

Подготовка к ЕГЭ - 2014

по математике.

Нахождение площади сечения
через площадь его ортогональной
проекции.

Задание C2

Учитель математики МБОУ СОШ № 143 г. Красноярск
Князькина Т. В.

Рассмотрим решение такой задачи:

В прямоугольном параллелепипеде

ABCD A₁ B₁ C₁ D₁

$$AB = BC = 10\sqrt{2}$$

. Сечение

параллелепипеда проходит через

точки B и D и образует с плоскостью ABC

угол

. Найдите площадь сечения.

$$\alpha = \arctg \frac{\sqrt{7}}{3}$$

- Часто бывает удобно находить площадь сечения через площадь его ортогональной проекции.

Нахождение площади треугольника через площадь его ортогональной проекции легко иллюстрируется таким рисунком:

CH - высота треугольника ABC , $C'H$ - высота
 треугольника ABC' , который является
 ортогональной проекцией
 треугольника ABC . Из прямоугольного
 треугольника CHC' :

$$CH = \frac{C'H}{\cos \alpha}$$

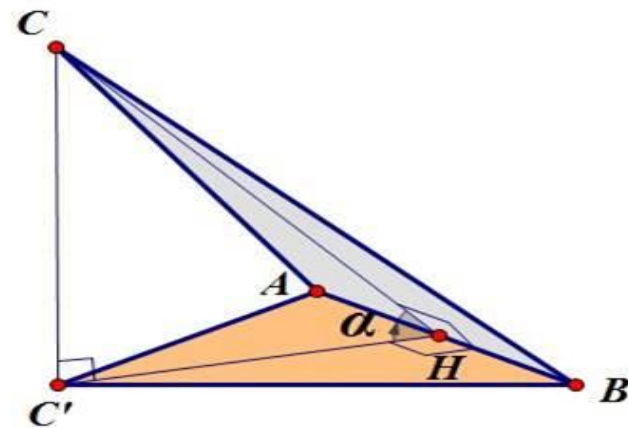
Площадь треугольника ABC' равна

$$\frac{AB \times C'H}{2}$$

Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{AB \times CH}{2} = \frac{AB \times \frac{C'H}{\cos \alpha}}{2}$$

Следовательно, **площадь**
треугольника ABC равна площади
треугольника ABC' ,
деленной на косинус угла между
плоскостями треугольника ABC и
треугольника ABC' , который
является ортогональной проекцией
треугольника ABC .



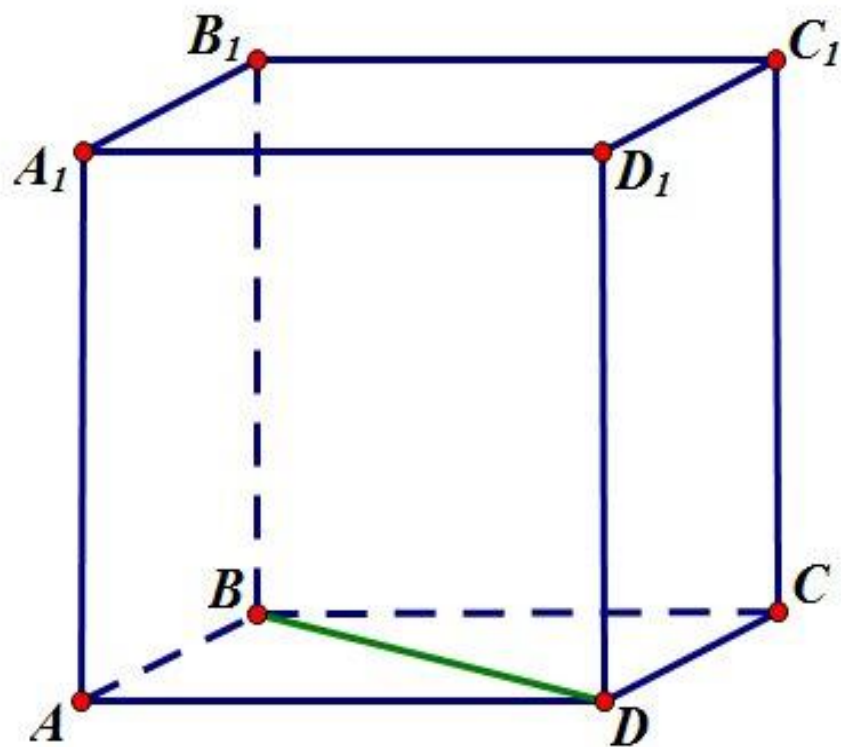
Поскольку площадь любого многоугольника можно представить в виде суммы площадей треугольников, **площадь многоугольника равна площади его ортогональной проекции на плоскость деленной на косинус угла между плоскостями многоугольника и его проекции.**

Используем этот факт для решения нашей задачи (см. слайд 2)

План решения такой:

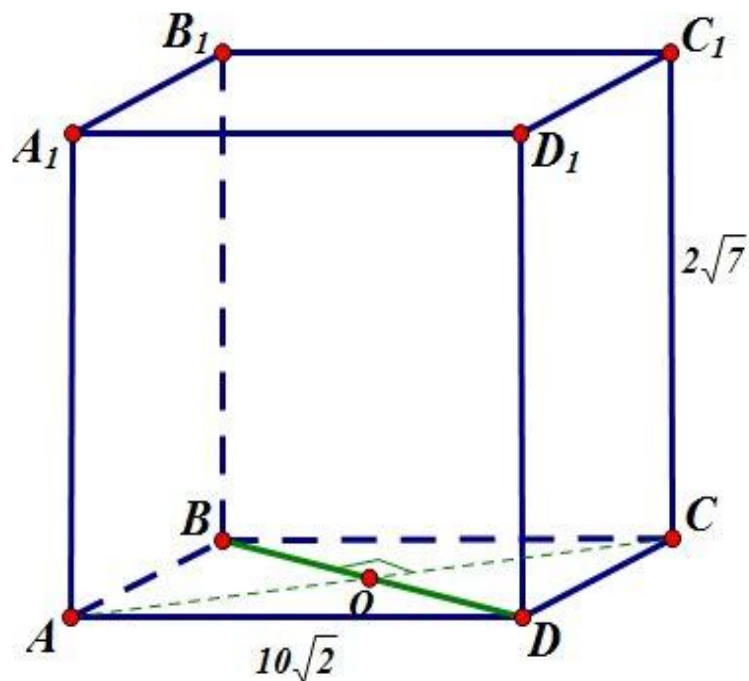
- А) Строим сечение.
- Б) Находим его ортогональную проекцию на плоскость основания.
- В) Находим площадь ортогональной проекции.
- Г) Находим площадь сечения.

1. Сначала нам нужно построить это сечение.
Очевидно, что отрезок BD принадлежит плоскости сечения и плоскости основания, то есть принадлежит линии пересечения плоскостей:



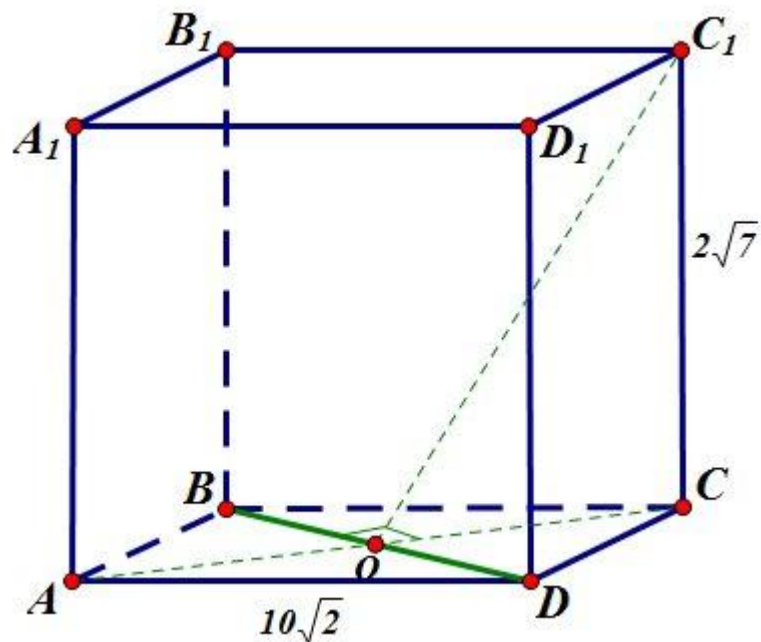
Угол между двумя плоскостями – это угол между двумя перпендикулярами, которые проведены к линии пересечения плоскостей и лежат в этих плоскостях.

$BD \perp AC$ Пусть точка O – точка пересечения диагоналей основания. OS – перпендикуляр к линии пересечения плоскостей, который лежит в плоскости основания:



2. Определим положение перпендикуляра, который лежит в плоскости сечения. (Помним, что если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной. Ищем наклонную по ее проекции (OC) и углу между проекцией и наклонной). Найдем тангенс угла $\angle C_1OC$ между OC_1 и OC

$$\operatorname{tg} \angle C_1OC = \frac{C_1C}{OC}$$



$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2}}{2} = 10$$

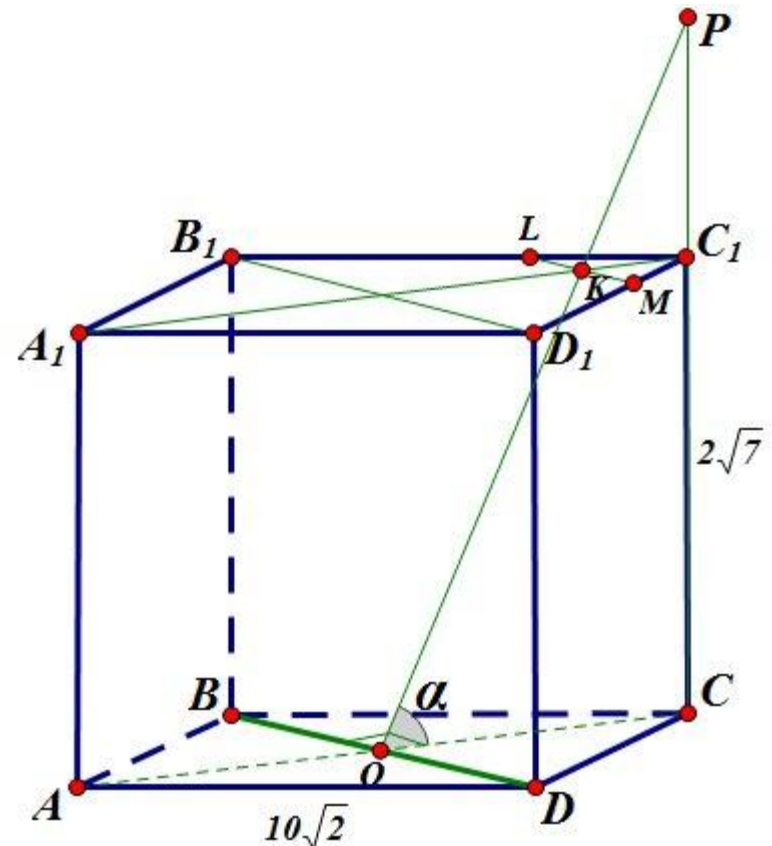
$$\operatorname{tg} \angle COC_1 = \frac{2\sqrt{7}}{10} = \frac{\sqrt{7}}{5} < \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Следовательно, угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{3}$ между плоскостью сечения и плоскостью основания больше, чем между OC_1 и OC .

То есть сечение расположено как-то так:

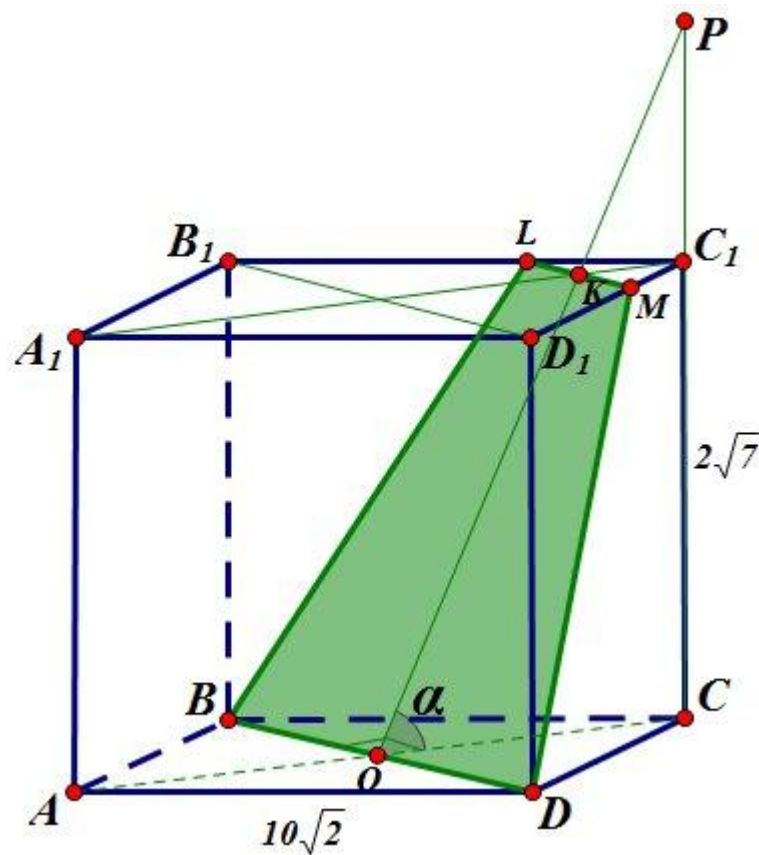
$$CP = OC \operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \times \sqrt{7}}{3} = \frac{10}{3} \sqrt{7}$$

K – точка пересечения OP и A_1C_1 , $LM \parallel B_1D_1$



Итак, вот наше сечение:

3. Найдем проекцию сечения $VLMD$ на плоскость основания. Для этого найдем проекции точек L и M .



- Четырехугольник BL_1M_1D – проекция сечения на плоскость основания.

4. Найдем площадь четырехугольника BL_1M_1D .
Для этого из площади треугольника $B_1C_1D_1$

вычтем площадь

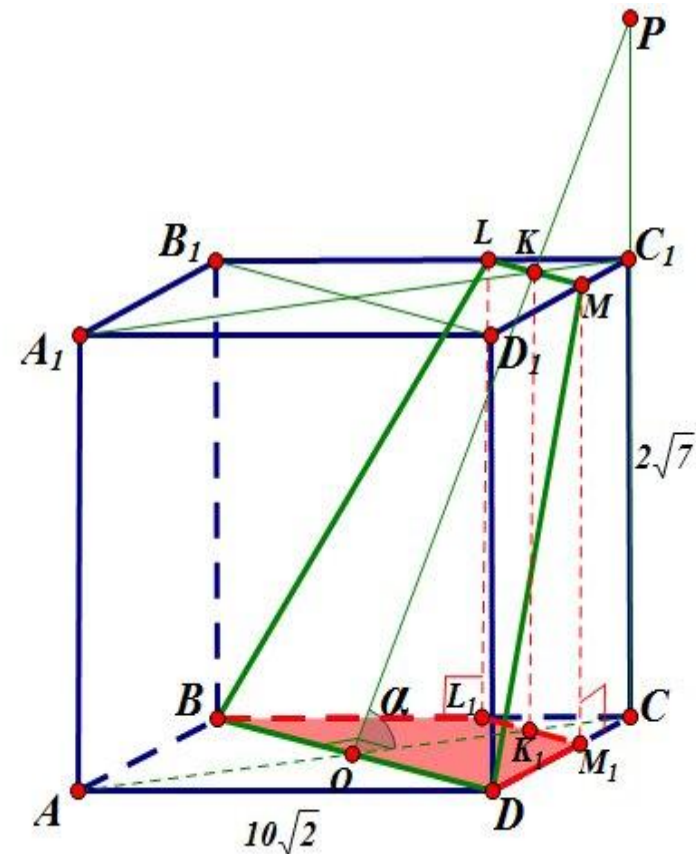
треугольника $L_1C_1M_1$

Найдем площадь

треугольника $L_1C_1M_1$.

Треугольник $L_1C_1M_1$ подобен
треугольнику $B_1C_1D_1$.

Найдем коэффициент
подобия.



Для этого рассмотрим треугольники OPC и OKK_1 :

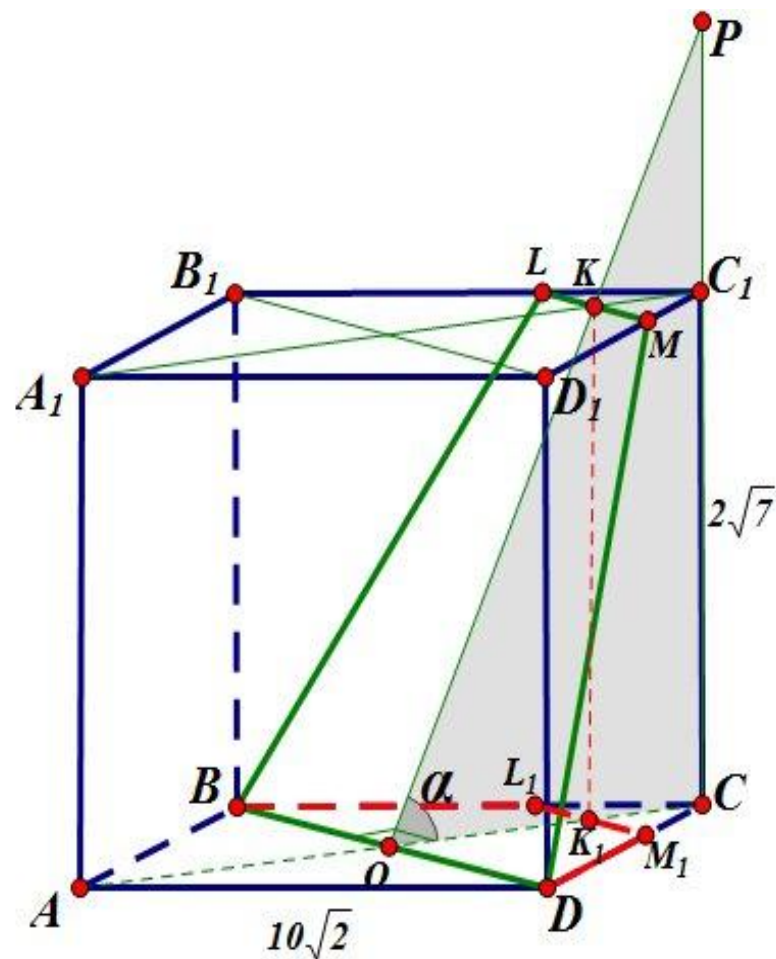
$$\frac{OK_1}{OC} = \frac{KK_1}{PC} = \frac{CC_1}{PC} = \frac{2\sqrt{7}}{10\sqrt{7}} = \frac{3}{5}$$

Следовательно, $\frac{K_1C}{OC} = \frac{2}{5}$

и площадь треугольника L_1CM_1 составляет $4/25$ площади треугольника B_1CD_1 (отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия).

Тогда площадь четырехугольника BL_1M_1D равна $1 - 4/25 = 21/25$ площади треугольника B_1CD_1 и равна

$$S_{BL_1M_1D} = \frac{21}{25} \times \frac{10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}}{2} = 84$$



5. Теперь найдем $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}} = \frac{3}{4}$$

6. И, наконец, получаем:

$$S_{BLMD} = S_{BL_1 M_1 D} : \cos \alpha = 84 : \frac{3}{4} = 112$$

Ответ: 112