БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА ОМСКА
«ЛИЦЕЙ № 166»

Способы решения тригонометрических уравнений в профильном классе

(из опыта работы)

Калимбетова Татьяна Ивановна
учитель математики высшей квалификационной категории

Спецкурс «Готовимся к ЕГЭ по математике»

№	Тема	Количество часов	Задача ЕГЭ
1	Вычисления и преобразования	2	
2	Решение текстовых задач с оптимальным условием	2	
3	Решение задач на считывание информации, представленной в виде графика	2	
4	Вычисление площадей плоских фигур	2	
5	Решение задач на составление уравнения или неравенства	4	
6	Решение текстовых задач на «движение» или «работу»	6	
7	Задачи на вычисление элементов прямоугольного треугольника	2	
8	Задачи на вписанную и описанную окружность	2	
9	Решение уравнений	5	
10	Примеры использования вероятностей и статистики	5	
11	Решение тригонометрических уравнений	8	
12	Решение систем тригонометрических уравнений	4	
13	Решение комбинированных систем неравенств	6	
14	Решение стереометрических задач	6	
15	Решение планиметрических задач	4	
16	Решение комбинированных задач с параметром	2	

Требования к начальному уровню знаний, умений и навыков учащихся

1. Знать основные понятия и формулы тригонометрии

2. Владеть техникой вычислений

3. Проводить тригонометрические преобразования

4. Владеть приемами решения простейших тригонометрических уравнений

5. Уметь строить графики простейших тригонометрических функций

Основные этапы формирования умений решать тригонометрические уравнения

1. Подготовительный

   Цель: формировать умения использовать тригонометрический круг или график функции для решения уравнений

2. Простейшие тригонометрические уравнения

   Цель: формировать умения решать простейшие тригонометрические уравнения и выполнять отбор корней уравнения с помощью тригонометрического круга и графика функции

3. Введение других видов и установление их приемов

   Цель: формировать умения классифицировать тригонометрические уравнения с опорой на методы их решения по принципу «от простого к сложному»

Методы решения тригонометрических уравнений

1. Линейные относительно простейших тригонометрических уравнений:

   -сводящиеся к простейшим;

   -вида: acosx+bsinx=c;

2. Сводящиеся к алгебраическим уравнениям с помощью замены:

   -уравнения, сводящиеся к многочленам от одной тригонометрической функции;

   -однородные уравнения;

   -симметрические уравнения;

   -применение универсальной тригонометрической подстановки;

3. Метод разложения на множители

4. Функциональные методы

5. Комбинированные уравнения

6. Системы уравнений

Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

1. Арифметический:
   - отбор корней на заданном промежутке методом подбора;
2. Алгебраический метод
3. Геометрический:
   - решение с помощью единичной окружности;
   - решение с применением оси тангенсов и котангенсов;
4. Функционально-графический

Арифметический способ: отбор корней на заданном промежутке методом подбора

Задача: Решить уравнение $2\sin^2 x+(2-\sqrt{2})\cos x+\sqrt{2}-2=0$ на промежутке $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$

Решение:

$$2(1-\cos^2 x)+(2-\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{2}-2)=0$$

$$-2\cos^2 x+2+(2-\sqrt{2})\cos x+\sqrt{2}-2=0$$

$$2\cos^2 x-(2-\sqrt{2})\cos x-\sqrt{2}=0$$

$$\cos x=t, -1\le\cos x\le 1,\ |t|\le 1$$

$$2t^2-(2-\sqrt{2})t-\sqrt{2}=0$$

$$D=(2-\sqrt{2})^2+4\cdot 2\cdot\sqrt{2}=4-4\sqrt{2}+2+8\sqrt{2}=6+4\sqrt{2}=2^2+2\cdot 2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(2+\sqrt{2})^2$$

(1)

$$t_1=\frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{4}{4}=1$$

$$\cos x=1$$

$$x=2\pi n, n\in Z$$

$$n=1,\ x=\cancel{2\pi}$$

(2)

$$t_2=\frac{2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{4}=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\pm(\pi-\frac{\pi}{4})+2\pi k,\ k\in Z$$

$$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$$

$$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$$

$$k=1,\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi=\boxed{\frac{11\pi}{4}}$$

$$k=2,\ x=\frac{3\pi}{4}+4\pi=\cancel{\frac{19\pi}{4}}$$

$$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$$

$$k=1,\ x=2\pi-\frac{3\pi}{4}=\cancel{\frac{5\pi}{4}}$$

$$k=2,\ 4\pi-\frac{3\pi}{4}=\boxed{\frac{13\pi}{4}}$$

Алгебраический способ

Задача: Решить уравнение $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$ на промежутке $[\pi, 3\pi]$

Решение:

$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x - 1 = 0$

$-2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$\cos x = t$, $-1 \le \cos x \le 1$, $|t| \le 1$

$2t^2 + 3t + 1 = 0$

$D = 1$

(1) $t_1 = -\frac{1}{2}$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

а. $\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 3\pi$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} \le 2\pi n \le 3\pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} \le 2\pi n \le \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{1}{6} \le n \le \frac{7}{6}$$

$$n = 1$$

$$\boxed{x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi, \ x = \frac{8\pi}{3}}$$

б. $\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 3\pi$

$$n = 1$$

$$\boxed{x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi, \ x = \frac{4\pi}{3}}$$

(2) $t_2 = -1$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in Z$$

$$k = 1 \quad \boxed{x = 3\pi}$$

$$k = 0 \quad \boxed{x = \pi}$$

Геометрический способ: решение с помощью единичной окружности

Задача: Решить уравнение $\dfrac{6\cos^2 x - 5\sqrt{2}\cos x + 2}{\lg(tgx)} = 0$

Решение:

$$\begin{cases} 6\cos^2 x - 5\sqrt{2}\cos x + 2 = 0 \\ \lg(tgx) \neq 0,\ tgx > 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

(1) $6\cos^2 x - 5\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$

$\cos x = t,\ -1 \le \cos x \le 1,\ |t| \le 1$

$6t^2 - 5\sqrt{2}t + 2 = 0$

$D = 50 - 4\cdot 6 \cdot 2 = 2$

a. $t_1 = \dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{2}}{12} = \dfrac{6\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

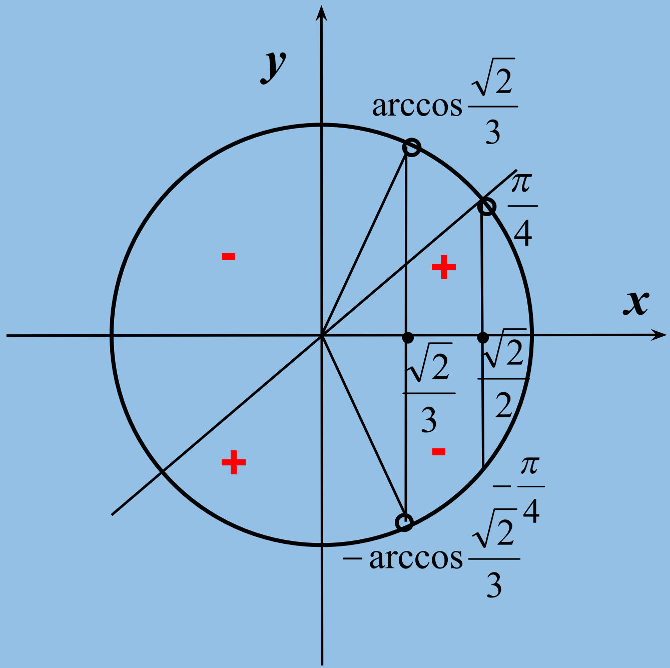
$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

b. $t_2 = \dfrac{4\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3} + 2\pi n, n \in Z$



(2) $\lg(tgx) \neq 0$

$tg(x) \neq 1$

$x \neq \dfrac{\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z$

(3) $\cos x \neq 0$

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$

$$\boxed{x = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3} + 2\pi n, n \in Z}$$

Геометрический способ: решение с применением оси тангенсов или котангенсов

Задача: Решить уравнение $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ на промежутке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$

Решение:

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0 \quad / \cos^2 x \neq 0$$

$$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0$$

$$tgx = y$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$y_1 + y_2 = 2 \qquad y_1 = 3$$

$$y_1 \cdot y_2 = -3 \qquad y_2 = -1$$

(1) $tgx = -1$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

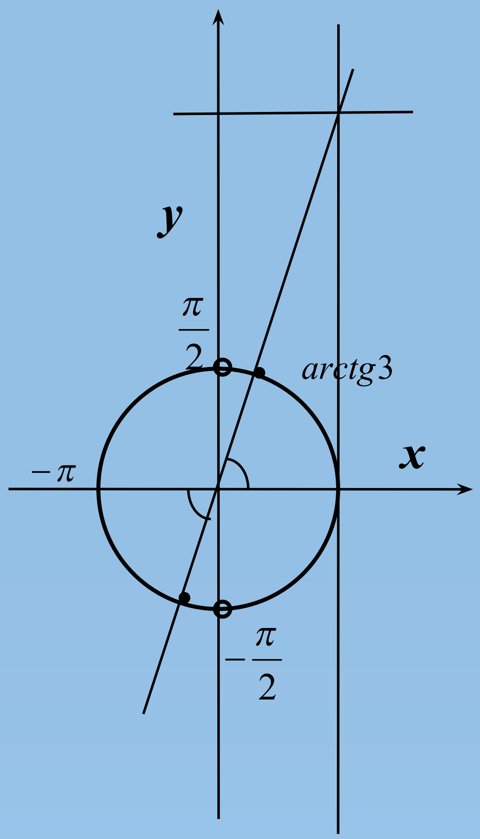
$$k = 0,\ x = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

$$k = 1,\ x = \pi - \frac{\pi}{4} = \cancel{\frac{3\pi}{4}}$$

(2) $tgx = 3$

$$x = arctg3 + \pi n,\ n \in Z$$

$$\boxed{x = arctg3} \quad \boxed{x = -\pi + arctg3}$$

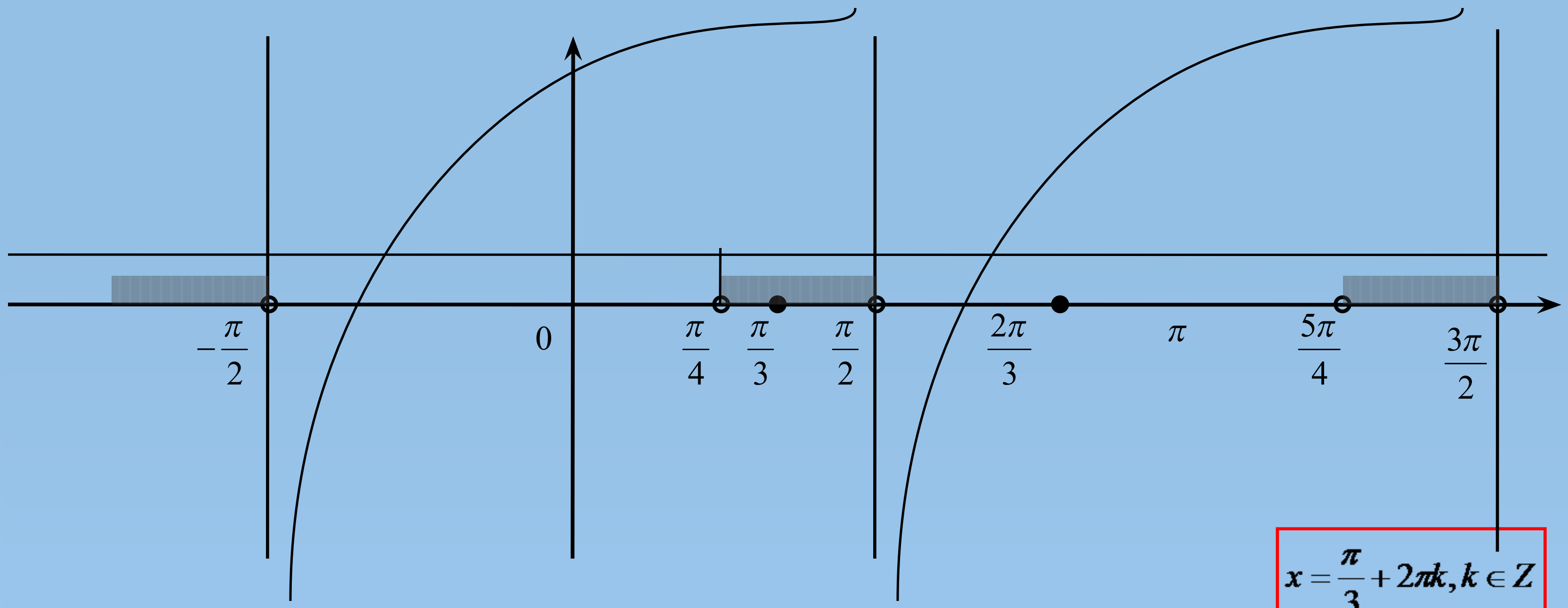


Функционально-графический способ

Задача: Найти корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $tgx > 1$

Решение:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ tgx > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z \\ tgx > 1 \end{cases}$$



$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z}$$

Список литературы

1. Звавич *В.И., Пигарев Б.П.* Тригонометрические уравнения //Математика в школе. 1995. № 2. С.23-33
2. *Золотухин Е.П.* Замечания о решении уравнений вида *asinx+bcosx=c* //Математика в школе. 1991. № 3. С.84.
3. *Е.И. Лященко* и др. Методические рекомендации по формированию ведущих понятий курса математики. Ленинград, 1988. – 72 с.
4. *Мирошин В*. Отбор корней в тригонометрических уравнениях.// Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 17, 2006г. 5. *Смоляков А.Н., Севрюков П.Ф.* Приемы решения тригонометрических уравнений //Математика в школе. 2004. № 1. С. 24-26.
6. *Филатов В.Г.* О потере корней при решении тригонометрических уравнений //Математика в школе. 1991. №2. С.57-59.
7. *Шабашова О.В.* Приемы отбора корней в тригонометрических уравнениях //Математика в школе. 2004. №1. С.20-24.
8. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней. Математика ЕГЭ 2012.

Спасибо
за
внимание!