Логарифмические преобразования

Изобретение логарифма, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.

П.С.Лаплас

- Урок алгебры в 11 классе

Определение логарифма

Логарифмом числа b по основанию ***a, где a > 0, a ≠ 1,***

называется

показатель степени, в которую надо возвести число *a*, чтобы получить b:

$log_{a} b = x$ ⇔ $a^{x} = b$ *при* $a>0, a\neq 1, b>0$

Логарифм по основанию 10 называется *десятичным логарифмом* и обозначается *lg b*.

Логарифм по основанию e (e≈2,7) называется *натуральным логарифмом* и обозначается *ln b*.

Определение можно записать и так:

- $a^{\log_a b} = b$, *где* $a>0,\ a\neq 1,\ b>0.$
- Полученное равенство называется основным логарифмическим тождеством

например:

- 1) $\log_2 16 = 4$, т.к. $2^4 = 16$
- 2) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, т.к. $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- 3) $3^{\log_3 18} = 18$
- 4) $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = 5^3 = 125$

Свойства логарифмов

Пусть $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0$

- $\log_a b + \log_a c$
- $\log_a b - \log_a c$
- $r\log_a b$
- $\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq 1)$

$\log_a b$

$\log_a b^r$

$\log_a (bc)$

$$\log_a \frac{b}{c}$$

Полезно знать!

Другие свойства логарифмов:

- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ при $a>0$, $a\neq 0$, $b>0$, $b\neq 1$.
- $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \log_a b$ при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$.
- $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$ при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$.

Примеры:

1) $\log_2 6 + \log_2 10\frac{2}{3} = \log_2 6 + \log_2 \frac{32}{3} = \log_2 \frac{6 * 32}{3} = \log_2 64 = 6$

2) $\log_2 \frac{1}{0{,}125} = \log_2 (0{,}5)^{-3} = \log_2 (\frac{1}{2})^{-3} = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3$

3) $\lg 0{,}1\sqrt[3]{100} = \lg (10^{-1} * 10^{2/3}) = \lg 10^{-1/3} = -\frac{1}{3} \lg 10 = -\frac{1}{3}$

4) $\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3}{2}$

Еще примеры:

5) Известно, что $log_5 2 = a$. Найти $log_2 80$.

Решение: $log_2 80 = log_2(16*5) = log_2 16 + log_2 5 =$

$= 4 + \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = 4 + \frac{1}{\log_5 2} = 4 + \frac{1}{a} = \frac{4a+1}{a}$.

6) Найти lg45, если lg3 = a, lg2 = b.

Решение: $lg45 = lg(9*5) = lg9 + lg5 = lg3^2 + lg\frac{10}{2} =$

$= 2lg3 + lg10 - lg2 = 2a + 1 - b$.

Попробуем решить:

- Вычислите:

1) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{5} =$

Ответ: $-\frac{1}{5}$

- 2) $\sqrt{3}^{\log_3 0,49} =$

Ответ:

0,7

- 3) $\log_{\sqrt{2}} 36$ - $\log_{\sqrt{2}} 9\sqrt{2}$ =

Ответ:
3

- 4) Найдите $\log_2 \frac{1}{81}$, если $\log_2 3 = m$.

Ответ:

-4m

- 5) $-\log_8 \log_2 \sqrt[8]{\sqrt[4]{4}} =$

$= -\log_8 \log_2 \sqrt[32]{2^2} = -\log_8 \log_2 2^{\frac{1}{16}} = -\log_8 \frac{1}{16} = -\log_8 16^{-1} =$

$= \log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3}$

Решите самостоятельно.

1) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3}$

2) $\left(\frac{1}{36}\right)^{\log_6 5}$

3) Найдите $\log_7 245$, если известно, что $\log_7 5$ *= b.*

4) $\log_5 150\sqrt[3]{5}$ *+* $\log_{25} \frac{1}{36}$

Бонус (задание части С)

- Решите неравенство: $\log_4(x+2) \times \log_x 2 \leq 1$
- Преобразуем: $\dfrac{\log_2(x+2)}{2\log_2 x} \leq 1$,

$$\log_x(x+2) \leq 2$$

1 случай: $\begin{cases} x+2 \leq x^2 \\ x > 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x > 1 \end{cases}$,

откуда x ≥ 2.

2 случай: $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$,

откуда 0 < x < 1.

Объединяем найденные промежутки.

Ответ: $(0; 1);\ [2; +\infty)$

Домашнее задание.

- Из учебника № 1061, 1062, 1064

Свойства логарифмов

1) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, *a>0, a≠1,b>0,c>0*

2) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, *a>0, a≠1,b>0,c>0*

3) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, *a>0, a≠1,b>0,c>0,c≠1*

4) $\log_a b^r = r \log_a b$, *a>0, a≠1,b>0*

5) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, *a>0, a≠1,b>0,b≠1*

6) $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$, *a>0, a≠1,b>0*