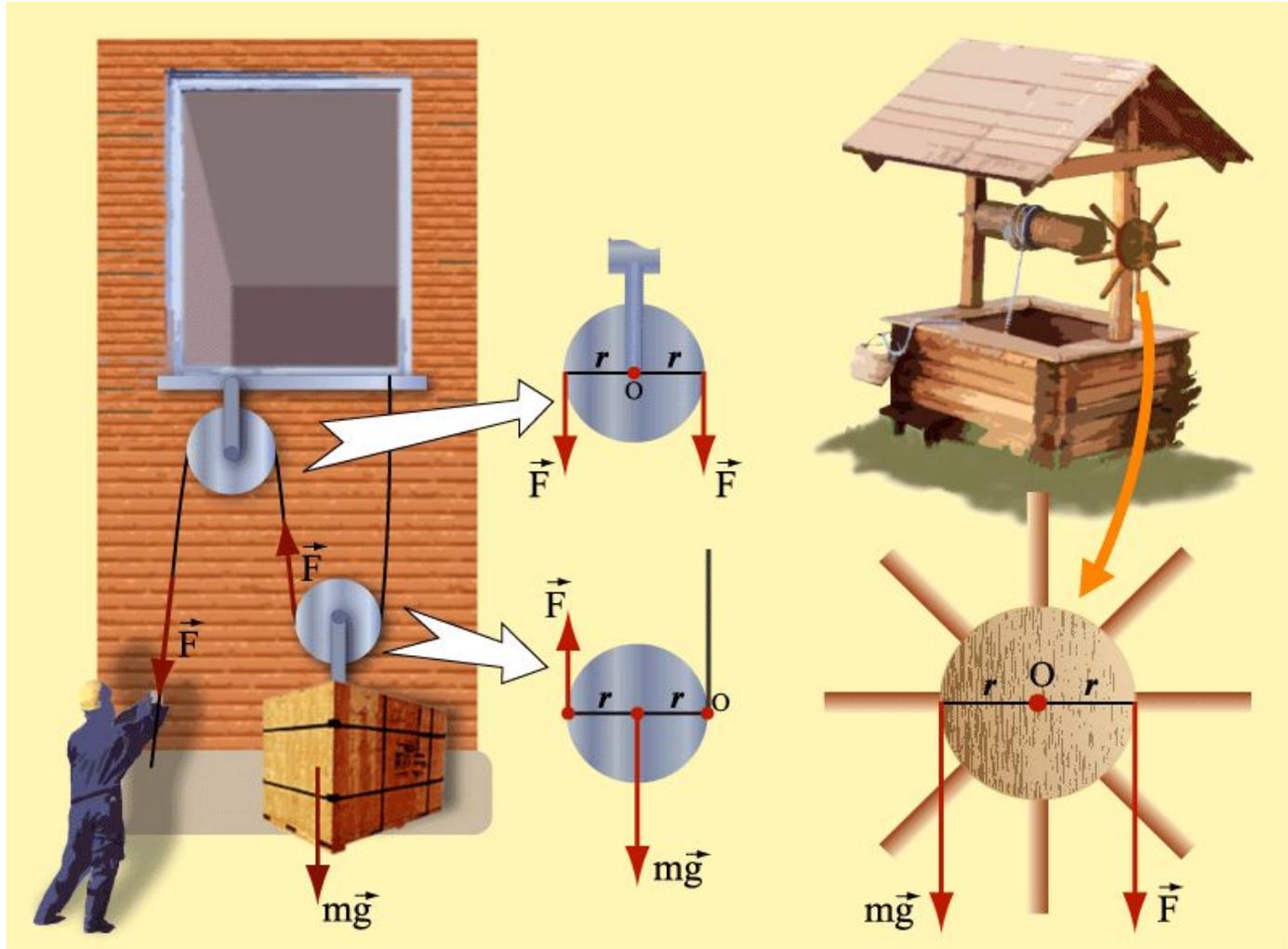


ТЕМА IV. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



1. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА

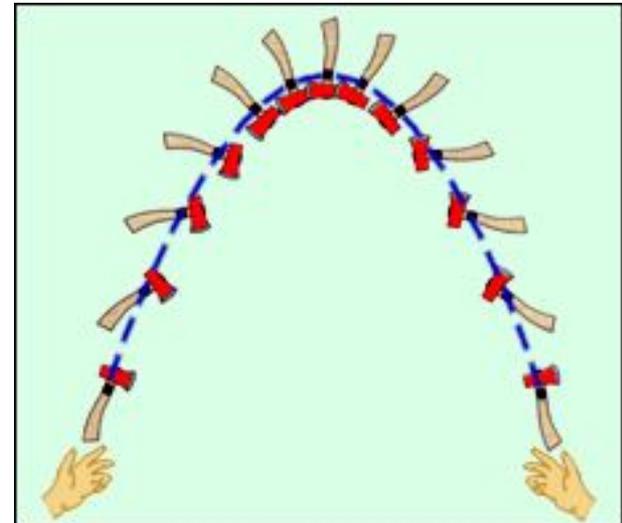
Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу (внешних) сил.

$$m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i; \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \vec{r}_c \sum_{i=1}^N m_i = m \vec{r}_c.$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = m \dot{\vec{r}}_c \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i = m \vec{V}_c.$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{V}}_i = m \dot{\vec{V}}_c \Rightarrow m \vec{a}_c = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$



2. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

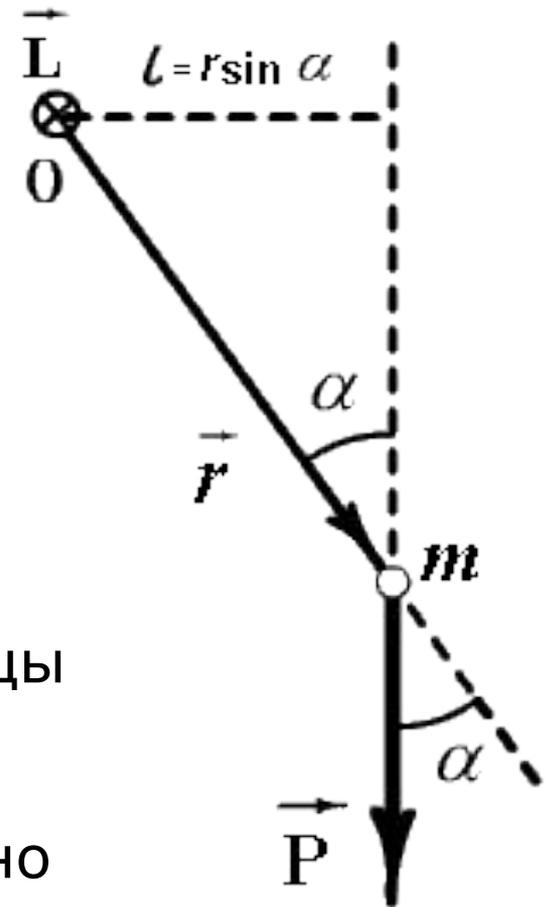
Моментом импульса частицы относительно некоторой точки O называется векторное произведение радиус-вектора частицы относительно точки O на импульс этой частицы

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times m\vec{V}].$$

Модуль вектора момента импульса частицы

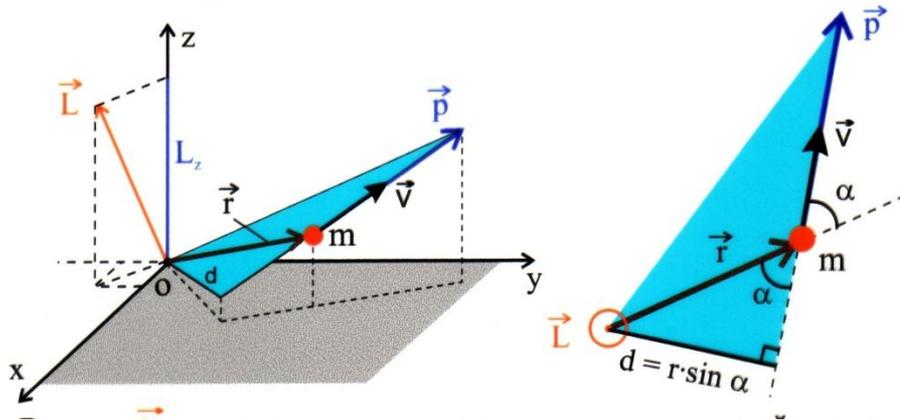
$$L = pr \sin \alpha = pl,$$

$l = r \sin \alpha$ – плечо импульса относительно точки O (длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию направления импульса). Рис. 13.16



3. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Момент импульса есть мера механического движения



Проекция вектора момента импульса частицы на некоторую ось z называется **моментом импульса частицы относительно этой оси**

$$L_z = [\vec{r} \times \vec{p}]_z.$$

Момент импульса частицы относительно точки – вектор, момент импульса частицы относительно оси – скаляр.

$$L_z = L \cos \beta = r p \sin \alpha \cos \beta.$$

α – угол между \vec{r} и \vec{p} , β – угол между \vec{L} и осью z.

$$[M] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot / = 1 \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}.$$

Моментом импульса системы частиц относительно оси z называется величина

$$L_z = \sum_{i=1}^N [r_i \times p_i]_z.$$

4. СВОЙСТВА МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

1. Псевдовектор. Направление момента импульса определяется
правилом

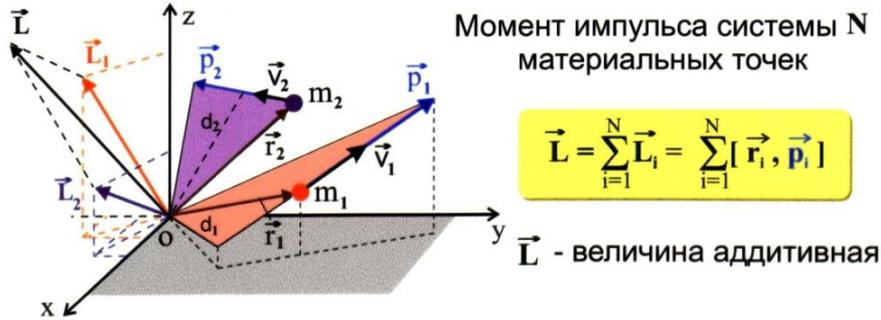
2. Аддитивность.

**3. Зависит от
выбора точки O.**

**4. Зависит от
системы отсчёта.**

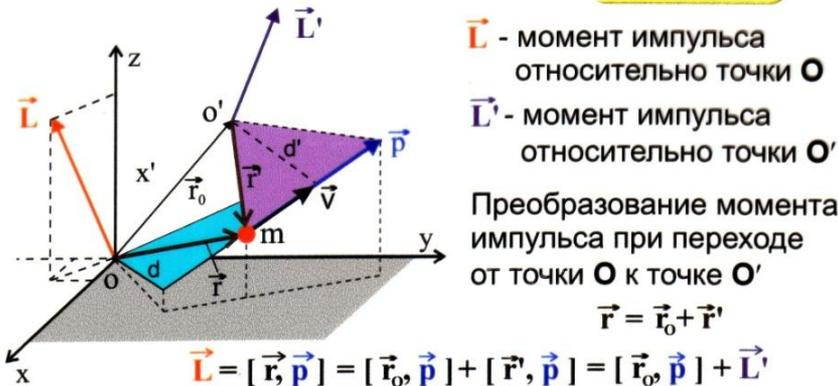
4. СВОЙСТВА МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Свойства момента импульса



Момент импульса зависит от выбора точки O в данной системе отсчета: $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$, $\vec{L}' = [\vec{r}', \vec{p}]$

$$\vec{L} \neq \vec{L}'$$



$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{r}_0, \vec{p}]$$

Так как импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ зависит от выбора системы отсчета, момент импульса тоже зависит от выбора системы отсчета

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

1. Псевдовектор.

2. Аддитивность.

3. Зависит от выбора точки O .

4. Зависит от системы отсчёта.

5. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Моментом силы относительно некоторой точки O называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы относительно точки O на действующую силу

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

Модуль вектора момента силы

$$M = Fr \sin \alpha = Fl,$$

$l = r \sin \alpha$ – плечо силы относительно точки O (длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы).

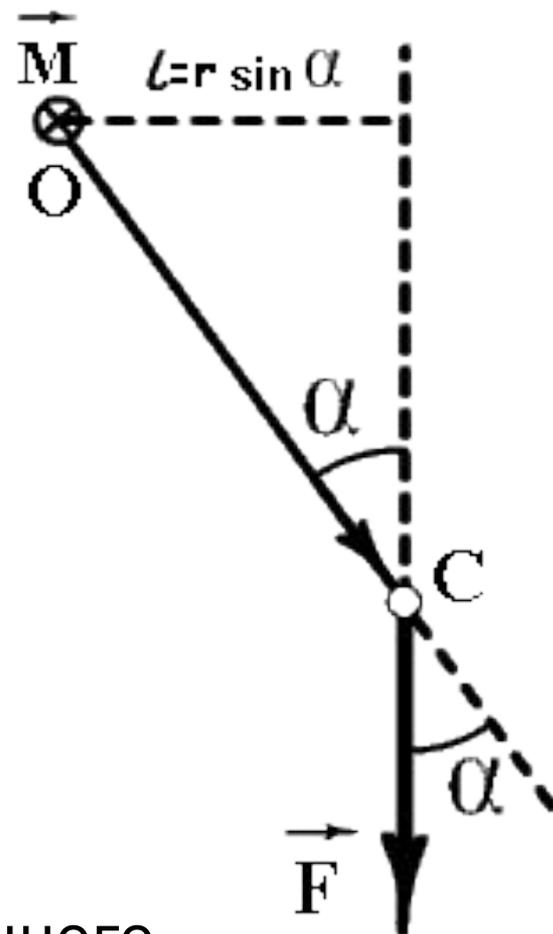


Рис. 13.9

6. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Проекция вектора момента силы на некоторую ось z называется моментом силы относительно этой оси

$$M_z = \left[\vec{r} \times \vec{F} \right]_z \Rightarrow$$

$$M_z = M \cos \beta = rF \sin \alpha \cos \beta.$$

α – угол между \vec{r} и \vec{F} .

β – угол между \vec{M} и осью z.

$$[M] \neq \Lambda \cdot 1 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

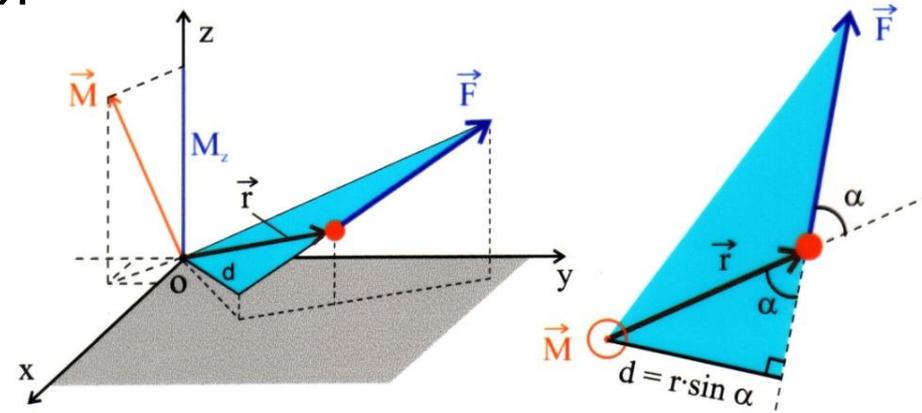
Момент силы

Момент силы \vec{F} относительно точки O есть *псевдовектор*:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

\vec{r} – радиус-вектор точки приложения силы

Момент силы есть величина, характеризующая вращательный эффект силы



Вектор \vec{M} перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы \vec{F} и \vec{r}

$$M = r \cdot F \cdot \sin(\hat{r}, \hat{F}) = F \cdot d \quad d = r \cdot \sin(\hat{r}, \hat{F}) - \text{плечо силы}$$

Проекция вектора \vec{M} на некоторую ось Z называется моментом силы M_z относительно оси

Для системы м.т. полный момент $\vec{M}_{\text{СИСТЕМЫ}}$ относительно точки O:

$$\vec{M}_{\text{СИСТЕМЫ}} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

7. КОМПОНЕНТЫ МОМЕНТА СИЛЫ

Момент силы относительно оси

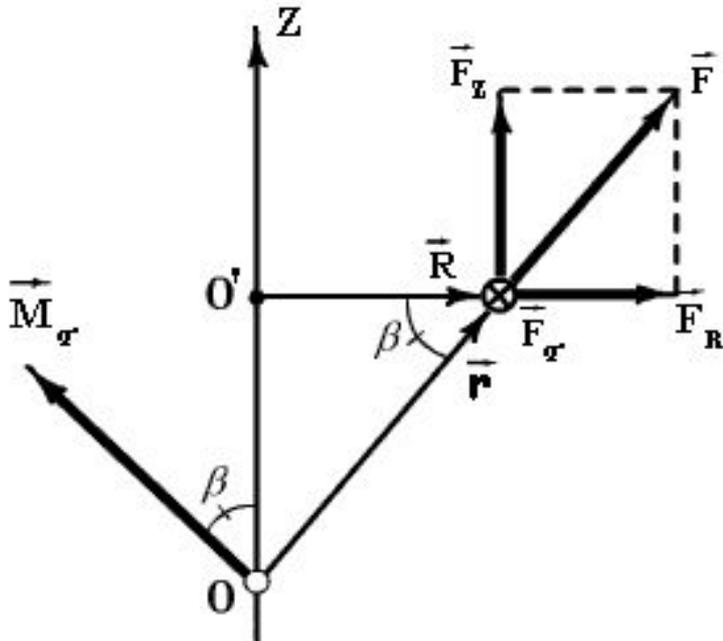
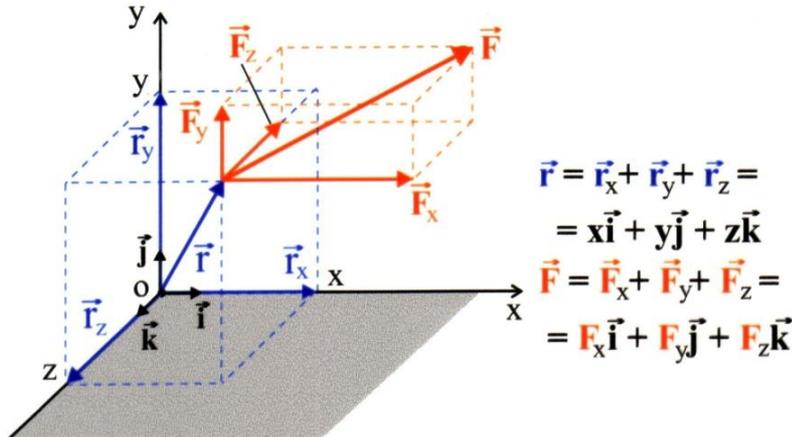


Рис. 13.11

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(yF_z - zF_y) +$$

$$+ \vec{j}(zF_x - xF_z) +$$

$$+ \vec{k}(xF_y - yF_x).$$

Вклад в M_z даёт только компонент силы, перпендикулярный плоскости рисунка.

8. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ (I)

Запишем уравнение движения для отдельной частицы и умножим его векторно на радиус-вектор этой частицы относительно некоторой точки O:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \left[\vec{r} \times m \frac{d\vec{V}}{dt} \right] = \left[\vec{r} \times \vec{F} \right] \Rightarrow m \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right] = \vec{M}.$$

Рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times \vec{V} \right] = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} \right] = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right],$$

так как $\left[\vec{V} \times \vec{V} \right] = 0.$

8. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ (II)

Мы доказали, что
$$\frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times \vec{V} \right] = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right],$$

следовательно уравнение
$$m \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right] = \vec{M}$$

примет вид
$$m \frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times \vec{V} \right] = \vec{M} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times m\vec{V} \right] = \vec{M} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times \vec{p} \right] = \vec{M} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Скорость приращения момента импульса частицы равна действующему на частицу моменту сил.

9. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

$$m_i \dot{\vec{V}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i; \quad \left[\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{V}}_i \right] = \left[\vec{r}_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{f}_{ij} \right] + \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right].$$

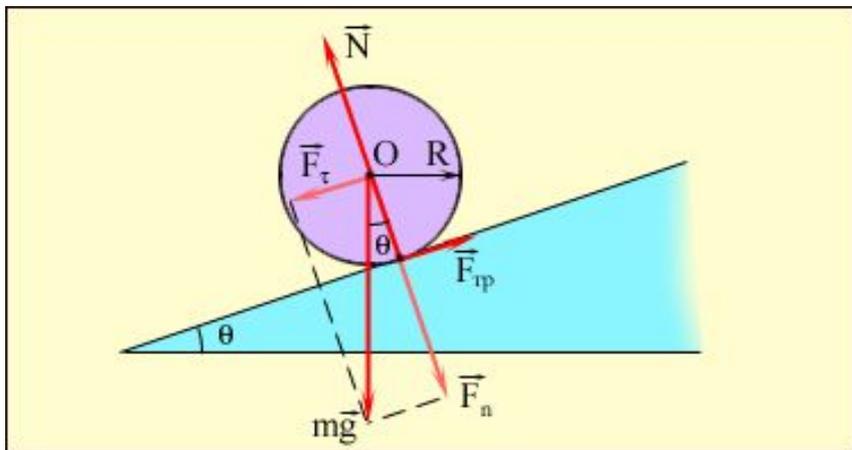
$$\frac{d}{dt} \left[\vec{r} \times m \vec{V} \right] = \left[\dot{\vec{r}} \times m \vec{V} \right] + \left[\vec{r} \times m \dot{\vec{V}} \right] = \left[\vec{V} \times m \vec{V} \right] + \left[\vec{r} \times m \dot{\vec{V}} \right] = \left[\vec{r} \times m \dot{\vec{V}} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{M}_{ij}^* + \vec{M}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i, j=1; i \neq j}^N \vec{M}_{ij}^* + \sum_{i=1}^N \vec{M}_i.$$



$$\vec{M}_{ij}^* + \vec{M}_{ji}^* = 0 \Rightarrow \sum_{i, j=1; i \neq j}^N \vec{M}_{ij}^* = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$



10. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

$$d\vec{L} = \vec{M}dt;$$

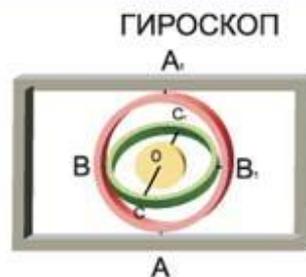
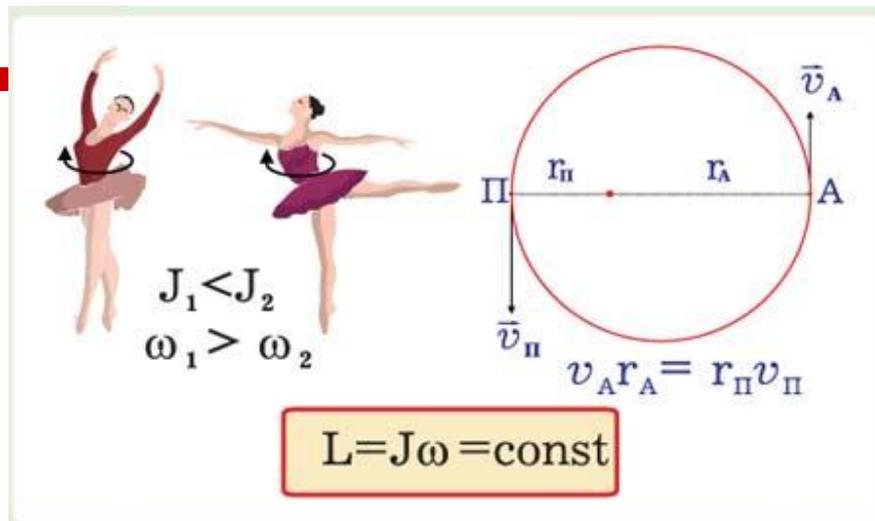
$$\vec{M} = 0 \Rightarrow d\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Момент импульса замкнутой (изолированной) системы есть величина постоянная.

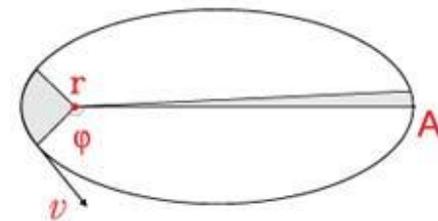
$$\vec{M} \neq 0; \quad M_z = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{L} \neq const;$$

$$L_z = const.$$

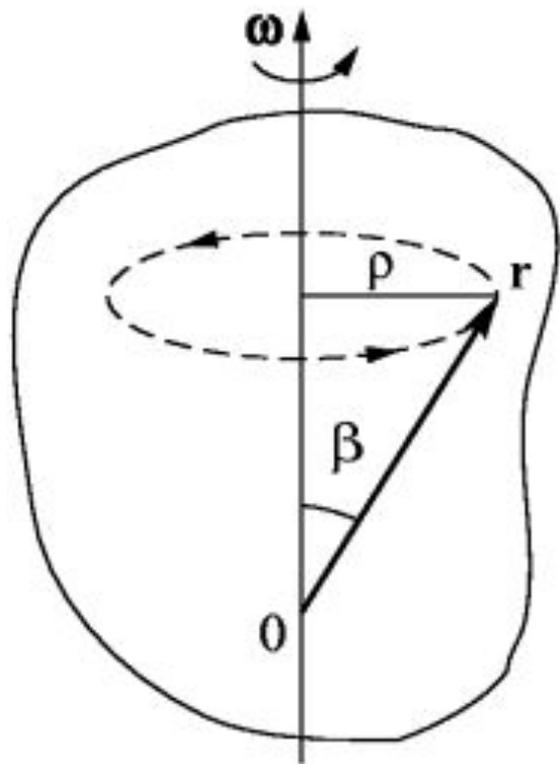


ВЕРТОЛЕТ



$$L = mvr \sin \varphi = const$$

11. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА



$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i \right] = m_i \left[\vec{r}_i \times \vec{V}_i \right].$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{V}_i \Rightarrow L_i = m_i r_i V_i; \quad V_i = \omega R_i \Rightarrow$$

$$L_{zi} = L_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega R_i \sin \beta_i;$$

$$r_i \sin \beta_i = R_i \Rightarrow L_{zi} = m_i R_i^2 \omega_z.$$

$$L_z = \sum_{i=1}^N L_{zi} = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum_{i=1}^N m_i R_i^2; \quad I \equiv \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \Rightarrow L_z = I \omega_z.$$

12. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N M_i \Rightarrow \frac{dL}{dt} = M.$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N L_{zi} = \sum_{i=1}^N M_{zi} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

$$L_z = I\omega_z \Rightarrow \frac{d}{dt}(I\omega_z) = M_z \Rightarrow I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z.$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon_z \Rightarrow I\varepsilon_z = M_z.$$

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

$\varepsilon = \frac{M}{J}$

$\varepsilon \sim M$ $\varepsilon \sim \frac{M}{J}$

МОМЕНТ СИЛЫ

$M = Fr \sin \alpha = F_2 r = Fd$

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

$J_o = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$
o - центр масс

ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

$J_d = J_o + md^2$

13. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТ ИНЕРЦИИ



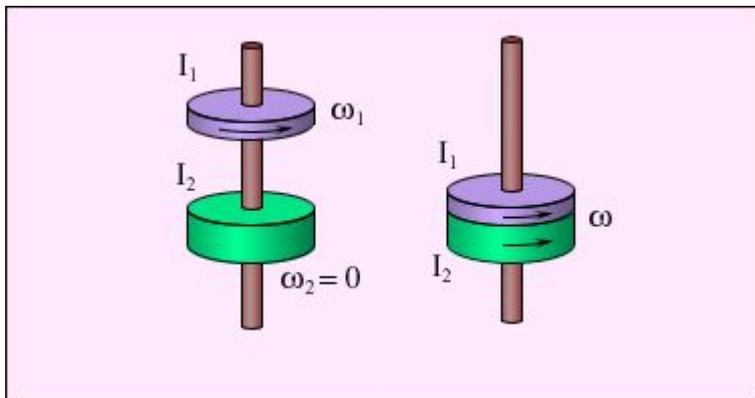
В общем случае \vec{L} и $\vec{\omega}$ не совпадают по направлению. Для однородного тела, симметричного относительно оси вращения $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const.}$$

$$M_z = 0 \Rightarrow L_z = I\omega_z = \text{const.}$$

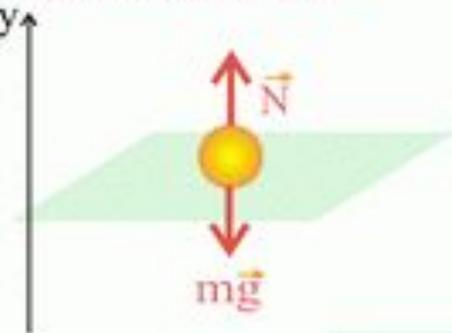
$$I_1\omega_{z1} = I_2\omega_{z2} = \text{const.};$$

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega.$$



14. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА

Материальная точка



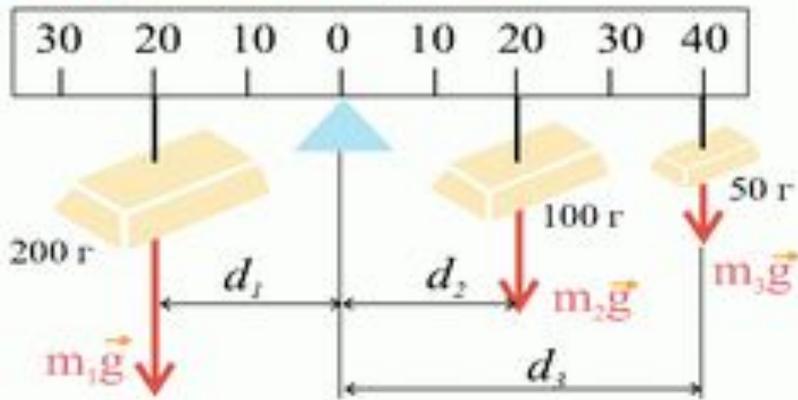
$$\vec{N} + m\vec{g} = 0$$

$$\text{ou) } N - mg = 0$$

$$N = mg$$

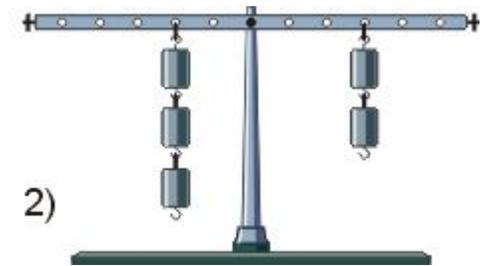
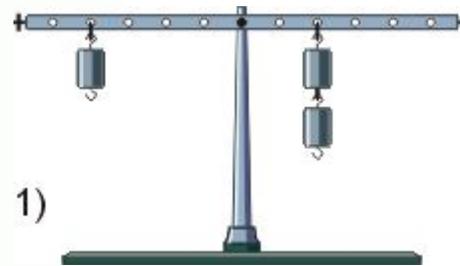
$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Тело с неподвижной осью вращения



$$m_2 g d_2 + m_3 g d_3 - m_1 g d_1 = 0$$

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \sum M_i = 0$$



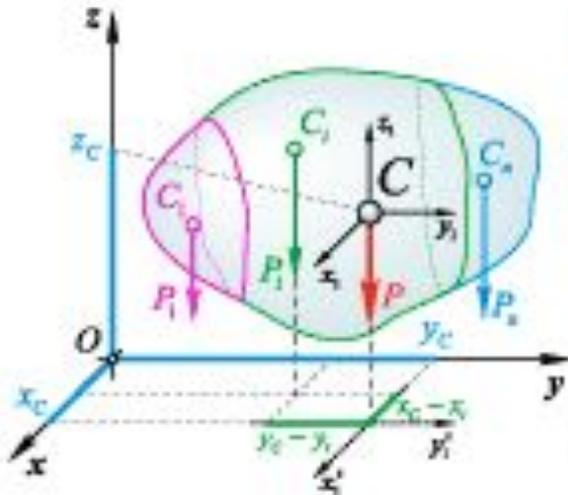
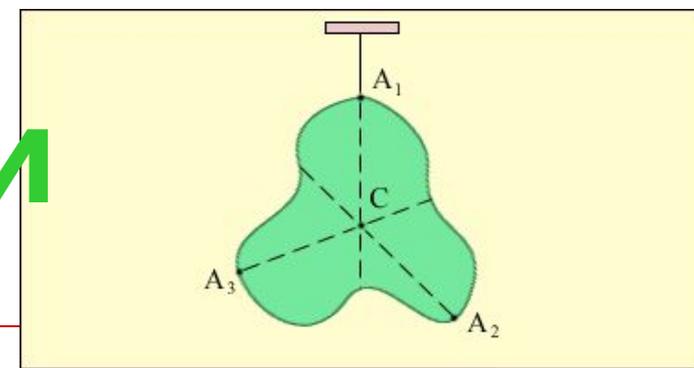
Условия равновесия тел

$M_1 = F_1 \cdot d_1 > 0$
 $M_2 = -F_2 \cdot d_2 < 0$

1) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0.$

2) $M_1 + M_2 + \dots = 0.$

15. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ



Центр тяжести — точка твердого тела, при закреплении которой само тело находится в равновесии в **любом** положении.

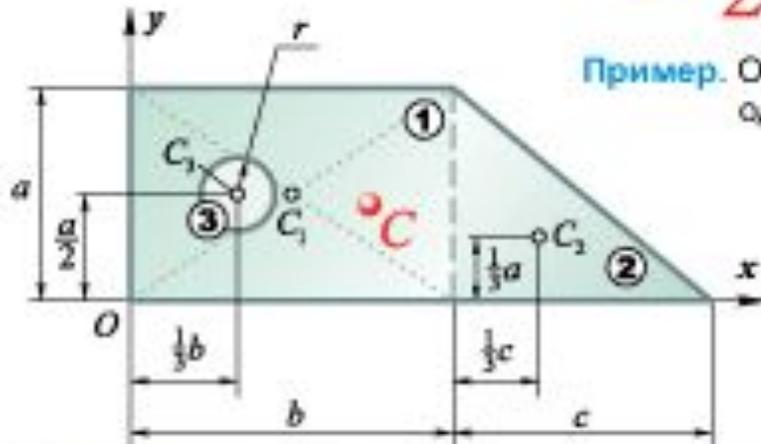
Сумма моментов сил веса частей тела относительно его центра тяжести равна нулю в **любом** положении тела:

$$\sum_i \text{мом}_{A_1} \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g (x_c - x_i) = 0$$

$$\sum_i \text{мом}_{A_2} \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g (y_c - y_i) = 0$$

Следовательно, координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad \text{по аналогии } z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$



Пример. Определить положение центра тяжести однородной пластины с отверстием радиуса r .

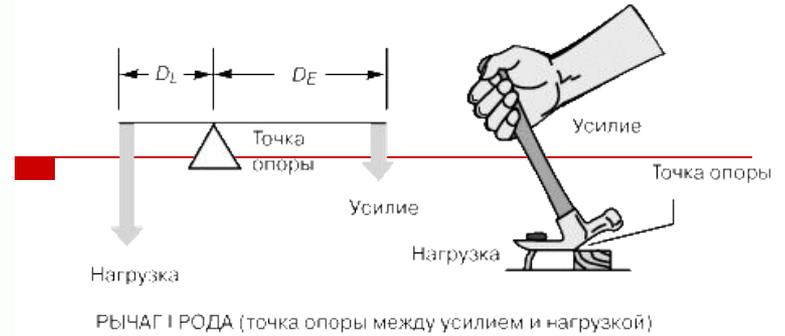
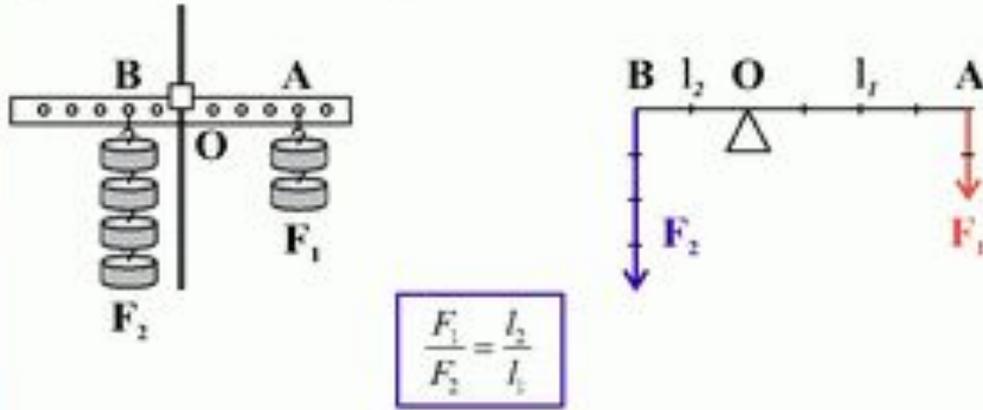
$$x_c = \frac{a \cdot b \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} a c \left(b + \frac{c}{3} \right) - \pi r^2 \cdot \frac{b}{3}}{a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c - \pi r^2};$$

$$y_c = \frac{a \cdot b \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \frac{a}{3} - \pi r^2 \cdot \frac{a}{2}}{a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c - \pi r^2}.$$

Площадь круга как отверстия взята со знаком «-»

16. РЫЧАГИ

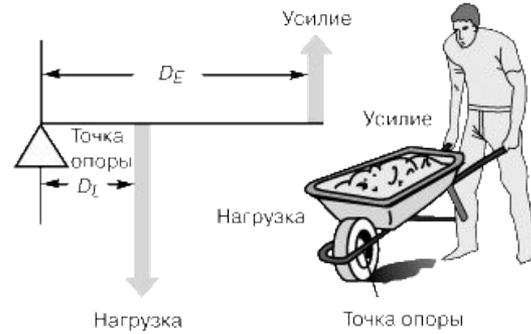
Правило равновесия рычага



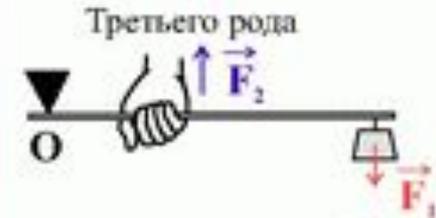
Виды рычагов



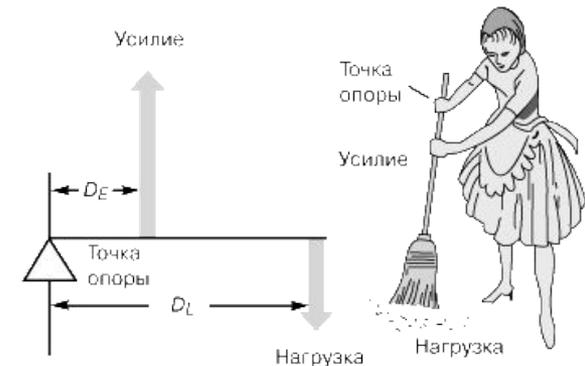
точка опоры расположена между точками приложения сил (картели, ножницы)



нагрузка приложена между точкой опоры и точкой приложения силы (тачка, щипцы)



усилие приложено между точкой опоры и нагрузкой (предплечье, пинцет)



O - точка опоры \vec{F}_1 - нагрузка \vec{F}_2 - усилие