Подготовка к ЕГЭ – 2014 по математике. Нахождение площади сечения через площадь его ортогональной проекции. Задание С2

Учитель математики МБОУ СОШ № 143 г. Красноярска
Князькина Т. В.

Рассмотрим решение такой задачи:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB=BC=10\sqrt{2}$, $AA_1=2\sqrt{7}$**.Сечение параллелепипеда проходит через точки** B и D **и образует с плоскостью** ABC **угол** $\alpha = arctg\frac{\sqrt{7}}{3}$. **Найдите площадь сечения.**

- Часто бывает удобно находить площадь сечения через площадь его ортогональной проекции.

Нахождение площади треугольника через площадь его ортогональной проекции легко иллюстрируется таким рисунком:

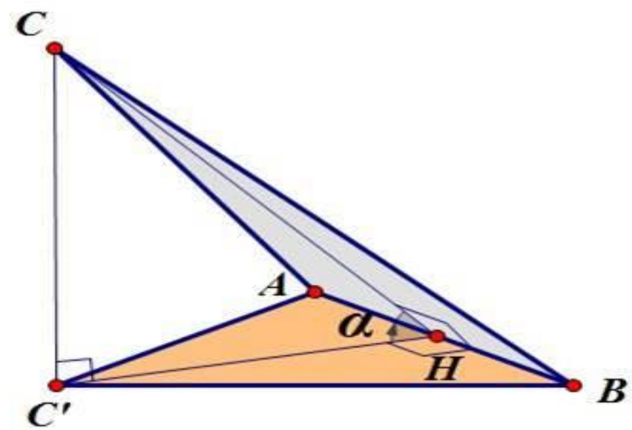
СН- высота треугольника АВС , С'Н – высота треугольника АВС', который является ортогональной проекцией треугольника АВС . Из прямоугольного треугольника СНС' :

$$CH = \frac{C'H}{\cos\alpha}$$

Площадь треугольника АВС' равна $\frac{AB \times C'H}{2}$

Площадь треугольника АВС равна $\frac{AB \times CH}{2} = \frac{AB \times \frac{C'H}{\cos\alpha}}{2}$

Следовательно, площадь треугольника АВС равна площади треугольника АВС',
деленной на косинус угла между плоскостями треугольника АВС и треугольника АВС', который является ортогональной проекцией треугольника АВС .



Поскольку площадь любого многоугольника можно представить в виде суммы площадей треугольников, **площадь многоугольника равна площади его ортогональной проекции на плоскость деленной на косинус угла между плоскостями многоугольника и его проекции**.

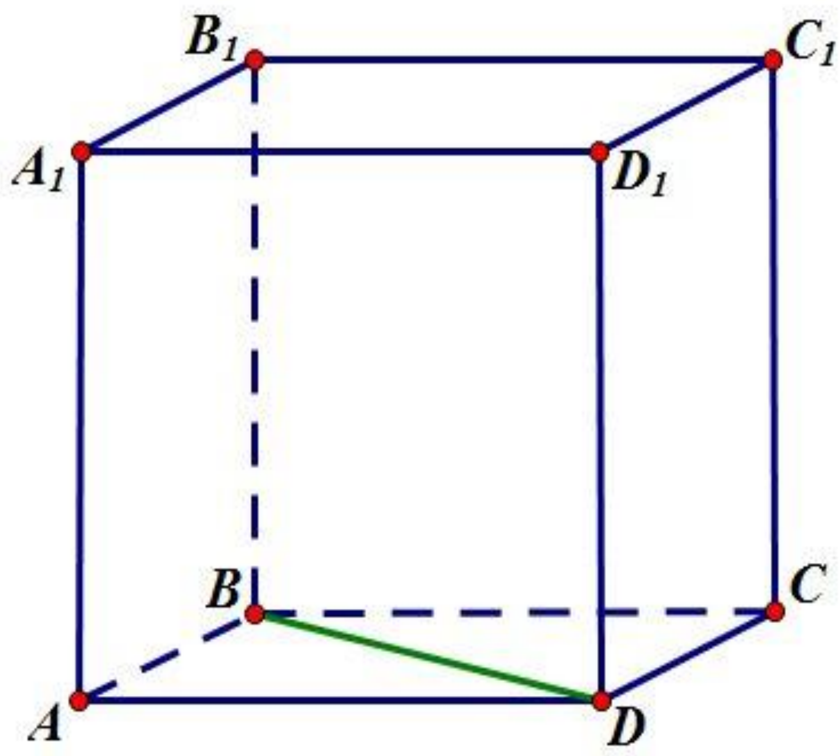
Используем этот факт для решения нашей задачи (см. слайд 2)

План решения такой:

- А) Строим сечение.
- Б) Находим его ортогональную проекцию на плоскость основания.
- В) Находим площадь ортогональной проекции.
- Г) Находим площадь сечения.

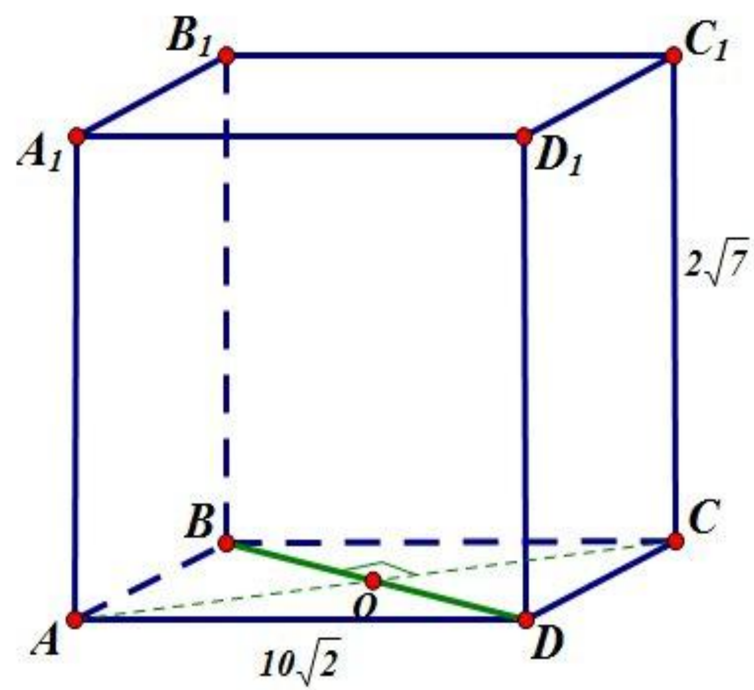
1. Сначала нам нужно построить это сечение.

Очевидно, что отрезок BD принадлежит плоскости сечения и плоскости основания, то есть принадлежит линии пересечения плоскостей:

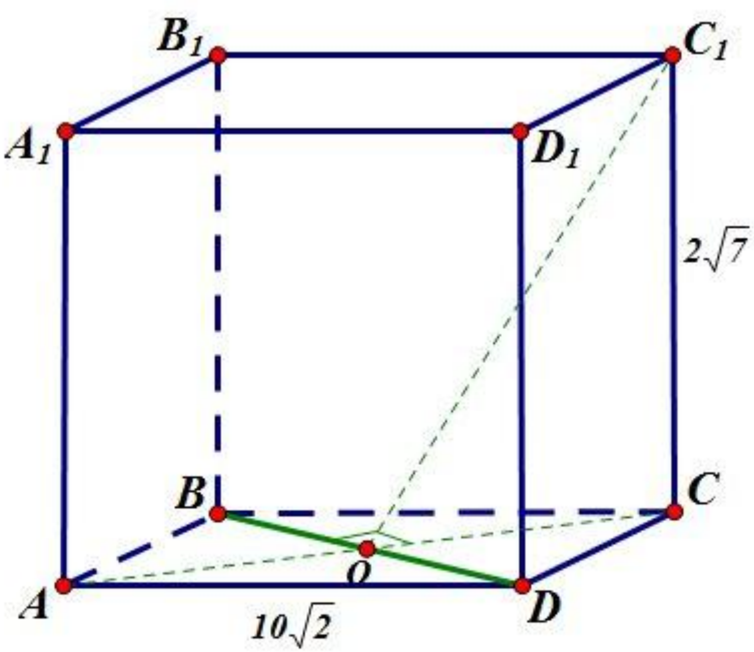


Угол между двумя плоскостями – это угол между двумя перпендикулярами, которые проведены к линии пересечения плоскостей и лежат в этих плоскостях.

$BD \perp AC$ Пусть точка O – точка пересечения диагоналей основания. OC– перпендикуляр к линии пересечения плоскостей, который лежит в плоскости основания:



2. Определим положение перпендикуляра, который лежит в плоскости сечения. (Помним, что если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной. Ищем наклонную по ее проекции (OC) и углу между проекцией и наклонной). Найдем тангенс угла COC_1 между OC_1 и OC



$$tgCOC_1=\frac{C_1C}{OC}$$

$$OC=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2+\left(10\sqrt{2}\right)^2}}{2}=10$$

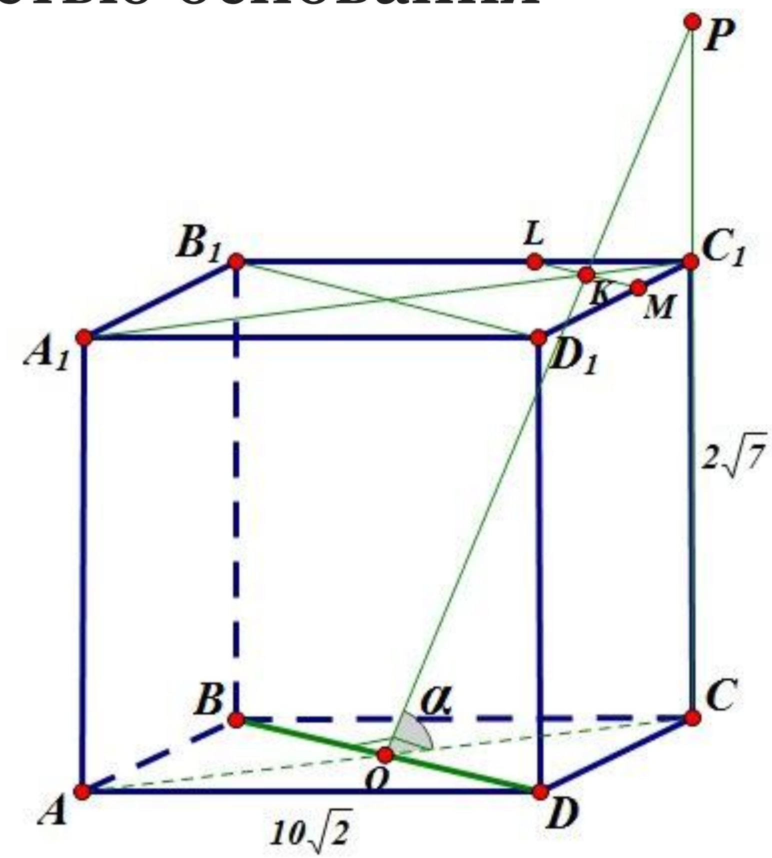
$$tgCOC_1=\frac{2\sqrt{7}}{10}=\frac{\sqrt{7}}{5}<\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Следовательно, угол $\alpha=arctg\frac{\sqrt{7}}{3}$ между плоскостью сечения и плоскостью основания больше, чем между

OC_1 и OC.

То есть сечение расположено как-то так:

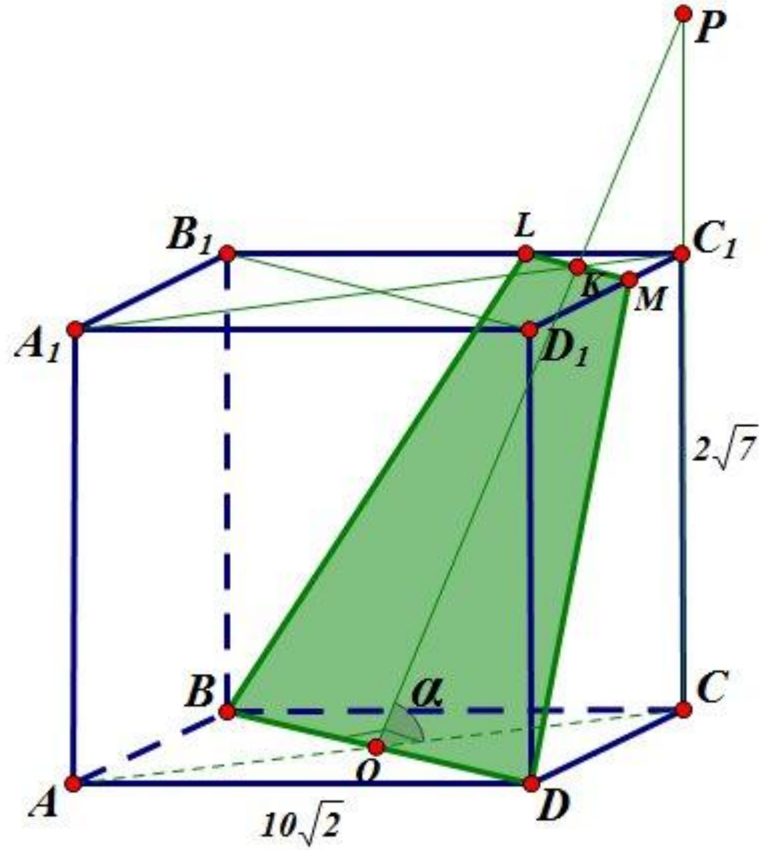
$$CP=OCtg\alpha=\frac{10\times\sqrt{7}}{3}=\frac{10}{3}\sqrt{7}$$



K– точка пересечения OP и A_1C_1, $LM||B_1D_1$

Итак, вот наше сечение:

3. Найдем проекцию сечения BLMD на плоскость основания. Для этого найдем проекции точек L и M .



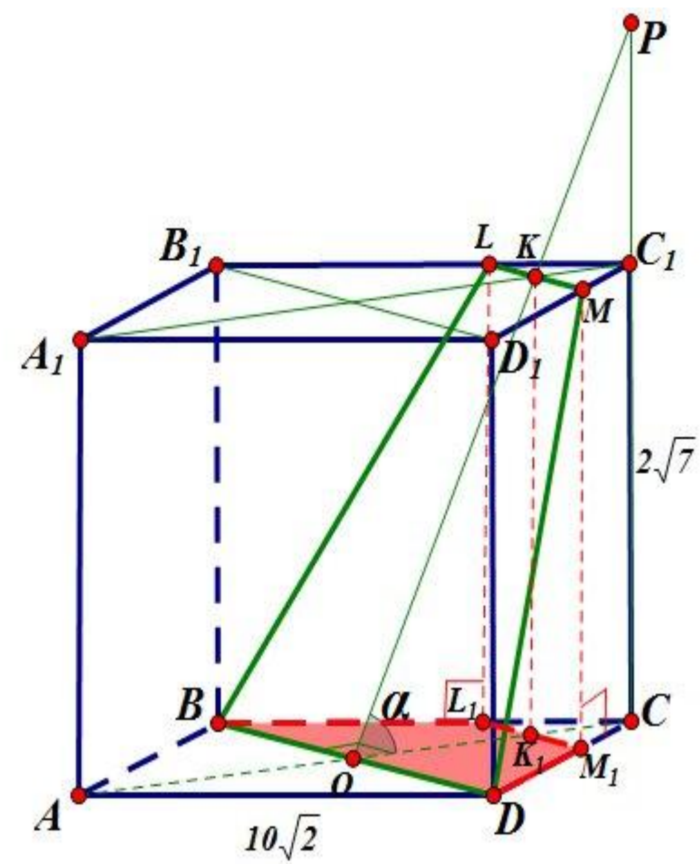
- Четырехугольник BL_1M_1D – проекция сечения на плоскость основания.

4. Найдем площадь четырехугольника BL_1M_1D. Для этого из площади треугольника BCD вычтем площадь треугольника L_1CM_1

Найдем площадь треугольника L_1CM_1.

Треугольник L_1CM_1 подобен треугольнику BCD.

Найдем коэффициент подобия.



Для этого рассмотрим треугольники OPC и OKK_1 :

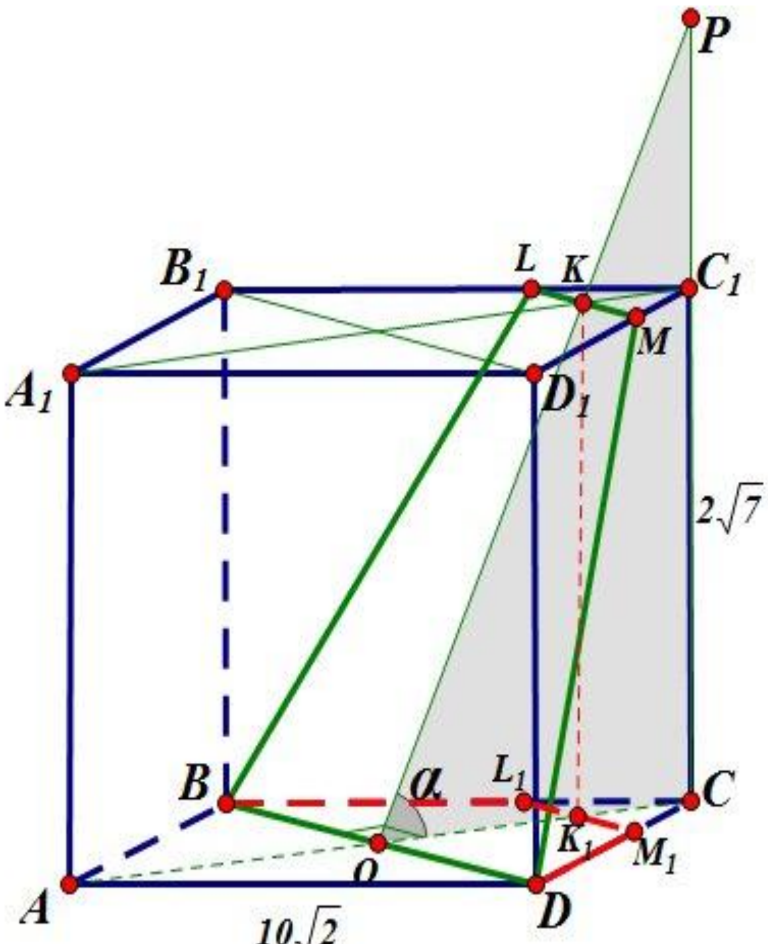
$$\frac{OK_1}{OC} = \frac{KK_1}{PC} = \frac{CC_1}{PC} = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{10\sqrt{7}}{3}} = \frac{3}{5}$$

Следовательно, $\frac{K_1C}{OC} = \frac{2}{5}$

и площадь треугольника L_1CM_1 составляет 4/25 площади треугольника BCD (отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия).

Тогда площадь четырехугольника BL_1M_1D равна 1-4/25=21/25 площади треугольника BCD и равна

$$S_{BL_1M_1D} = \frac{21}{25} \times \frac{10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}}{2} = 84$$



5. Теперь найдем $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}} = \frac{3}{4}$$

6. И, наконец, получаем:

$$S_{BLMD} = S_{BL_1M_1D} : \cos\alpha = 84 : \frac{3}{4} = 112$$

Ответ: 112