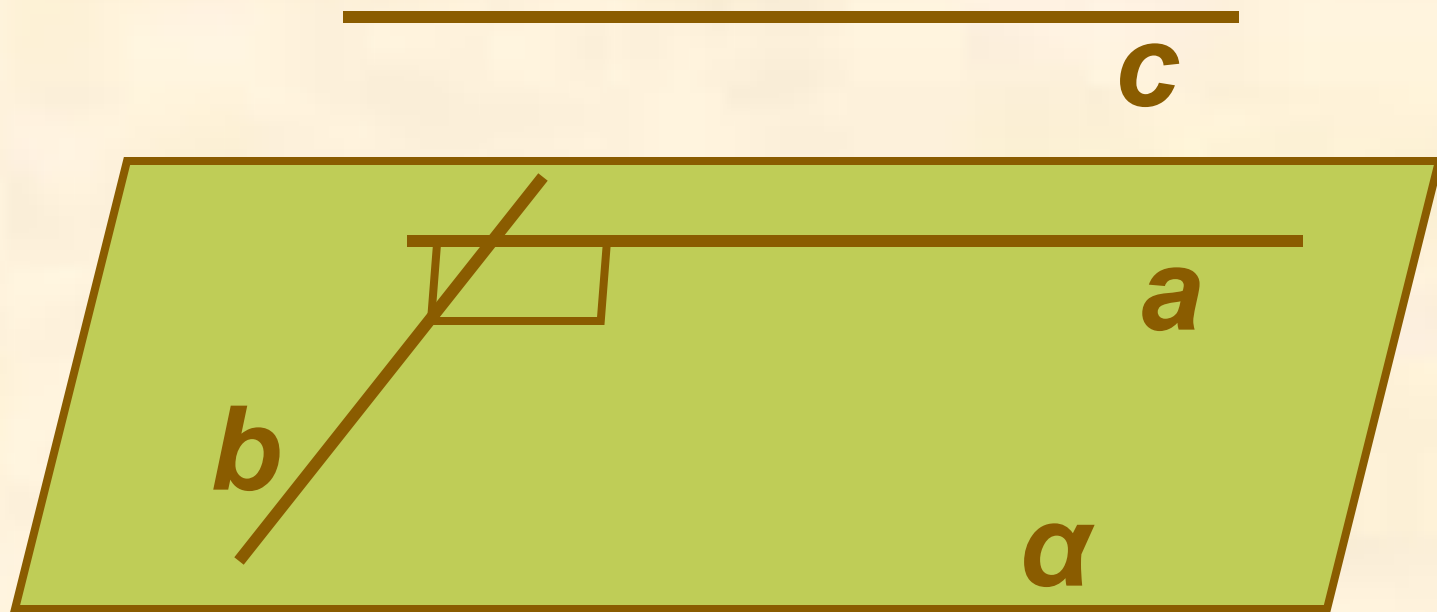


# Перпендикулярность прямых и плоскостей

---

# Перпендикулярные прямые в пространстве

*Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$*



$a \perp b$

$c \perp b$

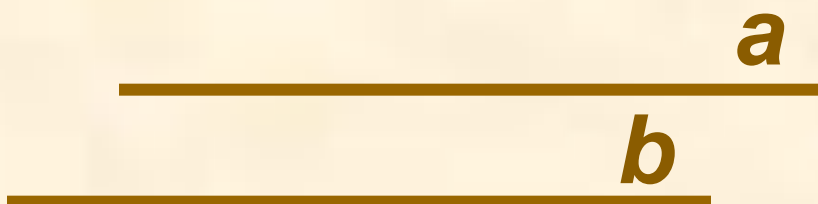
$b$

$b$



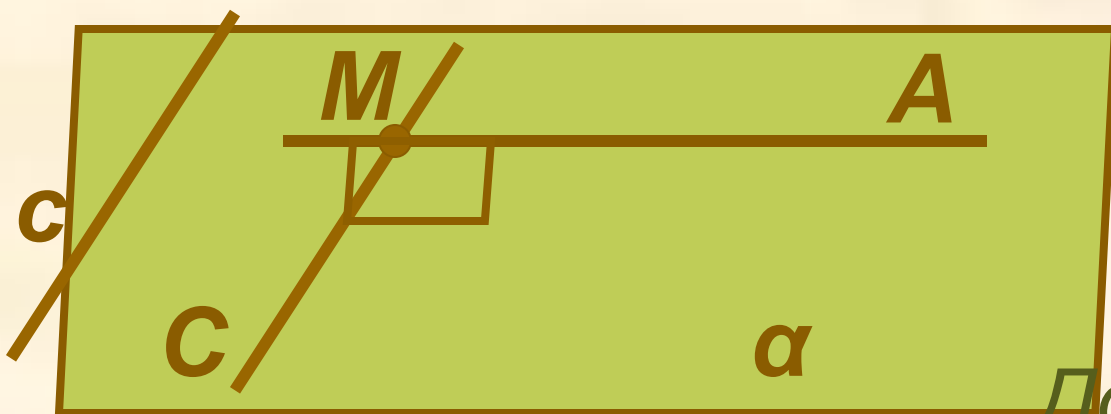
# Лемма

*Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.*



Дано:  $a \parallel b$ ,  $a \perp c$

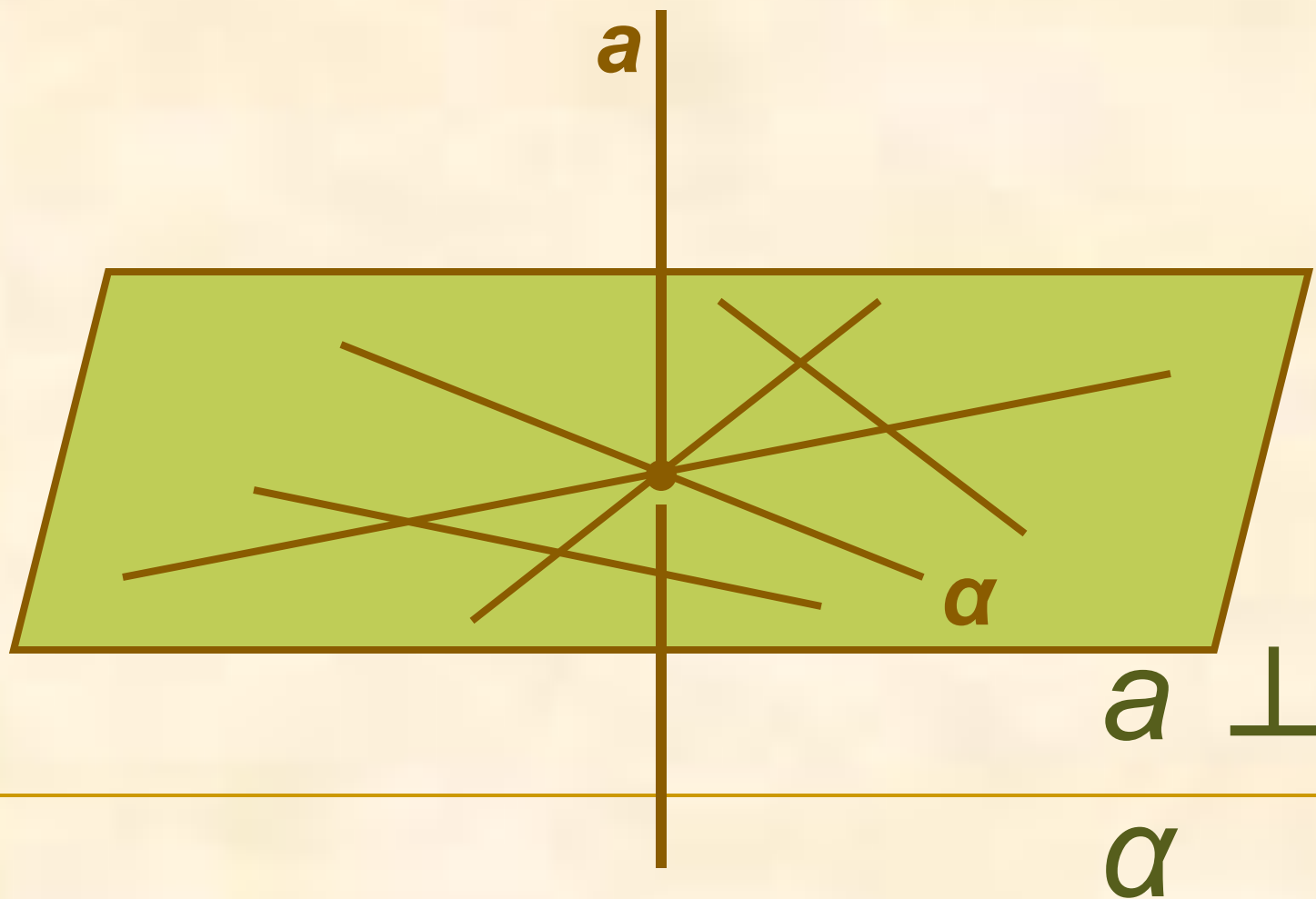
Доказать:  $b \perp c$



Доказательство:

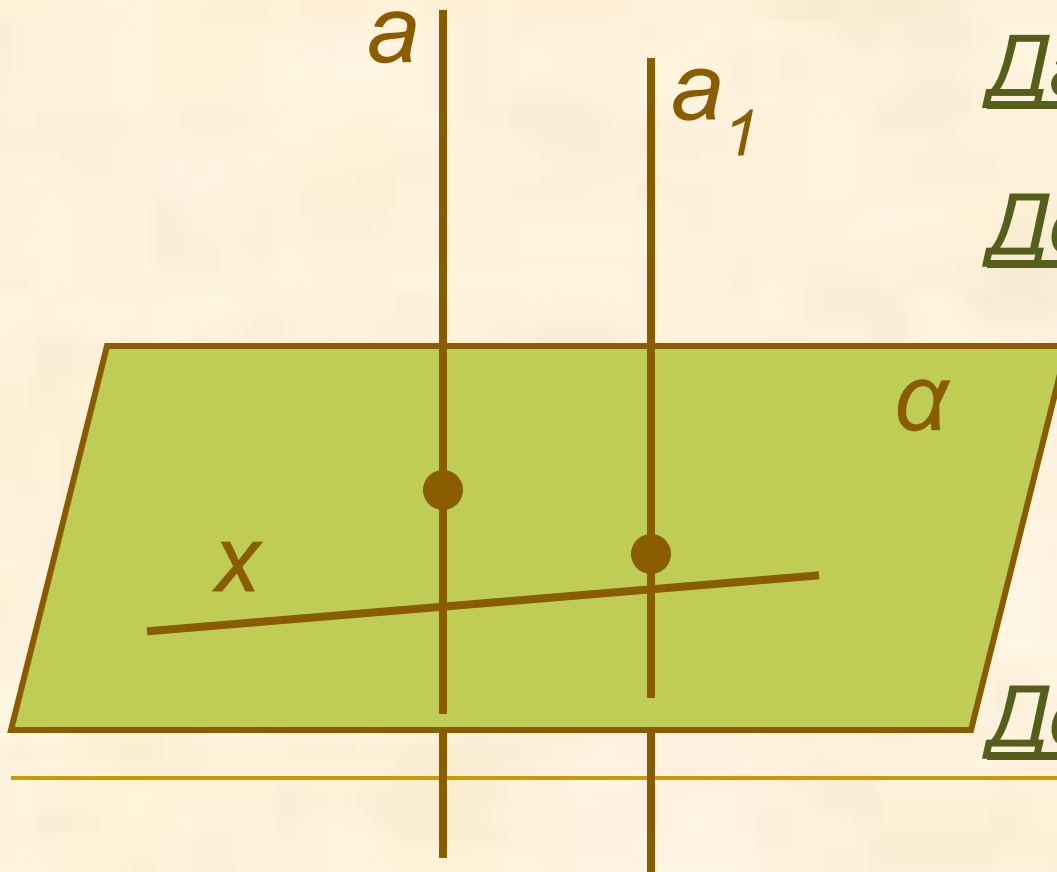


*Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости*



# Теорема 1

*Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.*



Дано:  $a \parallel a_1; a \perp \alpha$

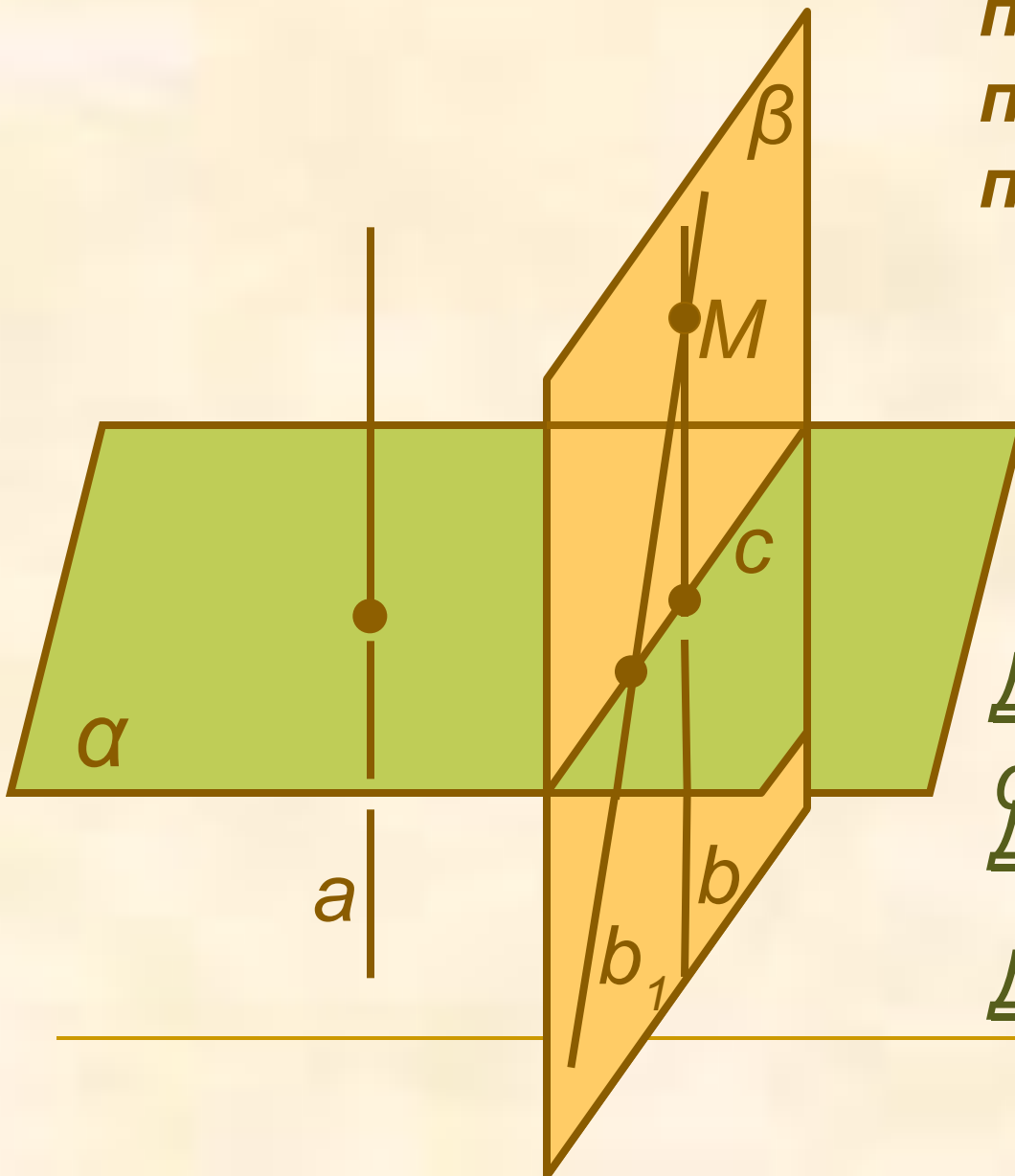
Доказать:  $a_1 \perp \alpha$

Доказательство:



## Теорема 2

*Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.*



Дано:  $a \perp \alpha$ ;  $b \perp \alpha$

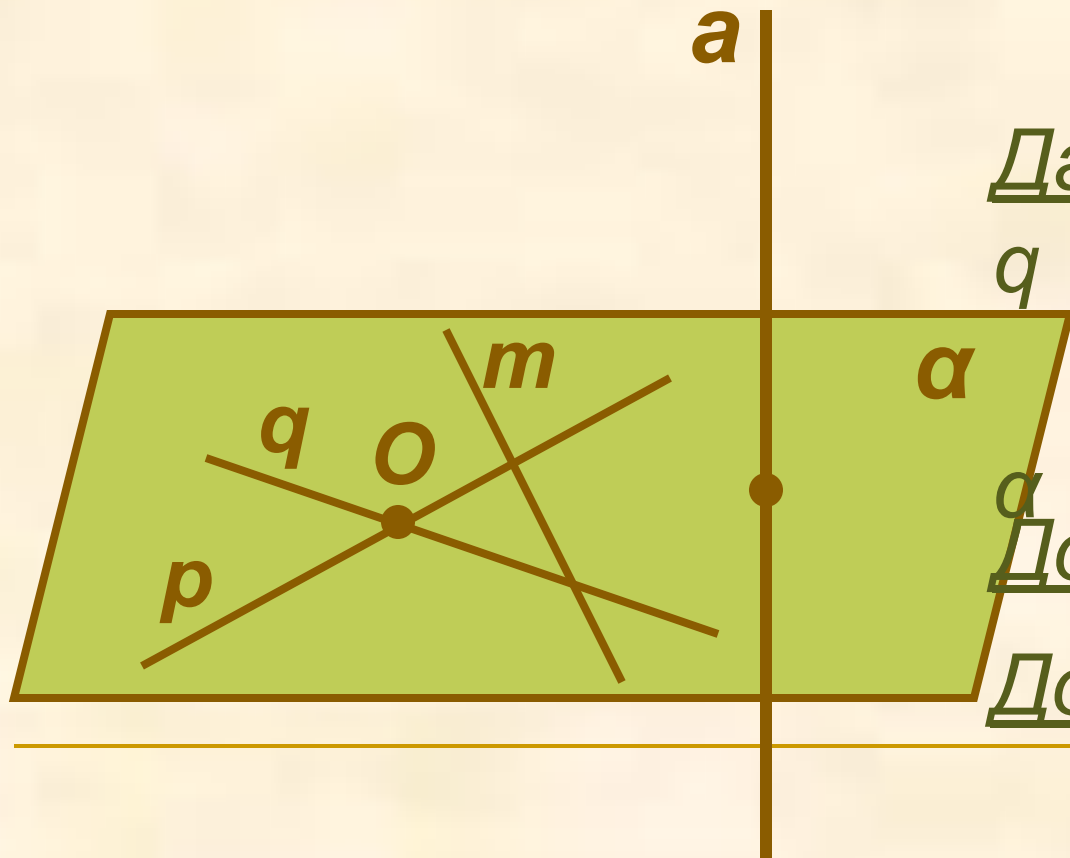
Доказать:  $a \parallel b$

Доказательство:



# Признак перпендикулярности прямой и плоскости

*Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*



Дано:  $a \perp p; a \perp$

$q$

$p \subset \alpha; q \subset$

$\alpha$

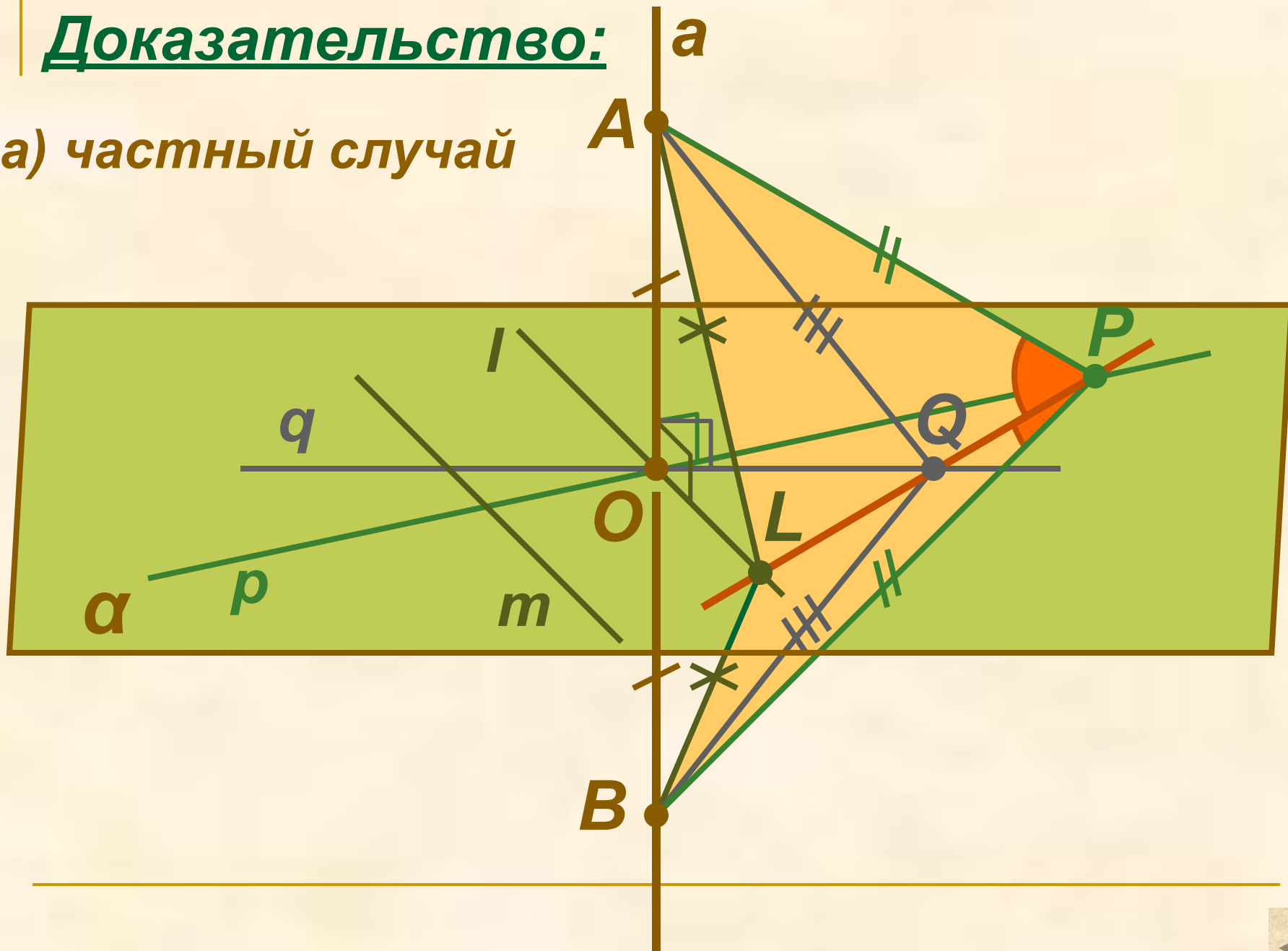
Доказать:  $a \perp \alpha$   
 $p \cap q = O$

Доказательство:



# Доказательство:

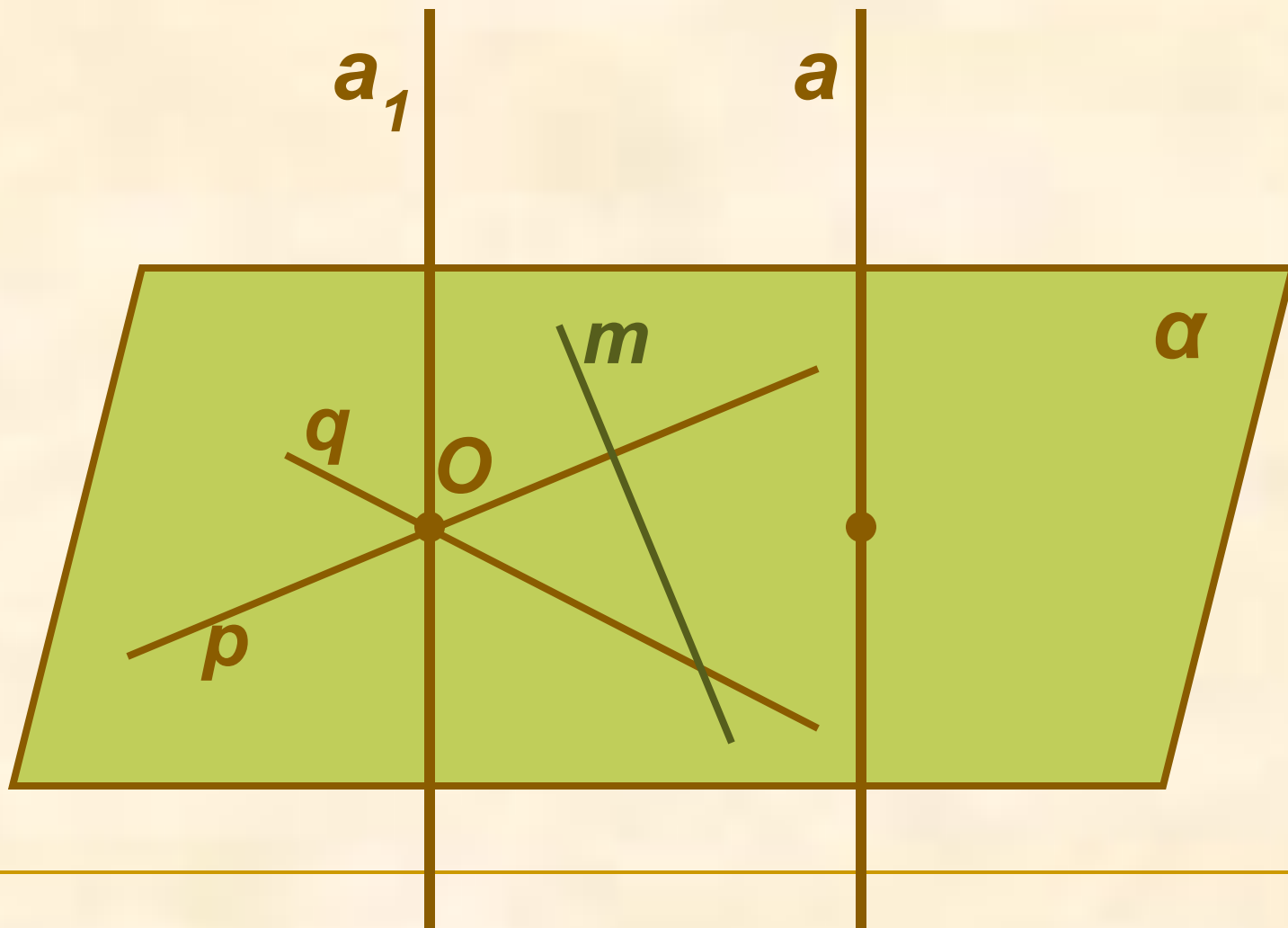
а) частный случай





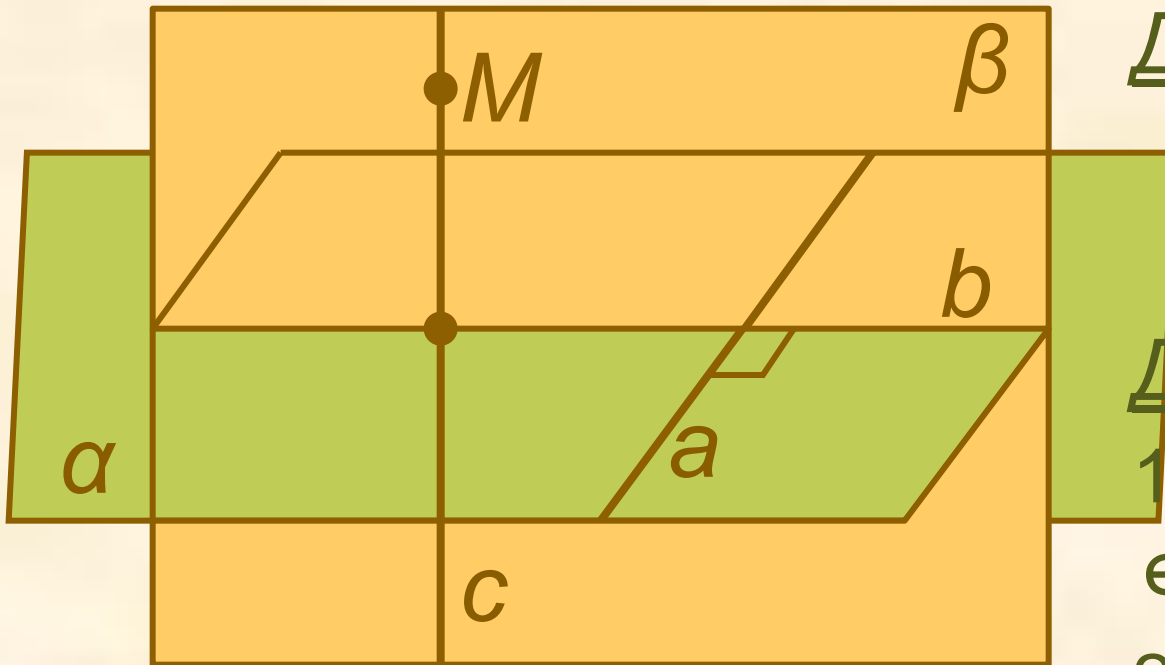
# Доказательство:

а) общий случай



# Теорема 4

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



Дано:  $\alpha; M \notin \alpha$

Доказать:

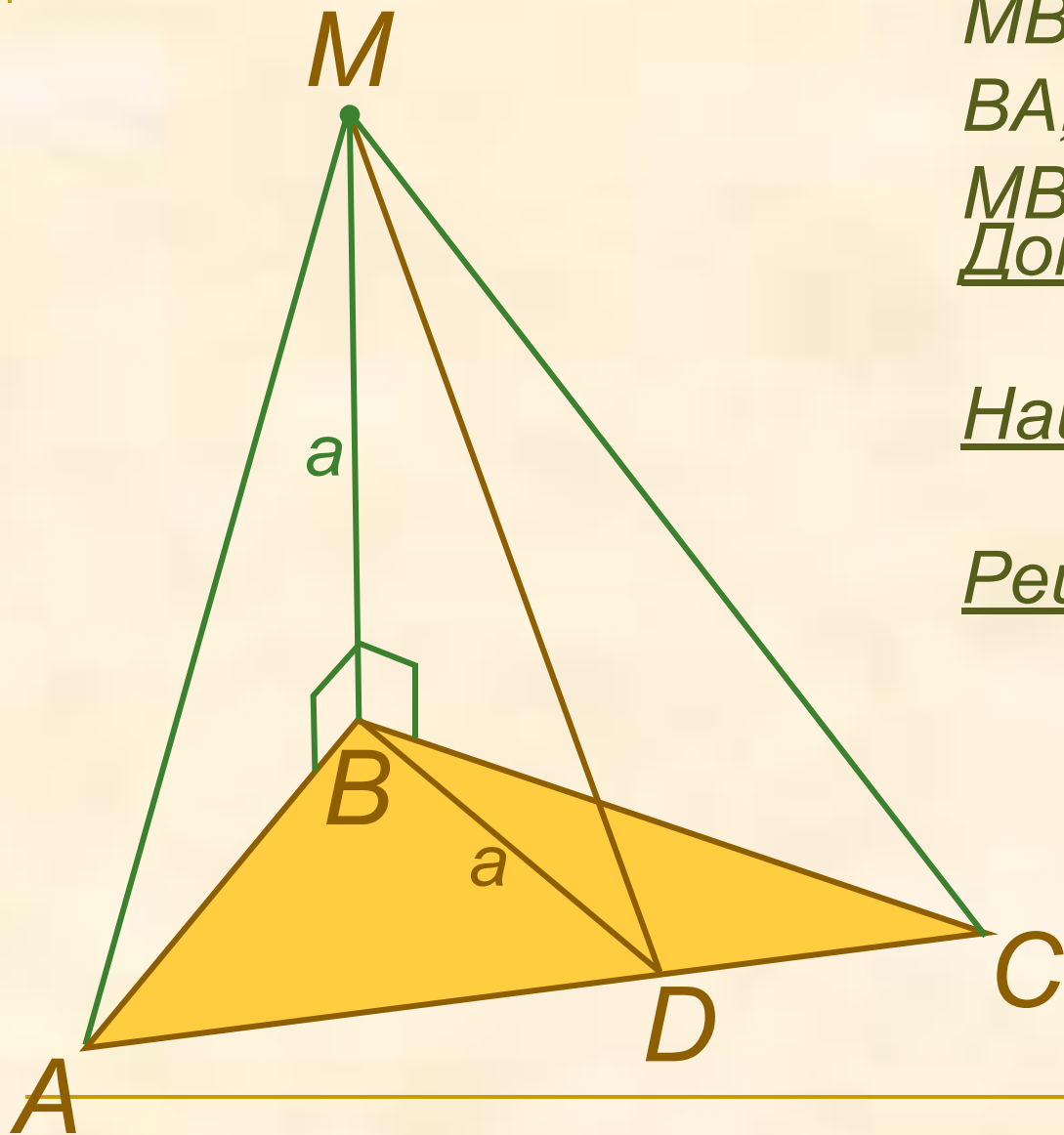
1)  $\exists c, c \perp \alpha, M \in c;$

2)  $c - !$

Доказательство:



## Задача



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $MB \perp BC$ ;  $MB \perp$   
 $BA$ ;

$MB = BD = a$

Доказать:  $MB \perp BD$

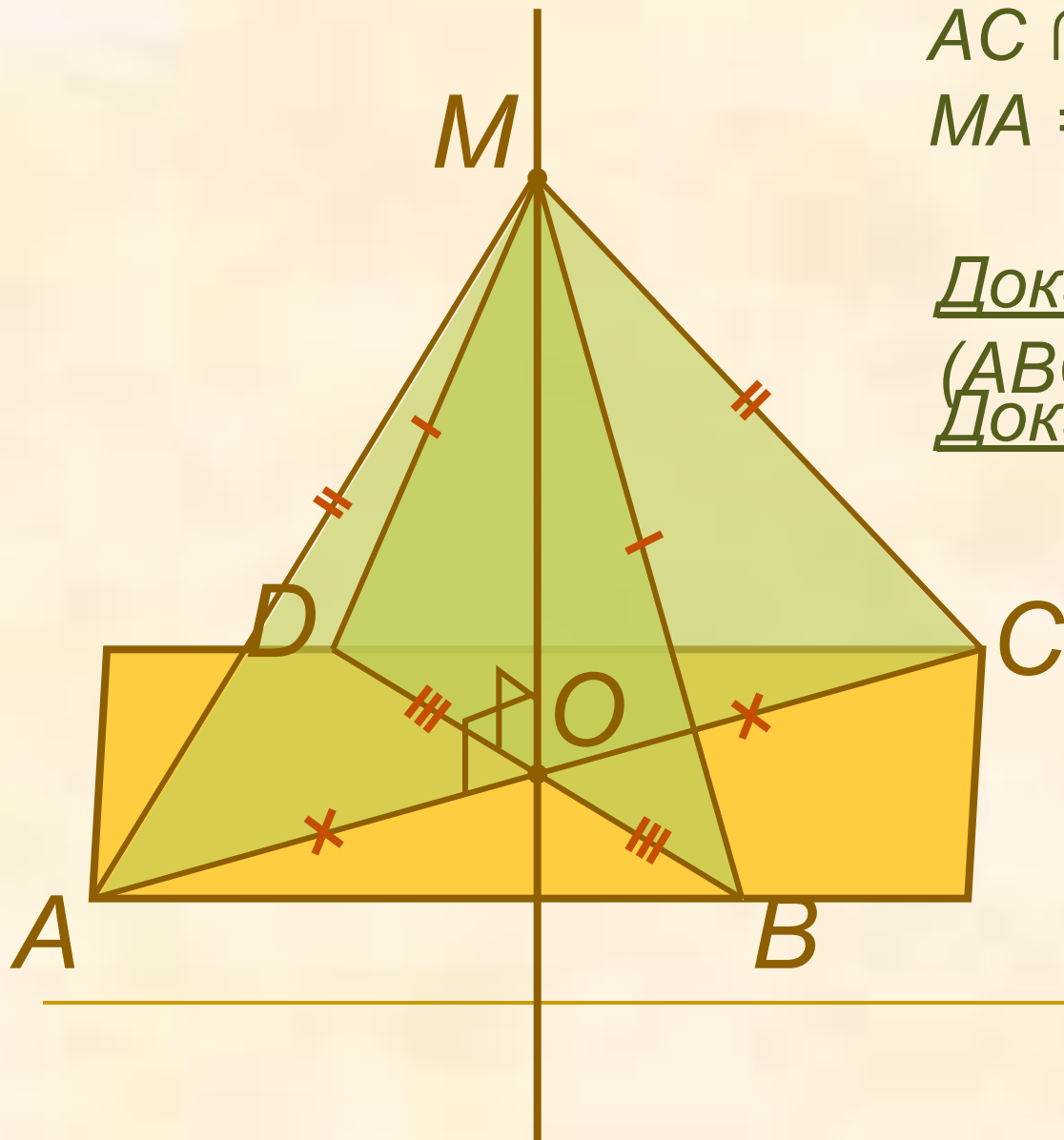
Найти:  $MD$

Решение:

## Задача 128

Дано:  $ABCD$  -  
параллелограмм;  
 $AC \cap BD = O$ ;  $M \notin (ABC)$ ;  
 $MA = MC$ ,  $MB = MD$

Доказать:  $OM \perp$   
 $(ABC)$   
Доказательство:



## Задача 122

Дано:  $\triangle ABC$  – р/с;

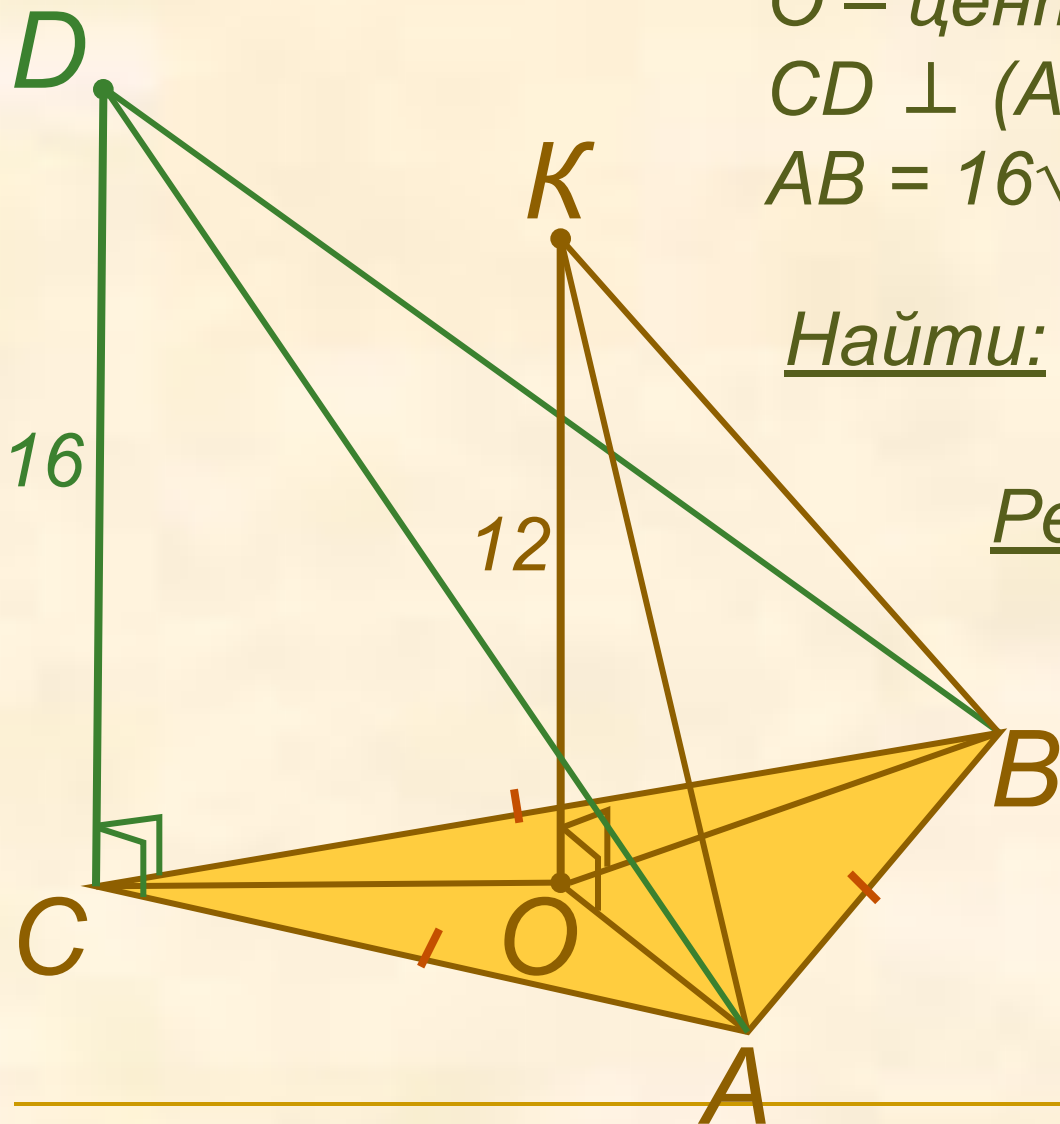
$O$  – центр  $\triangle ABC$

$CD \perp (ABC)$ ;  $OK \parallel CD$

$AB = 16\sqrt{3}$ ,  $OK = 12$ ;  $CD = 16$

Найти:  $AD$ ;  $BD$ ;  $AK$ ;  $BK$ .

Решение:



# Перпендикуляр и наклонные

$M \notin \alpha$

$MH \perp \alpha$

$H \in \alpha$

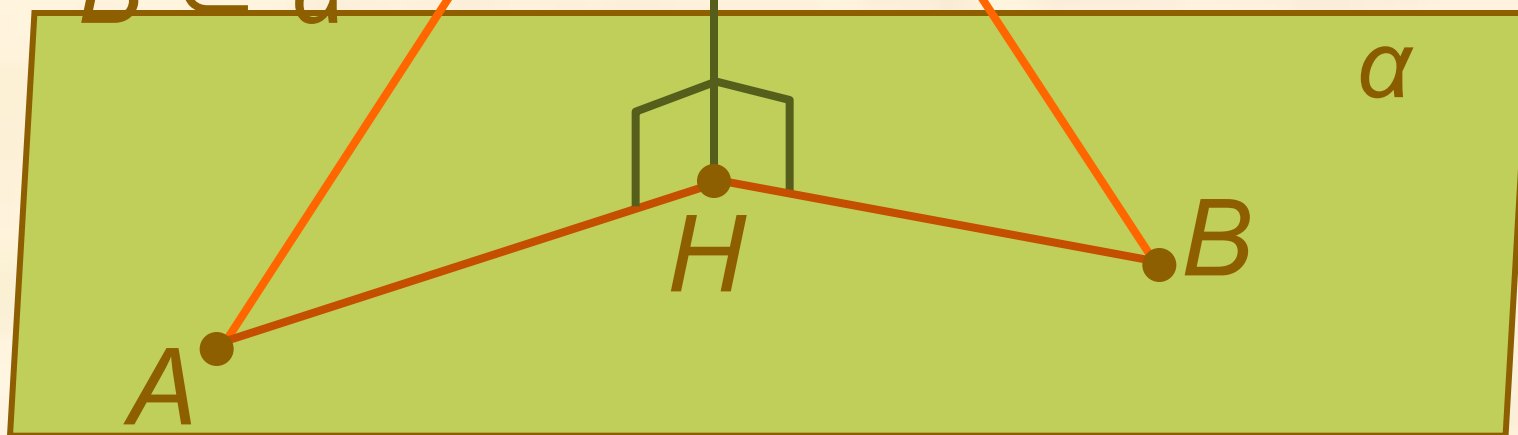
$A \in \alpha$

$B \in \alpha$

$MA$  и  $MB$  – наклонные

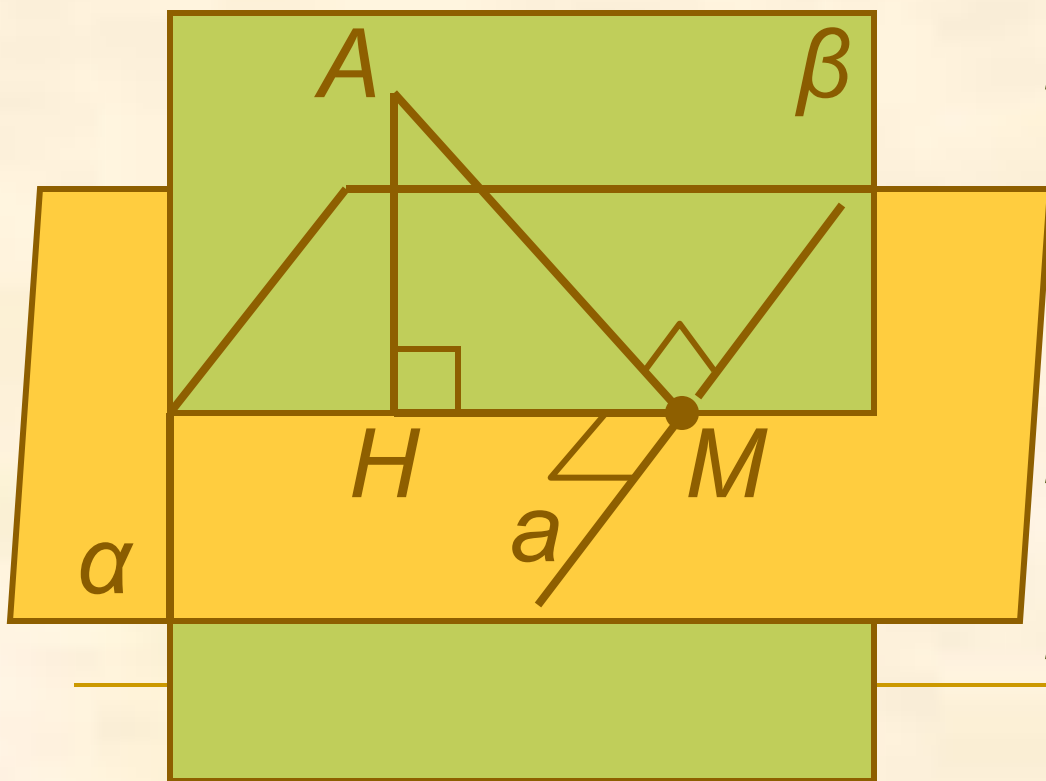
$AH$  и  $BH$  – проекции  
наклонных

$MH$  – перпендикуляр



# Теорема о трех перпендикулярах

*Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна к самой наклонной.*



Дано:  $a \subset \alpha$ ,  $AH \perp \alpha$ ,

$AM$  – наклонная,  
 $a \perp HM$ ,  $M \in a$

Доказать:  $a \perp$

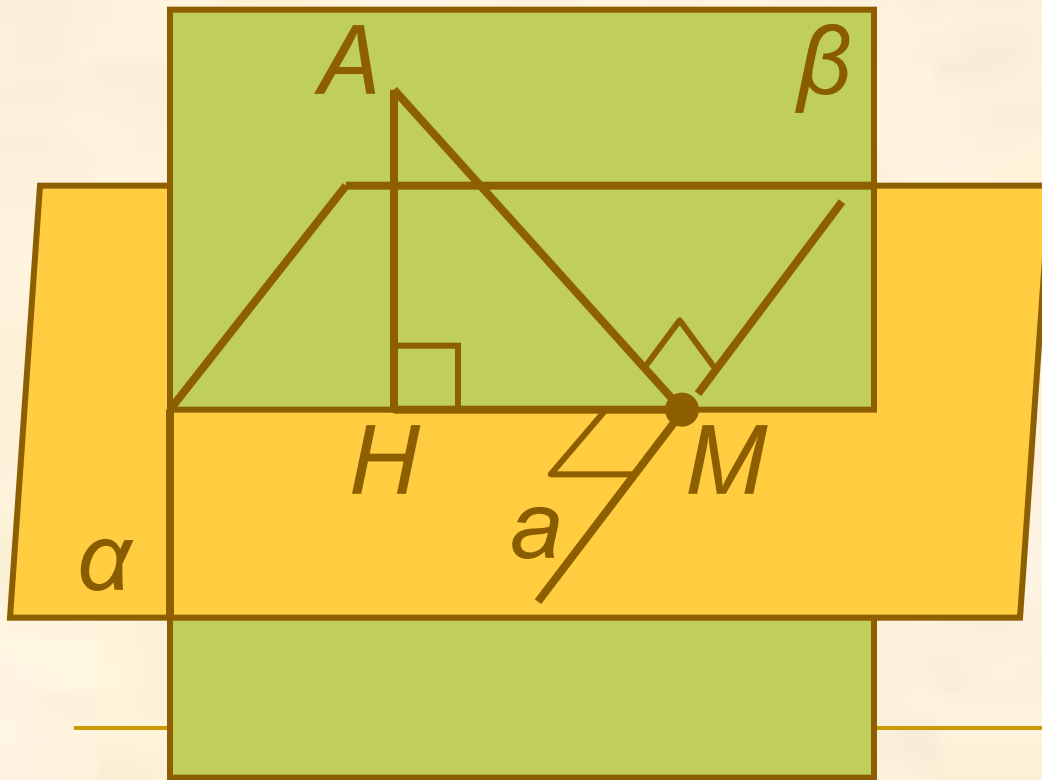
$AM$

Доказательство:



# Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах

*Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.*



Дано:  $a \subset \alpha$ ,  $AN \perp \alpha$ ,

$AM$  – наклонная,  
 $a \perp AM$ ,  $M \in a$

Доказать:  $a \perp NM$

Доказательство:





# Угол между прямой и плоскостью

$$(\widehat{a ; \alpha}) = \angle AOH = \varphi$$

