

Кристаллы и правильные многогранники

МОУ «СОШ №.1

Интегрированный
урок геометрия +
химия 11 класс

Кристаллы –

вещества, в которых мельчайшие частицы (атомы, ионы или молекулы) «упакованы» в определенном порядке.

- В результате при росте кристаллов на их поверхности самопроизвольно возникают плоские грани, а сами кристаллы принимают разнообразную геометрическую форму.
- Каждый, кто побывал в музее минералогии или на выставке минералов, не мог не восхититься изяществом и красотой форм, которые принимают «неживые» вещества.

Кристаллы –

- *Ярой альпийской зимой лед превращается в камень. Солнце не в силах затем камень такой растопить.*

Римский поэт

Клавдиан

- Интересно происхождения слова «кристалл» (оно звучит почти одинаково во всех европейских языках).
- Много веков назад среди вечных снегов в Альпах, на территории современной Швейцарии, нашли очень красивые, совершенно бесцветные кристаллы, очень напоминающие чистый лед. Древние натуралисты так их и называли – «кристаллос», по-гречески – лед; это слово происходит от греческого «криос» – холод, мороз.
- Полагали, что лед, находясь длительное время в горах, на сильном морозе, окаменевают и теряют способность таять.
- Один из самых авторитетных античных философов

Тетраэдр

(от греческого **tetra** – четыре и **hedra** – грань) - правильный многогранник, составленный из **4** равносторонних треугольников.

Сумма длин всех ребер

$$6a$$

Площадь поверхности тетраэдра

$$S = a^2 \sqrt{3}$$

Объем

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

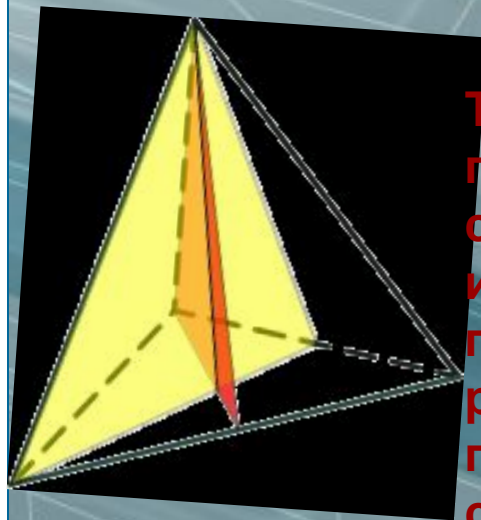
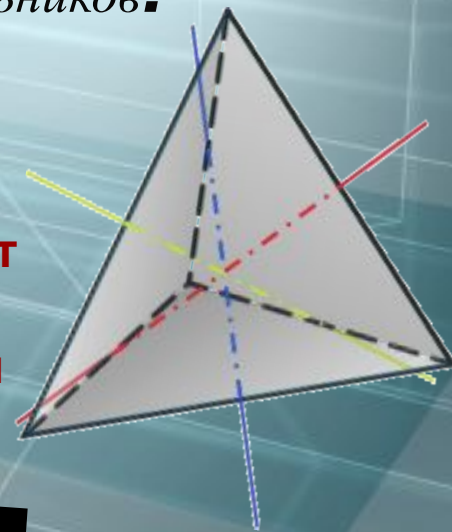
Радиус описанной сферы

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Радиус вписанной сферы

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

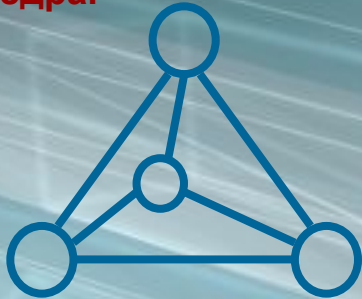
Тетраэдр имеет три оси симметрии, которые проходят через середины скрещивающихся ребер.



Тетраэдр имеет 6 плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра перпендикулярно скрещивающемуся с ним ребру.

Тетраэдр

Кристаллы белого фосфора образованы молекулами P_4 . Такая молекула имеет вид тетраэдра.

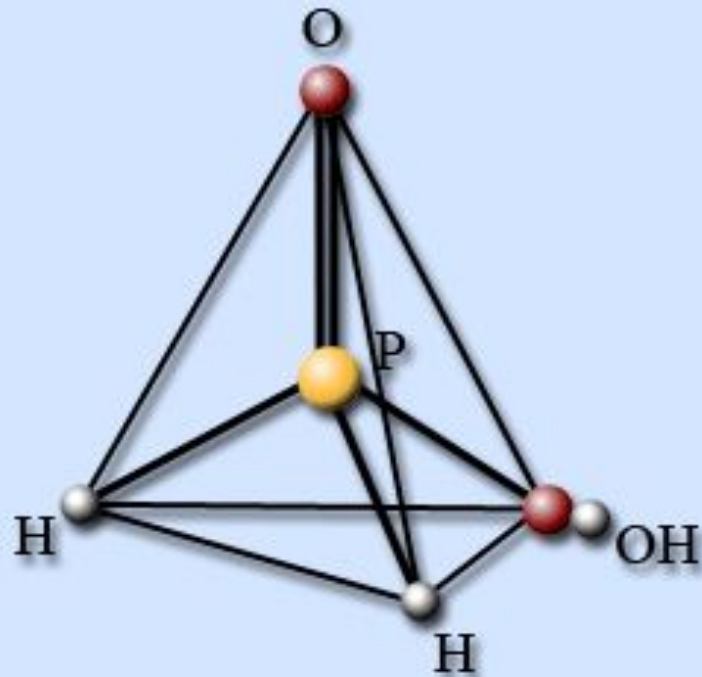


Более трехсот лет отделяют нас от того момента, когда гамбургский алхимик Геннинг Бранд открыл новый элемент – фосфор. Подобно другим алхимикам, Бранд пытался отыскать эликсир жизни или философский камень, с помощью которых старики молодеют, больные выздоравливают, а неблагородные металлы превращаются в золото. В ходе одного из опытов он выпарил мочу, смешал остаток с углем, песком и продолжил выпаривание. Вскоре в реторте образовалось

Фосфорноватистая кислота



Молекула имеет форму тетраэдра с атомом фосфора в центре, в вершинах тетраэдра находятся два атома водорода, атом кислорода и гидроксогруппа.



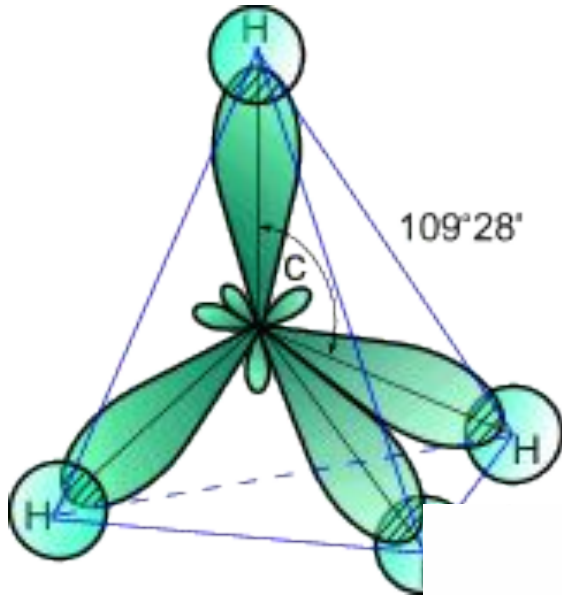
Тетраэдр

Кристаллическая решётка *метана* имеет форму тетраэдра.

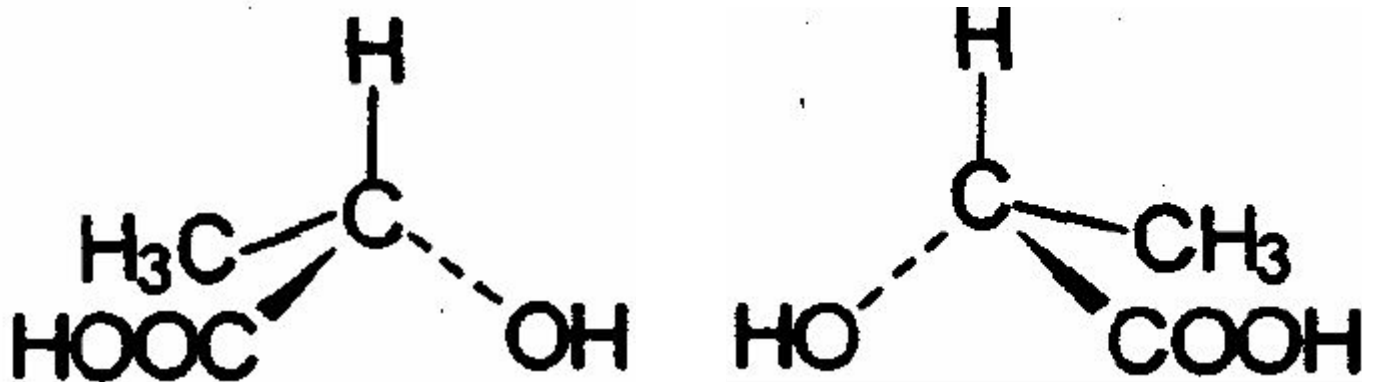
Метан горит бесцветным пламенем.

С воздухом образует взрывоопасные смеси.

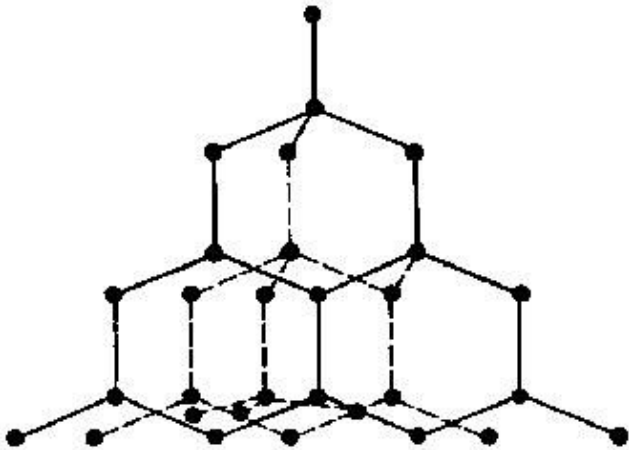
Используется как топливо.



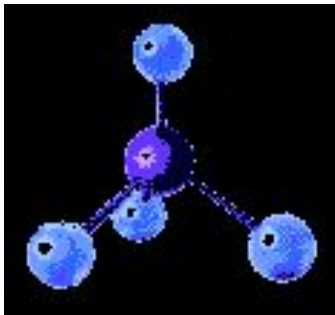
Молекулы *зеркальных изомеров молочной кислоты* также являются тетраэдрами.



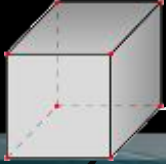
Тетраэдр



Строение решетки алмаза



Элементарная ячейка *кристалла алмаза* представляет собой тетраэдр, в центре и четырех вершинах которого расположены атомы углерода. Атомы, расположенные в вершинах тетраэдра, образуют центр нового тетраэдра и, таким образом, также окружены каждый еще четырьмя атомами и т.д. Все атомы углерода в кристаллической решетке расположены на одинаковом расстоянии (154 пм) друг от друга.



Куб (гексаэдр)

(от греческого **hex** — шесть и **hedra** — грань) - правильный

многогранник, составленный из **6** квадратов.

Сумма длин всех ребер

$$12a$$

Площадь поверхности тетраэдра

$$S = 6a^2$$

Объем

$$V = a^3$$

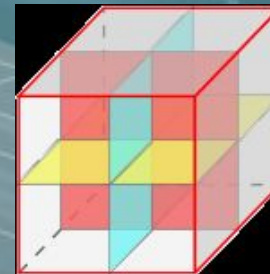
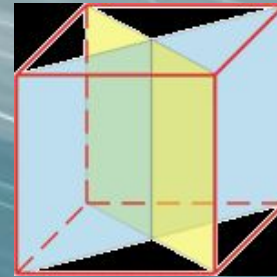
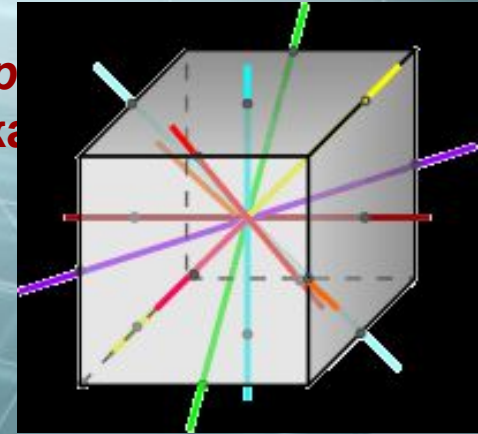
Радиус описанной сферы

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Радиус вписанной сферы

$$r = \frac{a}{2}$$

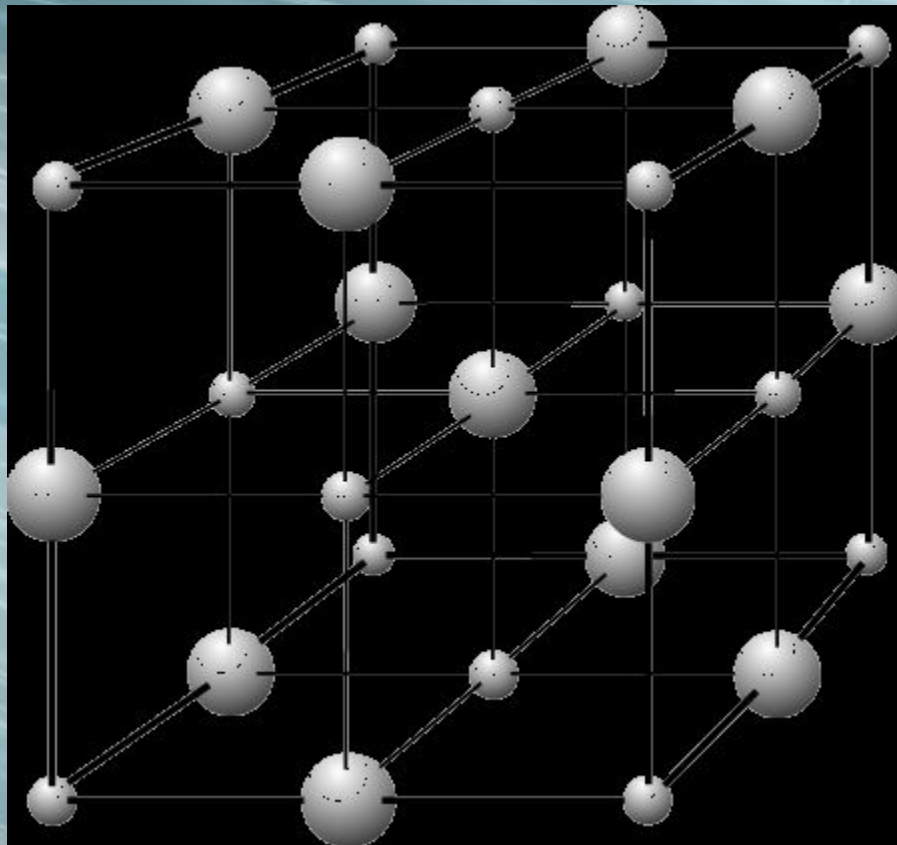
Центром симметрии куба является точка пересечения его диагоналей. Через центр симметрии проходят **9 осей симметрии**.



Плоскостей симметрии у куба также **9** и проходят они либо через противоположные ребра (таковых плоскостей **6**), либо через середины противоположных ребер (таких - **3**).

Куб (гексаэдр)

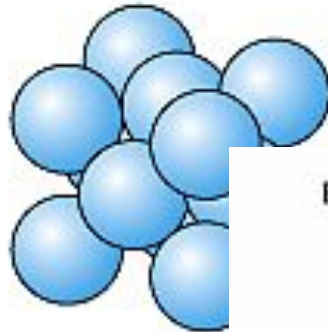
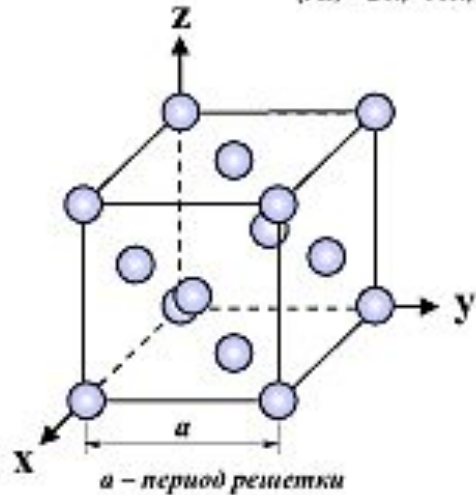
КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА ПОВАРЕННОЙ СОЛИ. Маленькие шарики – ионы натрия, большие – ионы хлора. Все кристаллы поваренной соли имеют одинаковую кубическую форму.



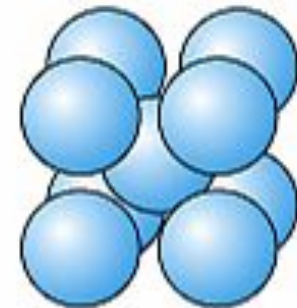
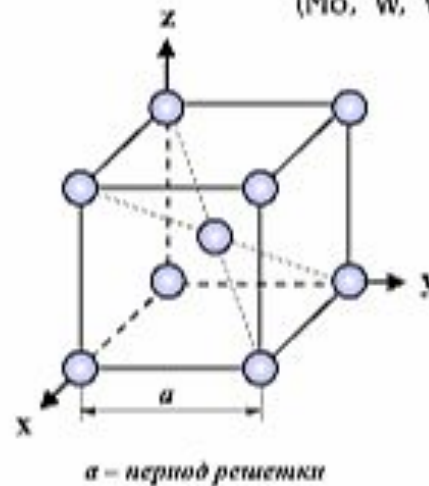
Куб (гексаэдр)

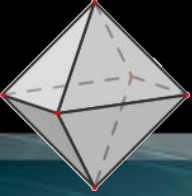
Форму куба имеют кристаллические решётки многих металлов (Li, Na, Cr, Pb, Al, Au, и другие)

Решетка гранецентрированная кубическая (ГЦК)
(Al, Cu, Au, Ag, Fe γ)



Решетка объемноцентрированная кубическая (ОЦК)
(Mo, W, V, Fe α)





Октаэдр

(от греческого **okto** – восемь **hedra** – грань) – правильный многогранник, составленный из **8** равносторонних треугольников.

Сумма длин всех ребер

$$12a$$

Площадь поверхности тетраэдра

$$S = 2a^2 \sqrt{3}$$

Объем

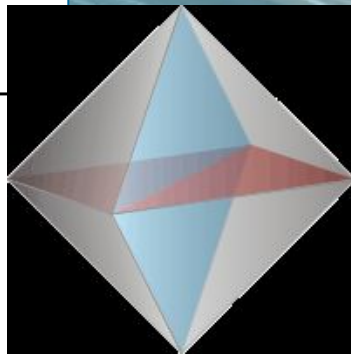
$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

Радиус описанной сферы

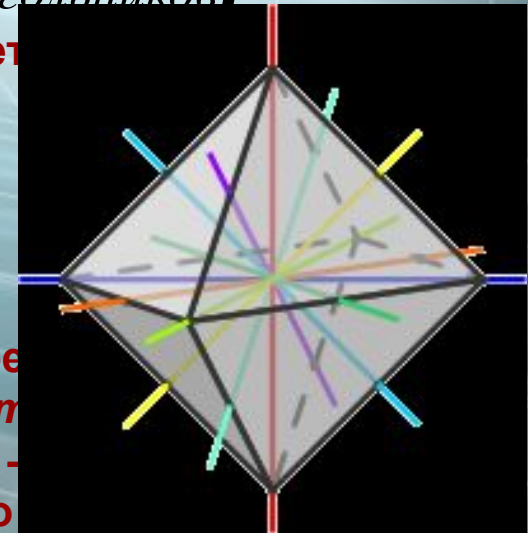
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Радиус вписанной сферы

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



Октаэдр обладает симметрией. Три из 9 осей симметрии октаэдра проходят через противоположные вершины, шесть - через середины ребер. Центр симметрии октаэдра - точка пересечения его осей симметрии.



Три из 9 плоскостей симметрии тетраэдра проходят через каждые 4 вершины октаэдра, лежащие в одной плоскости. Шесть плоскостей симметрии проходят через две вершины, не принадлежащие одной грани, и середины противоположных ребер.

Октаэдр

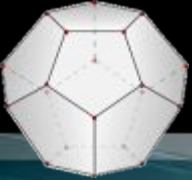


Шестой элемент периодической системы С (*углерод*) характеризуется структурой октаэдра. *Кристаллы алмаза* обычно имеют форму октаэдра. Алмаз (от греческого *adamas* – несокрушимый) – бесцветный или окрашенный кристалл с сильным блеском в виде октаэдра. Кристаллы алмаза представляют собой гигантские полимерные молекулы и обычно имеют форму октаэдров, ромбододекаэдров, реже — кубов или тетраэдров.

Октаэдр



Шестой элемент периодической системы С (*углерод*) характеризуется структурой октаэдра. *Кристаллы алмаза* обычно имеют форму *октаэдра*. Алмаз (от греческого *adamas* – несокрушимый) – бесцветный или окрашенный кристалл с сильным блеском в виде октаэдра. Кристаллы алмаза представляют собой гигантские полимерные молекулы и обычно имеют форму октаэдров, ромбододекаэдров, реже — кубов или тетраэдров.



Додекаэдр

(от греческого **dodeka** – двенадцать и **hedra** – грань) – это правильный многогранник, составленный из двенадцати равносторонних пятиугольников.

Сумма длин всех ребер

$$30a$$

Площадь поверхности тетраэдра

$$S = 3a^2 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

Объем

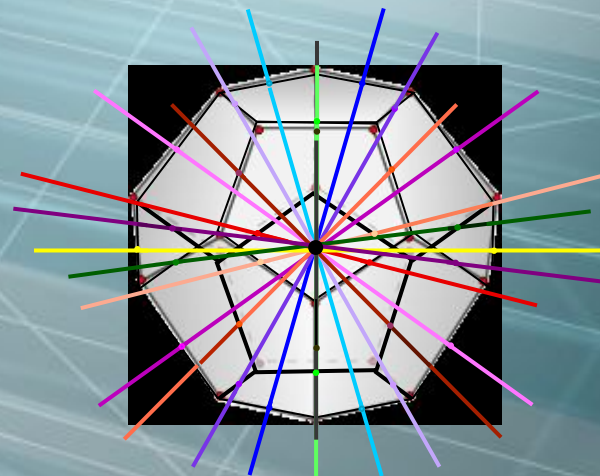
$$V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})$$

Радиус описанной сферы

$$R = \frac{a}{4} (1 + \sqrt{5}) \sqrt{3}$$

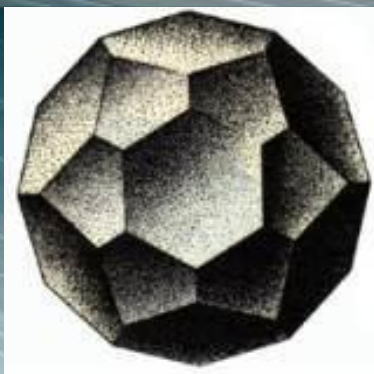
Радиус вписанной сферы

$$r = \frac{a}{4} \sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}$$



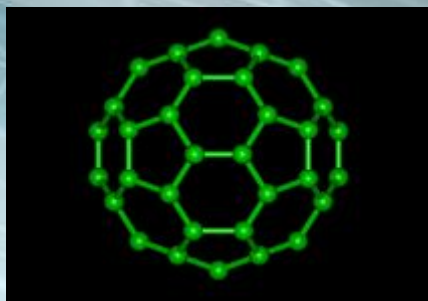
Плоскостей симметрии 9 и проходят они либо через противоположные ребра (таковых плоскостей 6), либо через середины противоположных ребер (таких - 3). Додекаэдр имеет 15 плоскостей симметрии. Любая из плоскостей симметрии проходит в каждой грани через вершину и середину противоположного ребра.

Додекаэдр



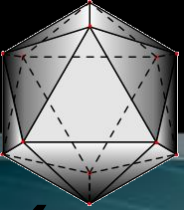
Вирус полиомиелита имеет форму додекаэдра. Он может жить и размножаться только в клетках человека и приматов.

Фуллерены – одна из форм углерода. Они были открыты при попытке моделировать процессы, происходящие в космосе. Ученым в земных лабораториях удалось синтезировать и исследовать многочисленные производные этих шарообразных молекул. Возникла химия фуллеренов. Ведутся попытки создать на основе фуллеренов материалы для зарождающейся молекулярной электроники.



В книге Дана Уинтера «Математика Сердца» (Dan Winter, Heartmath) показано, что молекула ДНК составлена из взаимоотношений двойственности додекаэдров и икосаэдров.





Икосаэдр

(от греческого **ico** — шесть и **hedra** — грань) правильный выпуклый многогранник, составленный из **20** правильных треугольников.

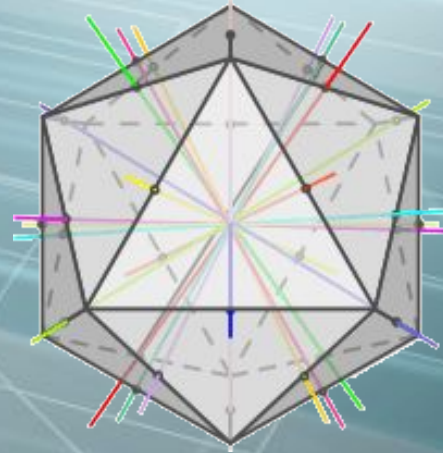
Сумма длин всех ребер $30a$

Площадь поверхности тетраэдра $S = 5a^2 \sqrt{3}$

Объем $V = \frac{5a^3}{12} (3 + \sqrt{5})$

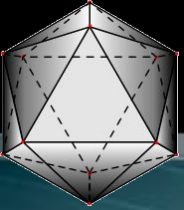
Радиус описанной сферы $R = \frac{a}{4} \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}$

Радиус вписанной сферы $r = \frac{a}{4\sqrt{3}} (3 + \sqrt{5})$



Правильный икосаэдр имеет **15 осей симметрии**, каждая из которых проходит через середины противоположных параллельных ребер.

Плоскостей симметрии также 15.



Икосаэдр

В природе встречаются объекты, обладающие симметрией 5-го порядка. Известны, например, вирусы, содержащие кластеры в *форме икосаэдра*. Открытие фуллерена, молекула которого C_{60} также обладает этим типом симметрии, стимулировало интерес к подобным объектам. Г.Хуберт с сотрудниками (H.Hubert ; Аризонский университет, США) синтезировали кристаллы B_6O из смеси B и B_2O_3 , которая выдерживалась при температуре $1700^{\circ}C$ и давлении от 4 до 5.5 ГПа в течение 30 мин. Образовавшийся субоксид бора имеет ромбоэдрическую кристаллическую решетку с одним из плоских углов при вершине, равным 63.1° . Это значение очень близко к величине угла 63.4° , необходимого для того, чтобы из 20 тетраэдров можно было составить *правильный икосаэдр*. "Первичные" икосаэдры способны группироваться в более крупные кластеры: центральный икосаэдр окружен 12 такими же частицами, центры которых лежат в вершинах более крупного икосаэдра "второго порядка". Число атомов в таком "сверхкластере" может достигать 1014 .

Благодарим за внимание!

Литература:

1. Винниджер. Модели многогранников. М., 1975.
2. Геометрия: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кардомцев и др.–5-е изд.– М.: Просвещение, 2000.
3. Гросман С., Тернер Дж. Математика для биологов. М., 1983.
4. Кованцов Н.И. Математика и романтика. Киев, 1976.
5. Смирнова И.М. В мире многогранников. М., 1990.
6. Шафрановский И.И. Симметрия в природе. Л., 1988.

Web - ресурсы:

1. <http://dr-klm.livejournal.com/117917.html>
2. <http://polyhedron.boom.ru/pages/tetra.htm>