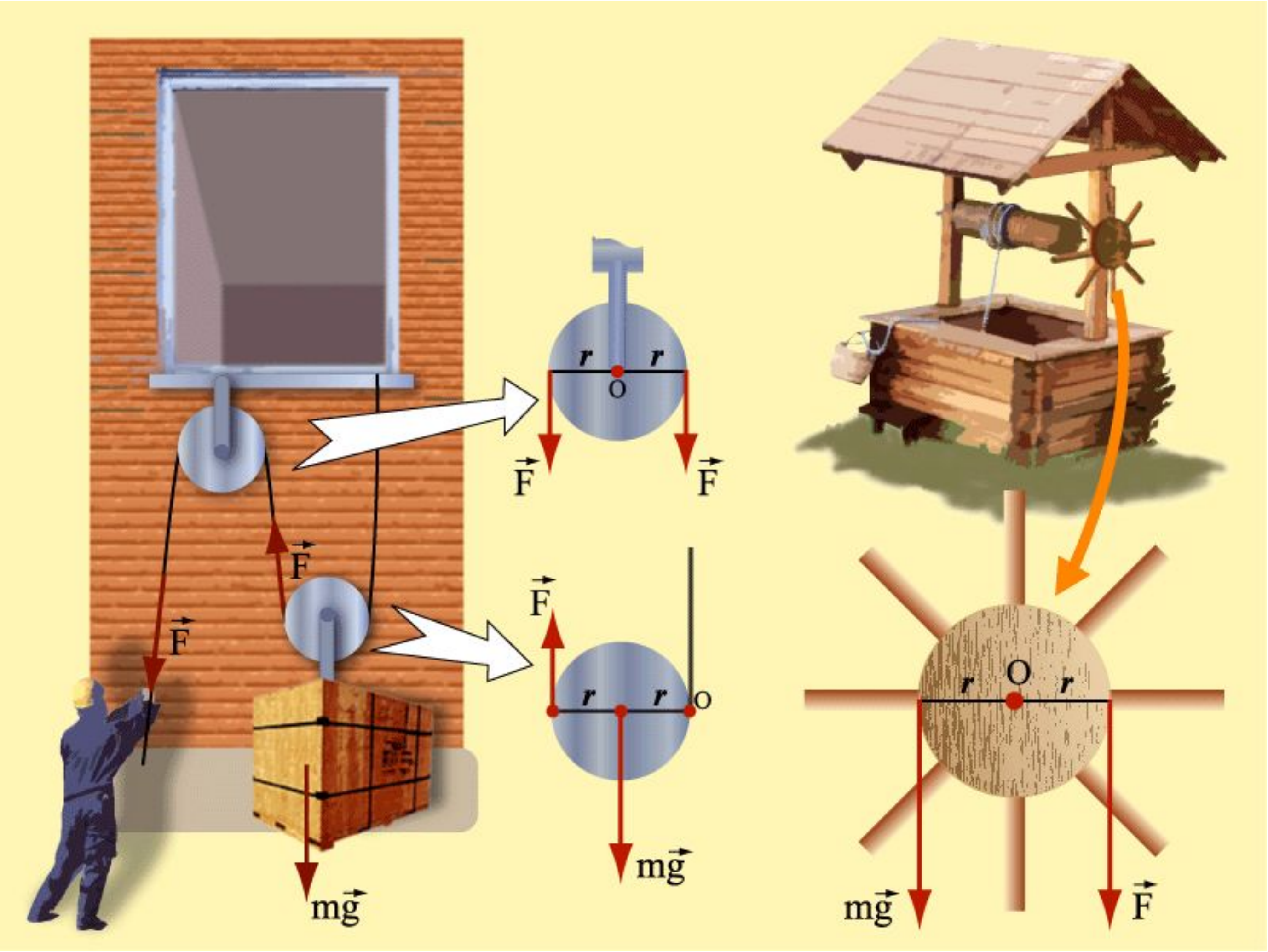
ТЕМА IV. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



1. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА

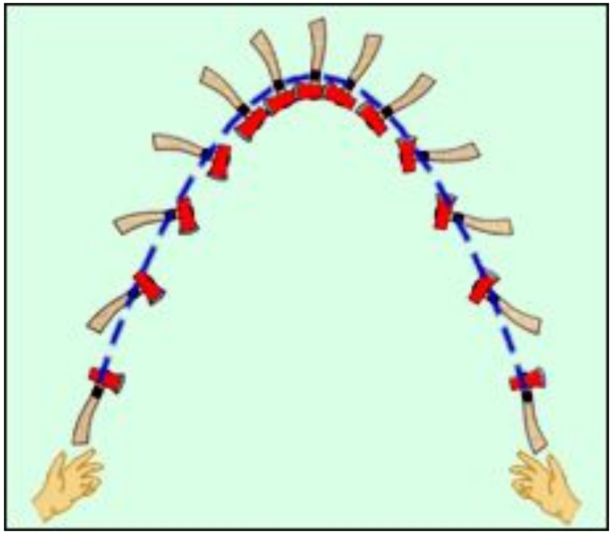
Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу (внешних) сил.

$$m_i\vec{a}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i; \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \quad \sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \quad \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \vec{r}_c\sum_{i=1}^{N} m_i = m\vec{r}_c.$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i = m\dot{\vec{r}}_c \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{V}_i = m\vec{V}_c.$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{V}}_i = m\dot{\vec{V}}_c \Rightarrow m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i.$$



2. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Моментом импульса частицы относительно некоторой точки О называется векторное произведение радиус-вектора частицы относительно точки О на импульс этой частицы

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times m\vec{V}].$$

Модуль вектора момента импульса частицы

$$L = pr\sin\alpha = pl,$$

$l = r\sin\alpha$ – плечо импульса относительно точки О (длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию направления импульса).

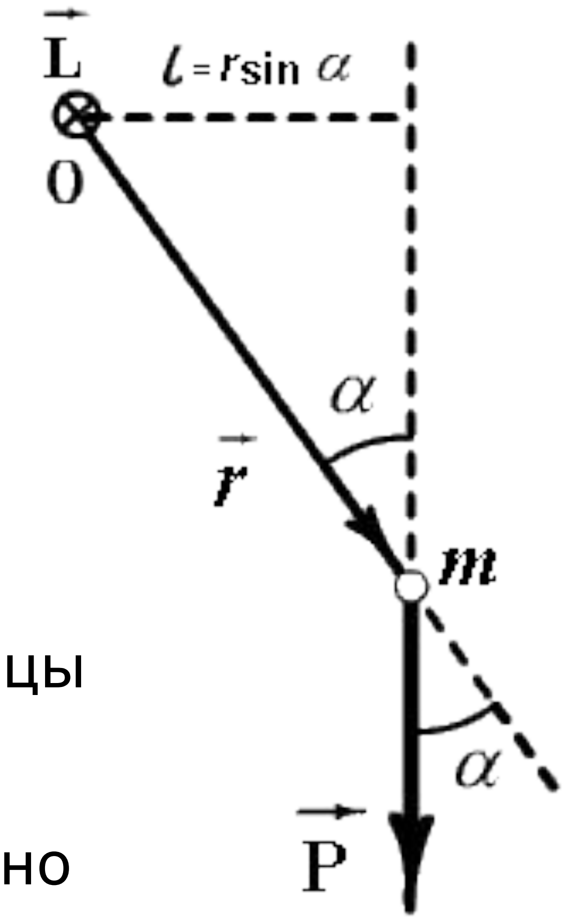
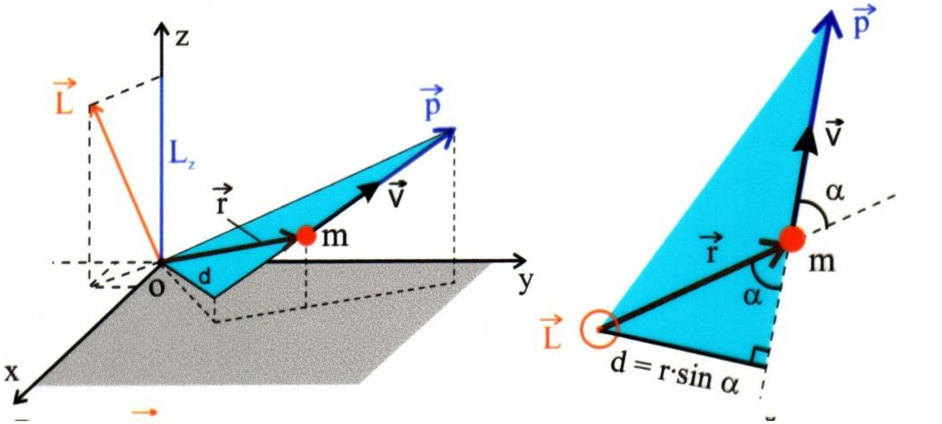


Рис. 13.16

3.МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Момент импульса есть есть мера механического движения



Проекция вектора
момента импульса частицы
на некоторую ось z называется
моментом импульса частицы относительно этой оси

$$L_z = [\vec{r} \times \vec{p}]_z .$$

Момент импульса частицы относительно точки – вектор, момент импульса частицы относительно оси – скаляр.

$$L_z = L\cos\beta = rp\sin\alpha\cos\beta .$$

α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{p}$, β – угол между $\vec{L}$ и осью z.

$$[L] = 1\,кг\cdot м\cdot с^{-1}\cdot м = 1\,кг\cdot м^2/с.$$

Моментом импульса системы частиц относительно оси z называется величина

$$L_z = \sum_{i=i}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]_z .$$

4. СВОЙСТВА МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

1. Псевдовектор. Направление момента импульса определяется

правилом

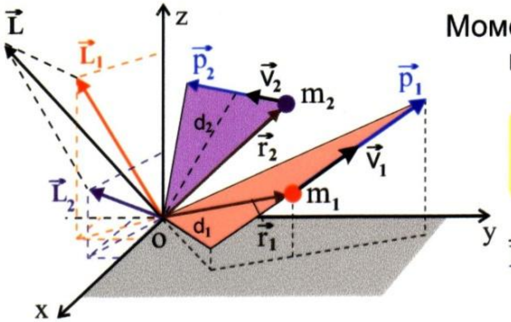
2. Аддитивность.

3. Зависит от выбора точки О.

4. Зависит от системы отсчёта.

4. СВОЙСТВА МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

Свойства момента импульса



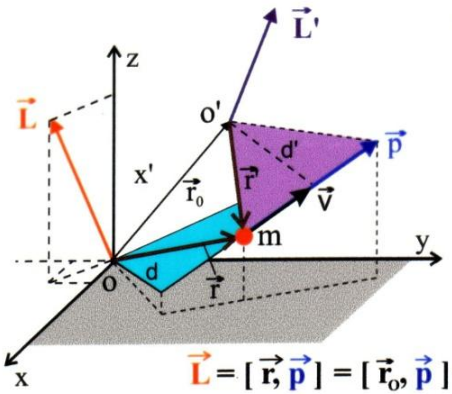
Момент импульса системы N материальных точек

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

$\vec{L}$ - величина аддитивная

Момент импульса зависит от выбора точки O в данной системе отсчета: $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$, $\vec{L}' = [\vec{r}', \vec{p}]$

$$\vec{L} \neq \vec{L}'$$



$\vec{L}$ - момент импульса относительно точки O

$\vec{L}'$ - момент импульса относительно точки O′

Преобразование момента импульса при переходе от точки O к точке O′

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}_0, \vec{p}] + [\vec{r}', \vec{p}] = [\vec{r}_0, \vec{p}] + \vec{L}'$$

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{r}_0, \vec{p}]$$

Так как импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ зависит от выбора системы отсчета, момент импульса тоже зависит от выбора системы отсчета

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

1. Псевдовектор.

2. Аддитивность.

3. Зависит от выбора точки O.

4. Зависит от системы отсчёта.

5. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Моментом силы относительно некоторой точки О называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы относительно точки О на действующую силу

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right].$$

Модуль вектора момента силы

$$M = Fr\sin\alpha \ = Fl,$$

$l = r\sin\alpha$ – плечо силы относительно точки О (длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия силы).

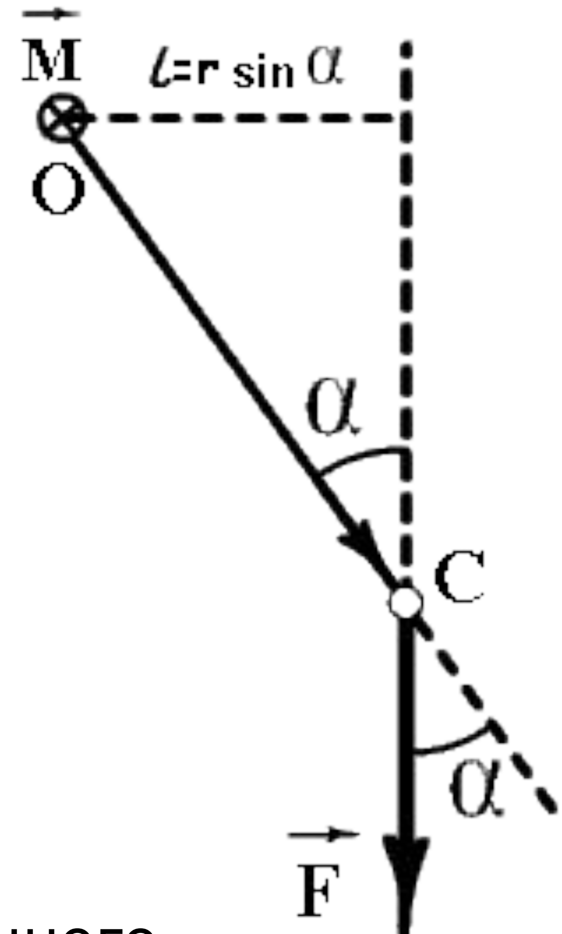


Рис. 13.9

6. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Проекция вектора момента силы
на некоторую ось z называется моментом силы
относительно этой оси

$$M_z = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]_z \Rightarrow$$

$$M_z = M\cos\beta = rF\sin\alpha\cos\beta.$$

α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

β – угол между $\vec{M}$ и осью z.

$$[M] = 1\,H \cdot 1\,м = 1\,H \cdot м.$$

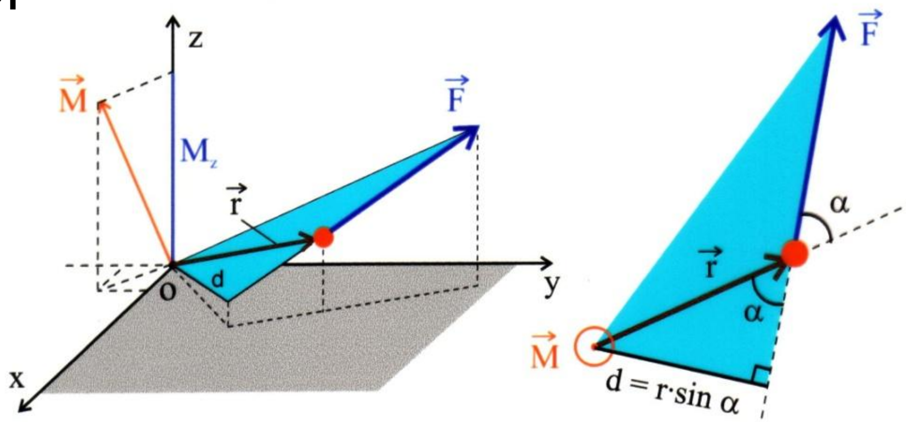
Момент силы

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O есть *псевдовектор:*

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$\vec{r}$ - радиус-вектор точки приложения силы

Момент силы есть величина, характеризующая вращательный эффект силы



Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{F}$ и $\vec{r}$

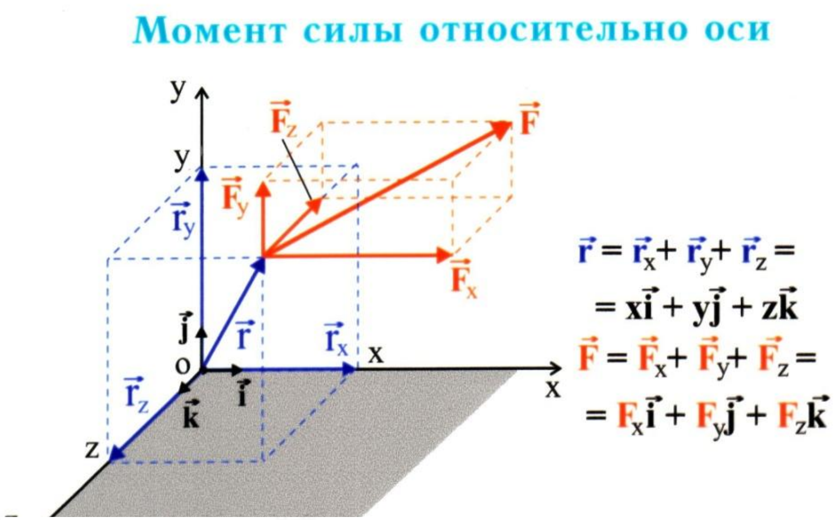
$M = r \cdot F \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{F}}) = F \cdot d$ $\quad$ $d = r \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{F}})$ - плечо силы

Проекция вектора $\vec{M}$ на некоторую ось Z называется моментом силы M_z относительно оси

Для системы м.т. полный момент $\vec{M}_{системы}$ относительно точки O:

$$\vec{M}_{системы} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

7. КОМПОНЕНТЫ МОМЕНТА СИЛЫ



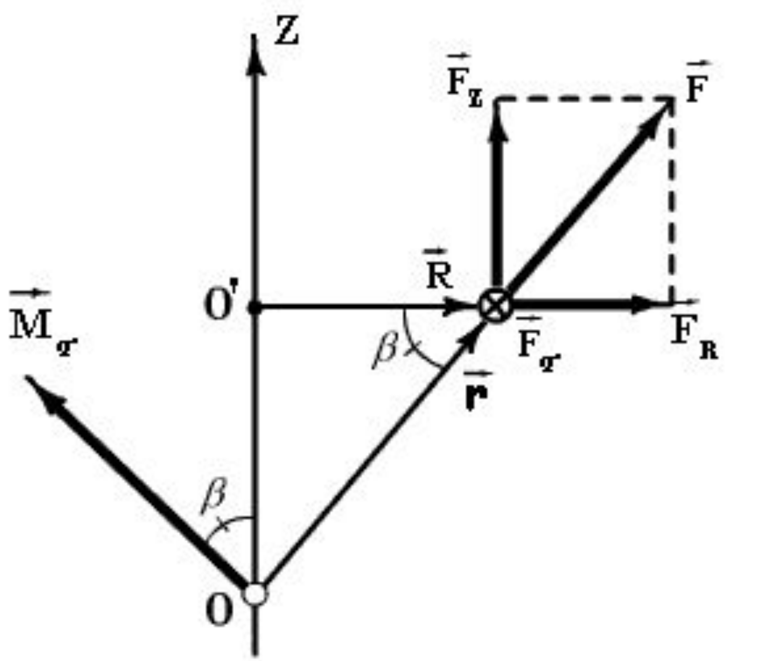


Рис. 13.11

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(yF_z - zF_y) +$$

$$+ \vec{j}\,(zF_x - xF_z) +$$

$$+ \vec{k}\,(xF_y - yF_x).$$

Вклад в M_z даёт только компонент силы, перпендикулярный плоскости рисунка.

8. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ (I)

Запишем уравнение движения для отдельной частицы и умножим его векторно на радиус-вектор этой частицы относительно некоторой точки O:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}\Rightarrow\left[\vec{r}\times m\frac{d\vec{V}}{dt}\right]=\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]\Rightarrow m\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\right]=\vec{M}.$$

Рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{V}\right]=\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\right]+\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{V}\right]=\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\right],$$

так как $\left[\vec{V}\times\vec{V}\right]=0.$

8. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ (II)

Мы доказали, что $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{V}\right]=\left[\vec{r}\times\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right],$

следовательно уравнение $m\left[\vec{r}\times\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right]=\vec{M}$

примет вид $m\dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{V}\right]=\vec{M}\Rightarrow\dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}\times m\vec{V}\right]=\vec{M}\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{p}\right]=\vec{M}\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}.$$

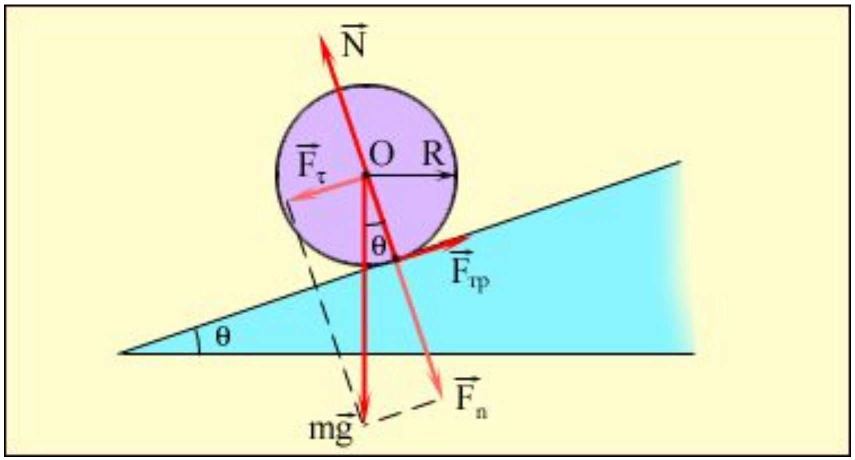
Скорость приращения момента импульса частицы равна действующему на частицу моменту сил.

9. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

$$m_i\dot{\vec V}_i=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\vec f_{ij}+\vec F_i;\quad \left[\vec r_i\times m_i\dot{\vec V}_i\right]=\left[\vec r_i\times\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\vec f_{ij}\right]+\left[\vec r_i\times\vec F_i\right].$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec r\times m\vec V\right]=\left[\dot{\vec r}\times m\vec V\right]+\left[\vec r\times m\dot{\vec V}\right]=\left[\vec V\times m\vec V\right]+\left[\vec r\times m\dot{\vec V}\right]=\left[\vec r\times m\dot{\vec V}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{d\vec L_i}{dt}=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\vec M_{ij}^{*}+\vec M_i\Rightarrow\ \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec L_i=\sum_{i,j=1;\,i\neq j}^{N}\vec M_{ij}^{*}+\sum_{i=1}^{N}\vec M_i.$$



$$\vec M_{ij}^{*}+\vec M_{ji}^{*}=0\Rightarrow\ \sum_{i,j=1;\,i\neq j}^{N}\vec M_{ij}^{*}=0\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec L_i=\sum_{i=1}^{N}\vec M_i\Rightarrow\frac{d\vec L}{dt}=\vec M.$$

10. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

$$d\vec{L} = \vec{M}dt;$$

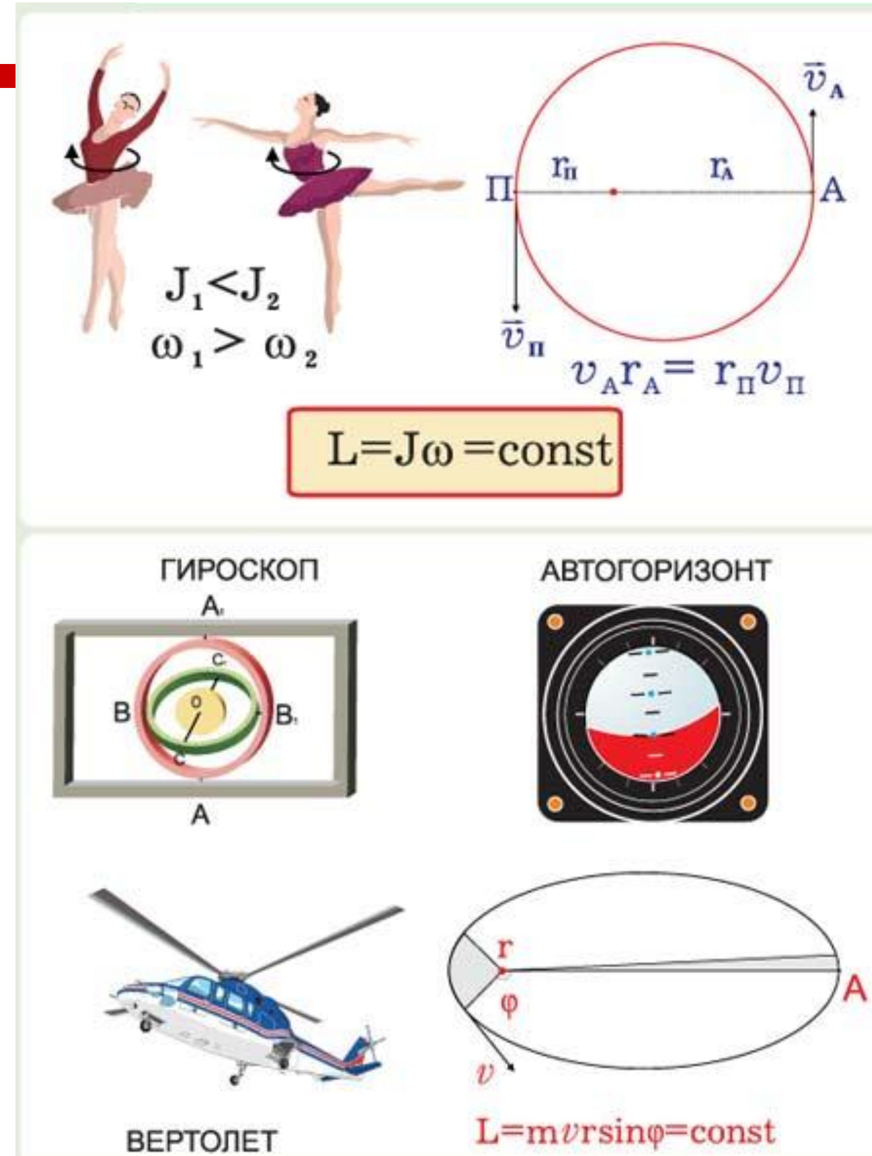
$$\vec{M} = 0 \Rightarrow d\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Момент импульса замкнутой (изолированной) системы есть величина постоянная.

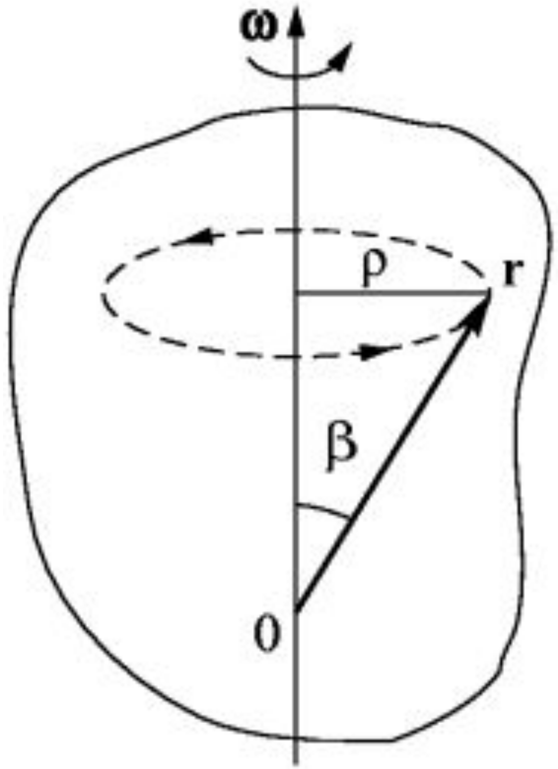
$$\vec{M} \neq 0; \quad M_z = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{L} \neq const;$$

$$L_z = const.$$



11. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА



$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i\right] = m_i \left[\vec{r}_i \times \vec{V}_i\right].$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{V}_i \Rightarrow L_i = m_i r_i V_i; \; V_i = \omega R_i \Rightarrow$$

$$L_{zi} = L_i \cos\alpha_i = m_i r_i \omega R_i \sin\beta_i;$$

$$r_i \sin\beta_i = R_i \Rightarrow L_{zi} = m_i R_i^2 \omega_z.$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{zi} = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2; \; I \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \Rightarrow L_z = I\omega_z.$$

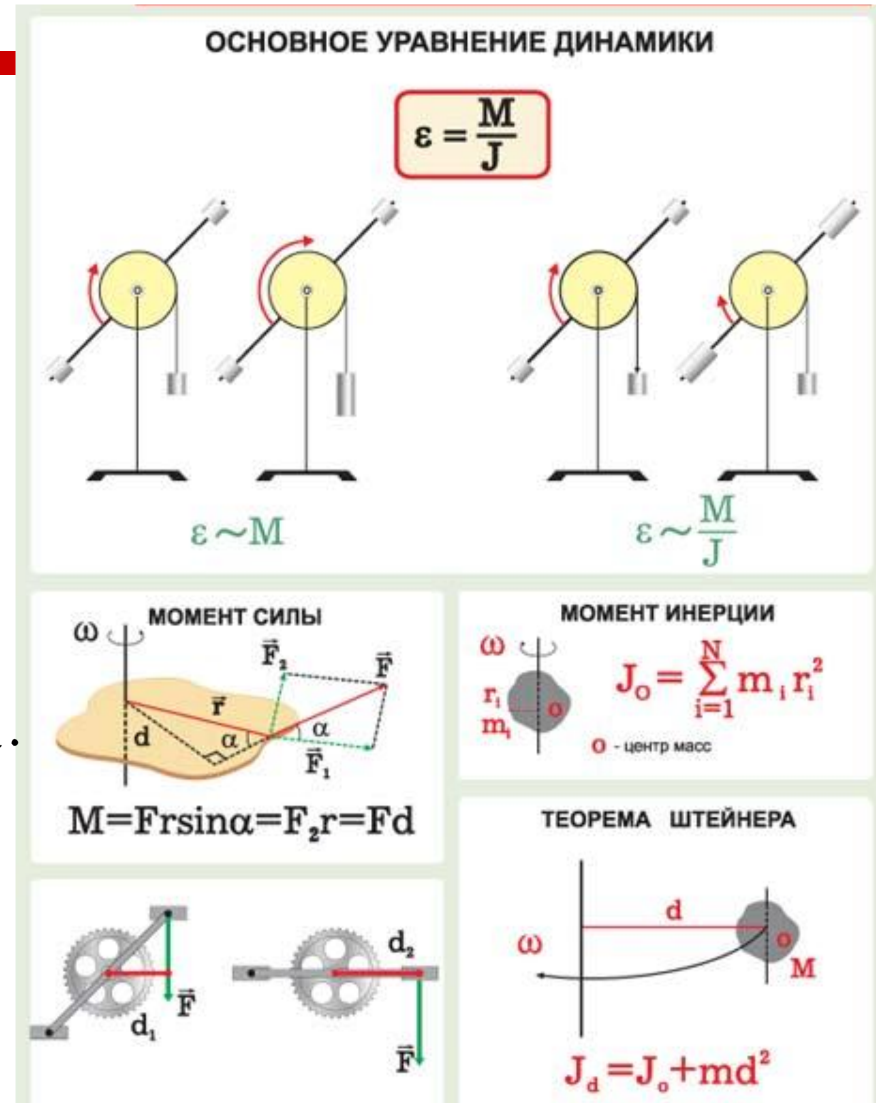
12. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}.$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}L_{zi}=\sum_{i=1}^{N}M_{zi} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt}=M_z.$$

$$L_z=I\omega_z \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I\omega_z\right)=M_z \Rightarrow I\frac{d\omega_z}{dt}=M_z.$$

$$\frac{d\omega_z}{dt}=\varepsilon_z \Rightarrow I\varepsilon_z=M_z.$$



13. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

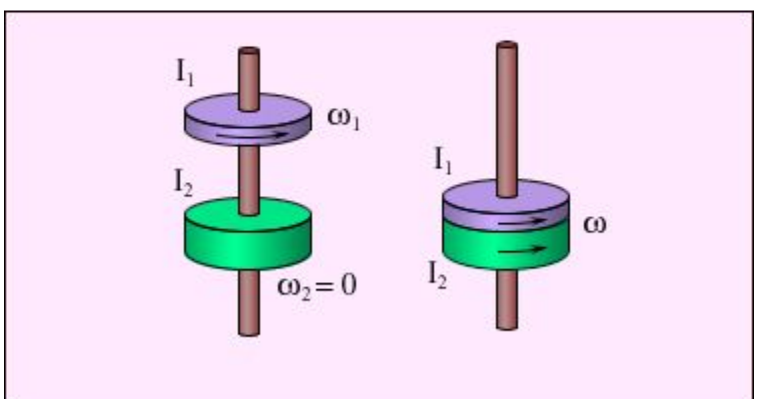
В общем случае $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не совпадают по направлению. Для однородного тела, симметричного относительно оси вращения $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} = const.$$

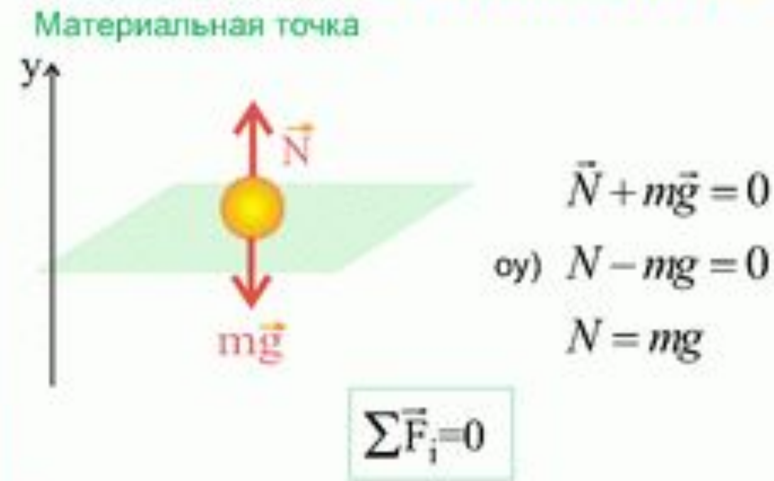
$$M_z = 0 \Rightarrow L_z = I\omega_z = const.$$

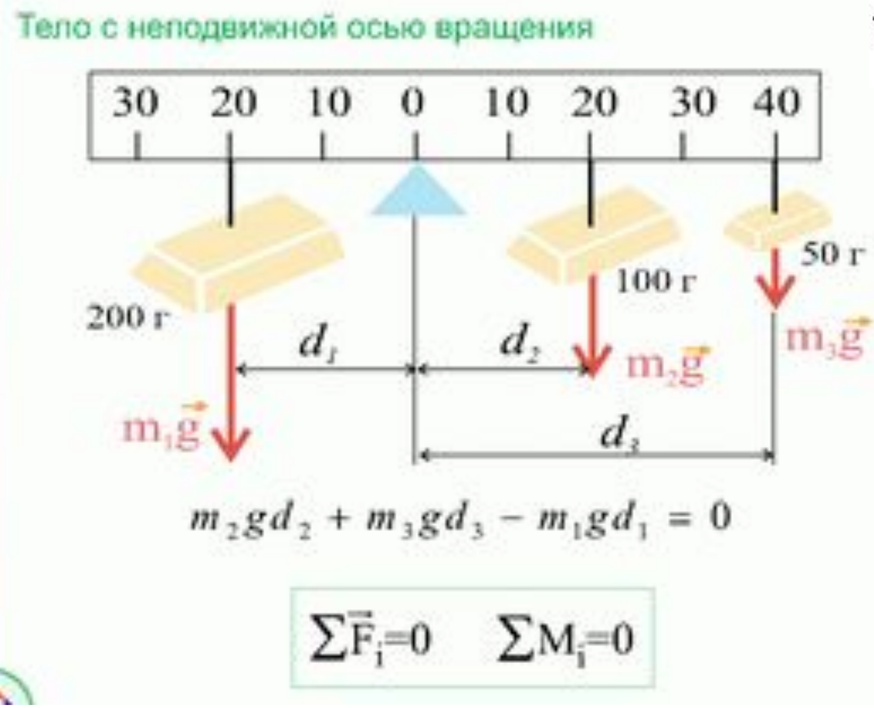
$$I_1\omega_{z1} = I_2\omega_{z2} = const;$$

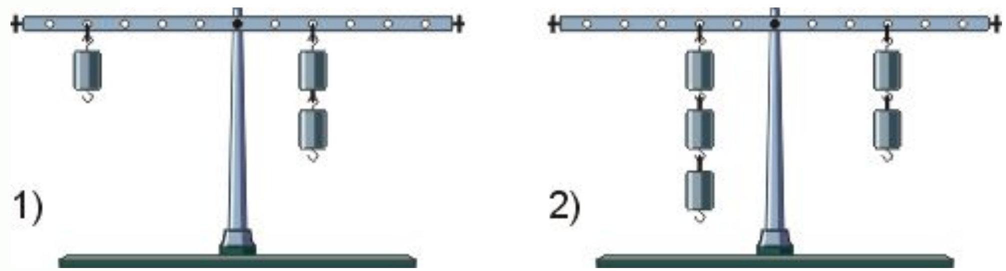
$$I_1\omega_1 = \left(I_1 + I_2\right)\omega.$$

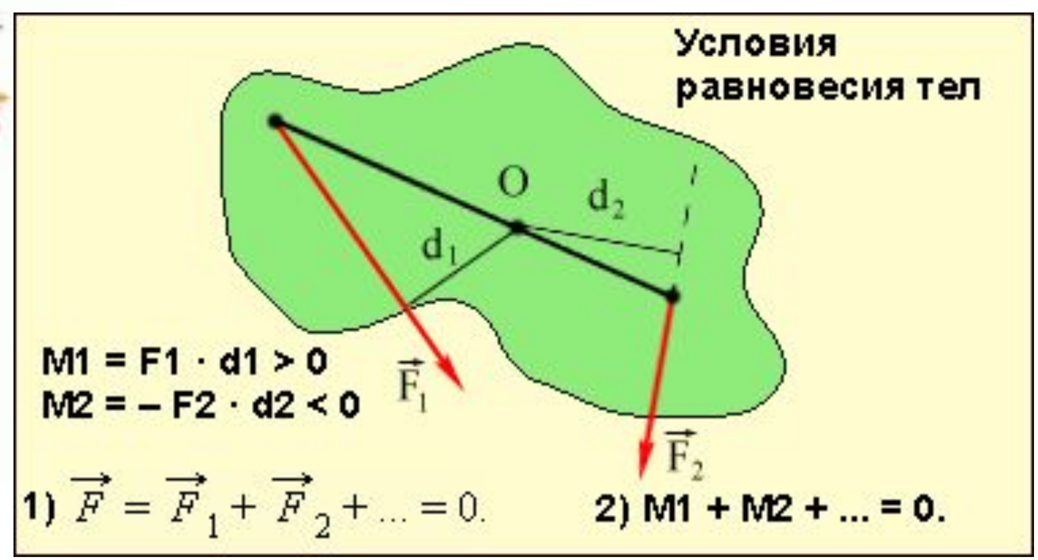


14. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА

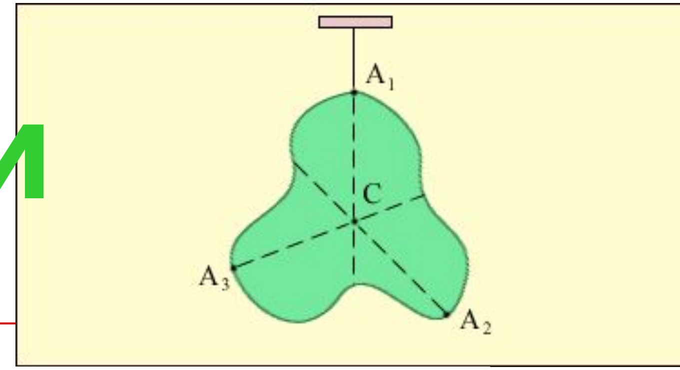


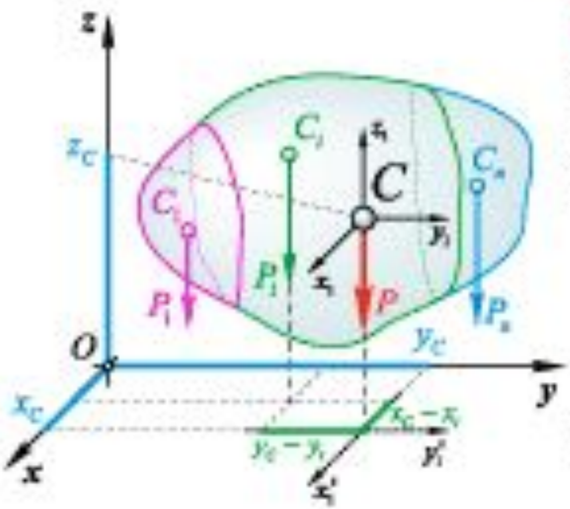






15. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ





Центр тяжести — точка твердого тела, при закреплении которой само тело находится в равновесии в любом положении.

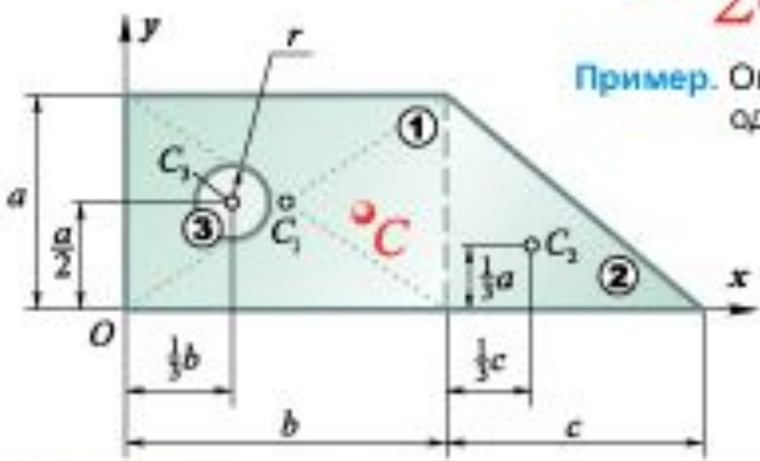
Сумма моментов сил веса частей тела относительно его центра тяжести равна нулю в любом положении тела:

$$\sum_i mom_{y_1} \bar{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g(x_C - x_i) = 0$$

$$\sum_i mom_{x_1} \bar{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g(y_C - y_i) = 0$$

Следовательно, координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad x_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad \text{по аналогии} \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$



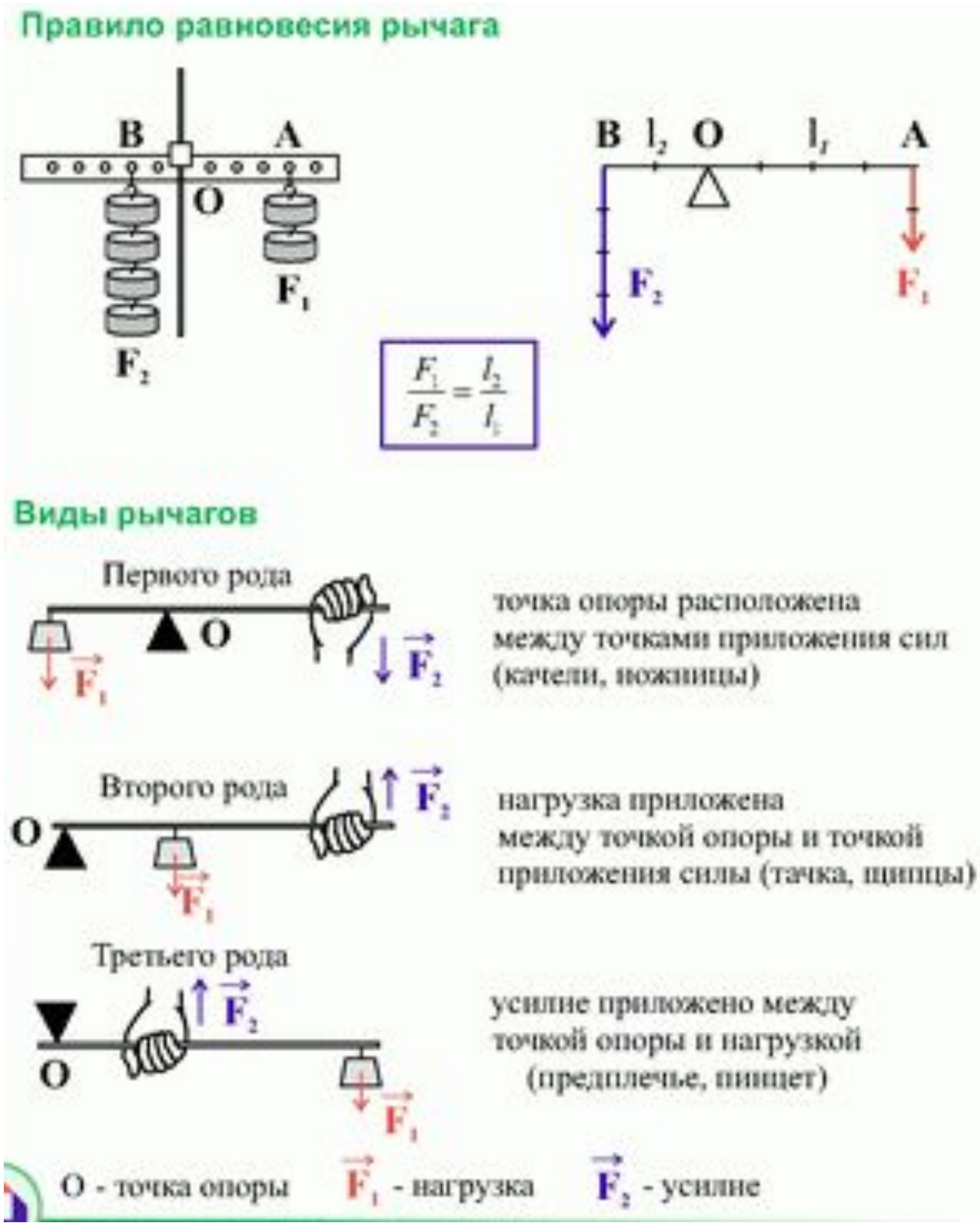
Пример. Определить положение центра тяжести однородной пластины с отверстием радиуса r.

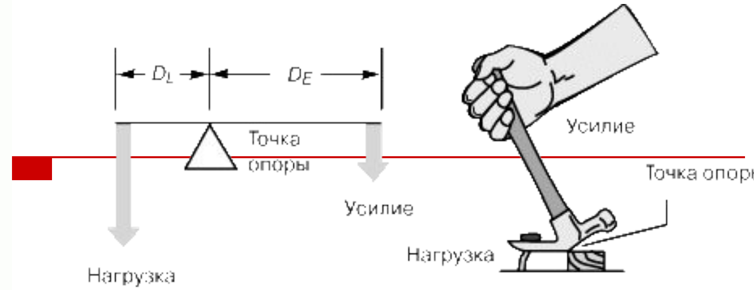
$$x_C = \frac{a \cdot b \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2}ac\left(b + \frac{c}{3}\right) - \pi r^2 \cdot \frac{b}{3}}{a \cdot b + \frac{1}{2}a \cdot c - \pi r^2};$$

$$y_C = \frac{a \cdot b \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \frac{a}{3} - \pi r^2 \frac{a}{2}}{a \cdot b + \frac{1}{2}a \cdot c - \pi r^2}.$$

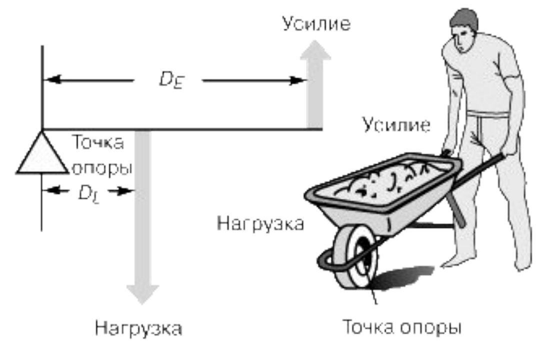
Площадь круга как отверстия взята со знаком «–»

16. РЫЧАГИ

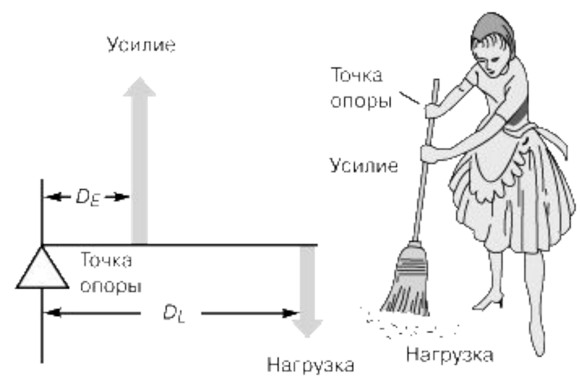




РЫЧАГ I РОДА (точка опоры между усилием и нагрузкой)



РЫЧАГ II РОДА (нагрузка между точкой опоры и усилием)



РЫЧАГ III РОДА (усилие между точкой опоры и нагрузкой)