text{ и } \mathrm{t} = \tfrac{1}{2}$$

$$(\mathrm{t} - 1)(\mathrm{t} - \frac{1}{2}) < 0$$

$$\frac{1}{2} < \mathrm{t} < 1$$

$$\tfrac{1}{2} < 2^{\mathrm{x}} < 1$$

$$-1 < \mathrm{x} < 0$$

Ответ: $\mathrm{x} \in (-\mathbf{1}; \mathbf{0})$

$$\mathbf{5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 15^{x} \cdot 10^{x}}$$

$$5 \cdot 5^{2x} + 6 \cdot 6^{x} - 30 - 5^{2x} \cdot 6^{x} > 0$$

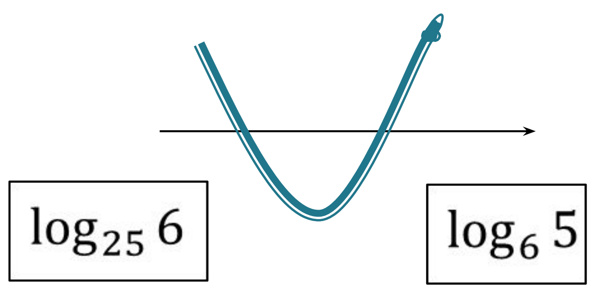
$$25^{x} \cdot (5 - 6^{x}) - 6 \cdot (5 - 6^{x}) > 0$$

$$(5 - 6^{x}) \cdot (25^{x} - 6) > 0$$

$$(6^{x} - 5) \cdot (25^{x} - 6) < 0$$

Решаем методом интервалов

$x = \log_6 5$ и $x = \log_{25} 6$



Ответ: $x \in \left(\mathbf{\log_{25} 6 ; \log_6 5}\right)$

1) $2^{x^2+2x} \cdot 3^{x^2+2x} = 216^{x+2}$

2) $2^{2x-5} - 3 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$

3) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$

4) $64 \cdot 9^{-x} - 84 \cdot 12^{-x} + 27 \cdot 16^{-x} = 0$

5) $2^{3x-5} - \frac{3}{2^{3x-5+1}} = 1$

6) $4^x - 10 \cdot 2^x + 20 = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 + x^2$

7) $7^x \cdot 14^x + 8 = 2^x + 8 \cdot 49^x$

8) $x + 3 \cdot 3^x = 0$

9) $(0,5)^{x^2+x-2} < 4^{x-1}$

10) $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} \leq 0$

11) $2^{-x+2} - 2^{-x+1} + 2^{-x-1} - 2^{-x-2} \leq 9$

12) $4^{1-x} + 4^x \geq 5$

13) $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^x + 1 < 0$

Учитель: Определите, какого вида следующее уравнение

$7^x \cdot 14^x + 8 = 2^x + 8 \cdot 49^x$?

Ученик: Замечаем, что $14^x = 2^x \cdot 7^x,\ 49^x = 7^{2x}$.

Перенесем всё в левую часть и преобразуем

$7^{2x} \cdot 2^x + 8 - 2^x - 8 \cdot 7^{2x} = 0$.

Замечаем, что слагаемые левой части можно сгруппировать и вынести из каждой группы общий множитель.

Учитель: Значит, каким способом будем решать данное уравнение?

Ученики: Способом разложения на множители.

Учитель: Доведите решение до конца.

Ученики записывают решение, опираясь на алгоритм решения ключевой задачи

$$7^{2x} \cdot (2^x - 8) - (2^x - 8) = 0$$

$$(2^x - 8)(7^{2x} - 1) = 0$$

$$2^x - 8 = 0 \text{ или } 7^{2x} - 1 = 0$$

$$2^x = 8 \text{ или } 7^{2x} = 1$$

$$x = 3 \text{ или } x = 0$$

Ответ: $x = 3$ или $x = 0$

Учитель: А как будем решать такое неравенство $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2x}-6\cdot\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}+1<0$?

К какому типу оно относится?

Ученики: Т.к. показатель первого слагаемого в 2 раза больше показателя второго слагаемого, значит, оно подходит под тип неравенств, сводящихся к квадратным, но основания степеней разные.

Учитель: Посмотрите на основания степеней внимательнее. Возможно они равны.

Ученики: Избавимся от иррациональности в знаменателе числа $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=3-2\sqrt{2}.$$

Ученики: Тогда получаем неравенство $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2x}-6\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x}+1<0$, сводящееся к квадратному. Ученики доводят решение до конца и сообщают ответ.

$$(3 - 2\sqrt{2})^x = y, \qquad y > 0$$

$$y^2 - 6y + 1 < 0$$

$$3 - 2\sqrt{2} < y < 3 + 2\sqrt{2}$$

$$3 - 2\sqrt{2} < (3 - 2\sqrt{2})^x < 3 + 2\sqrt{2}$$

Т.к. $3 + 2\sqrt{2} = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ и $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$,

то $-1 < x < 1$

Ответ: $x \in (-1; 1)$