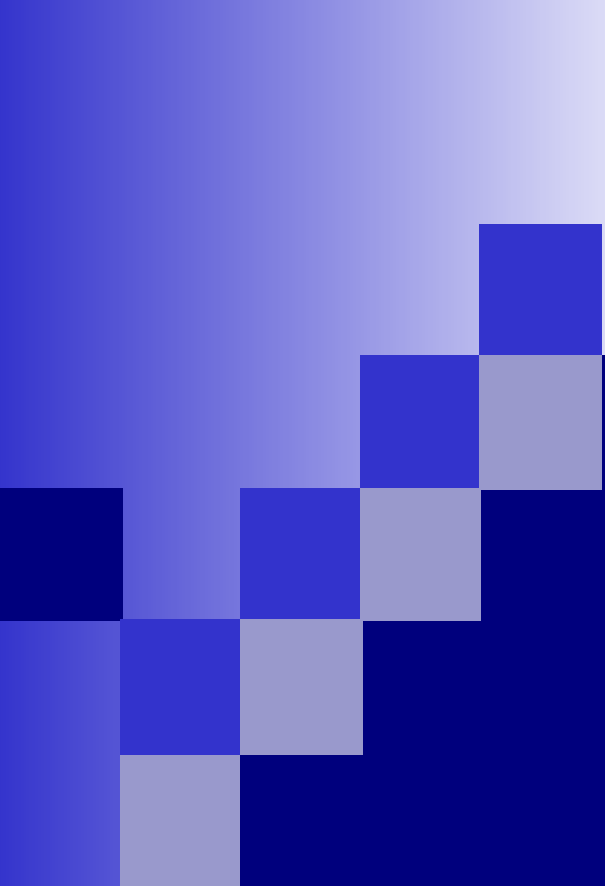




Координатный метод

Геометрия

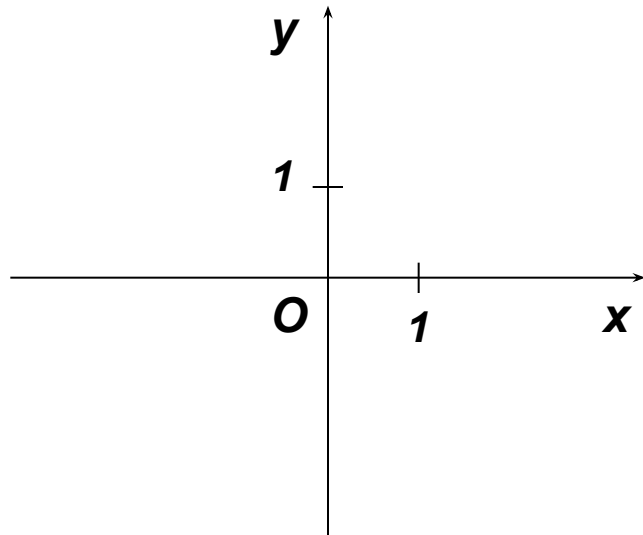
Подготовила Глазкрицкая Светлана Геннадьевна



Содержание

- Координаты точки
- Расстояние между точками
- Уравнение окружности
- Координаты середины отрезка
- Уравнение прямой
- Заключение

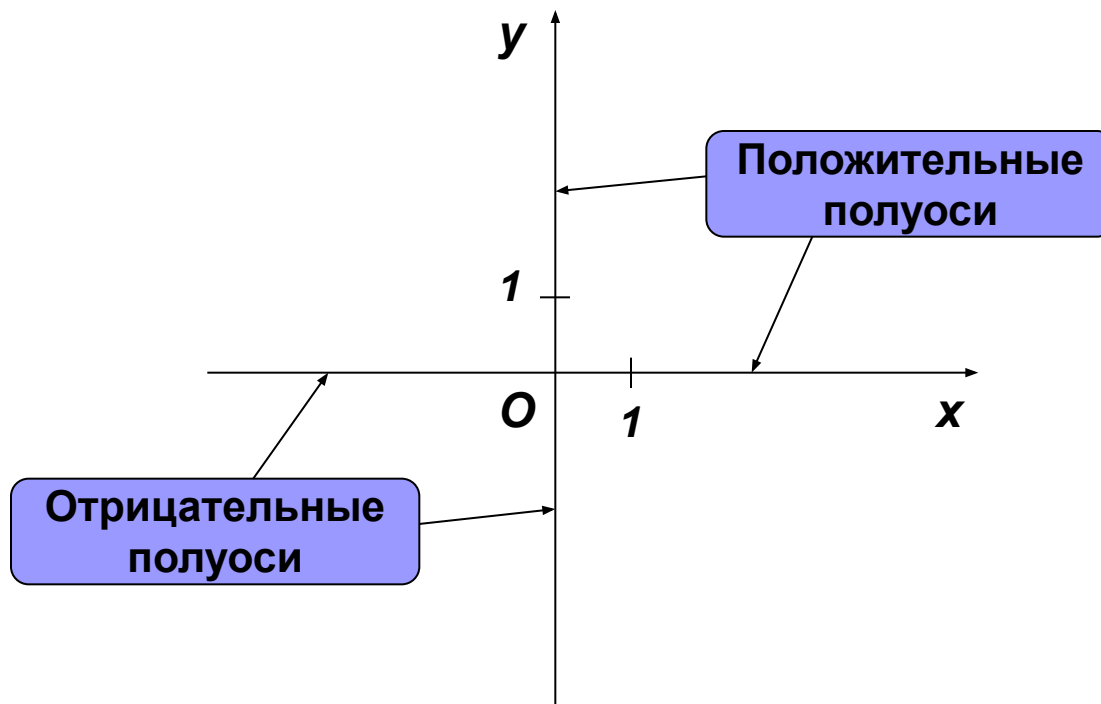
Координаты точки



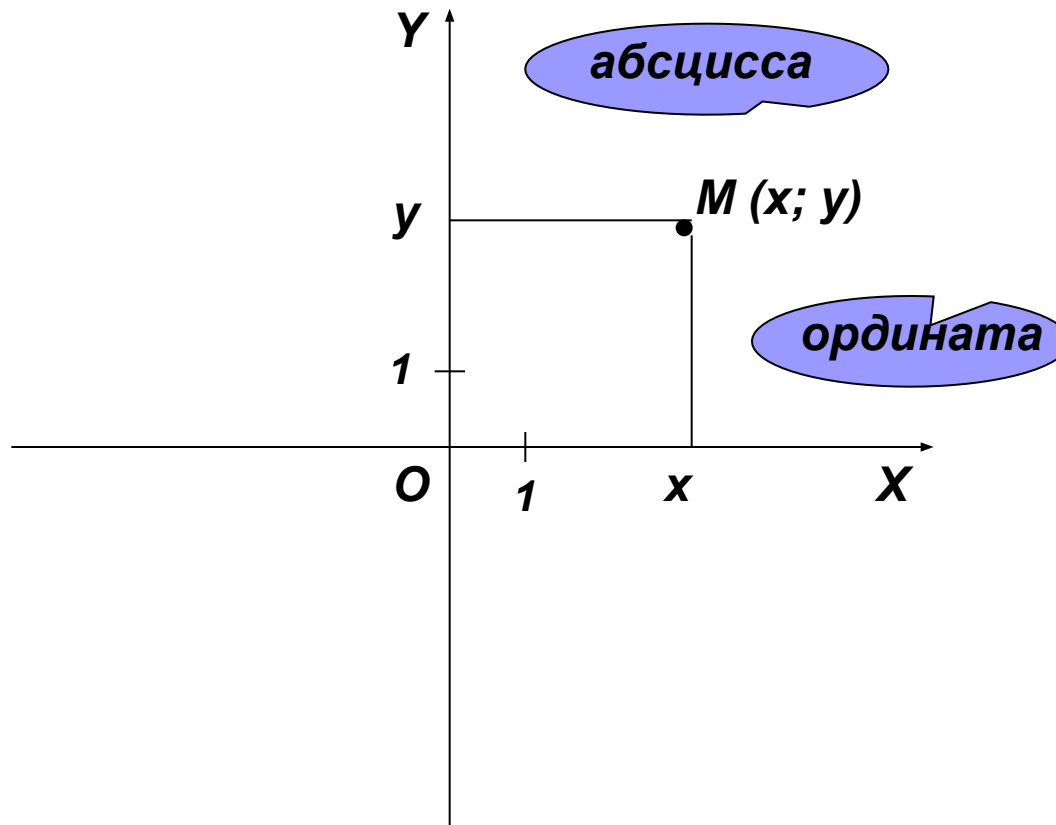
Прямоугольная система координат:

- ✓ O – начало;
- ✓ Ox – ось абсцисс;
- ✓ Oy – ось ординат;
- ✓ $Ox \perp Oy$
- ✓ на осях выбран масштаб (единичный отрезок)

Говорят, что на плоскости задана **прямоугольная система координат**, если через некоторую точку O плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано направление (которое на рисунке отмечается стрелкой) и одна и та же единица измерения отрезков. Точка O называется **началом координат**, а прямые с выбранными на них направлениями – **осями координат**. Одна из осей координат называется **осью абсцисс**, а другая – **осью ординат**. Ось абсцисс обозначается Ox , а ось ординат – Oy .



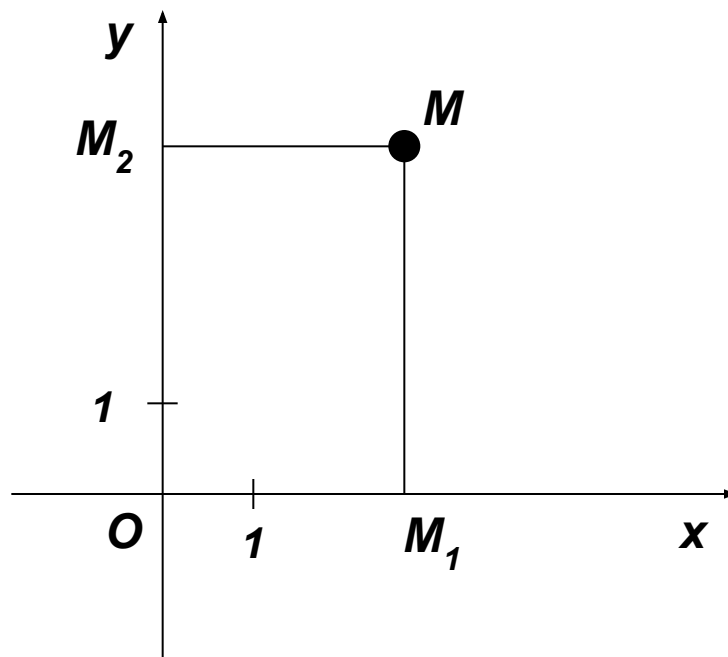
Для каждой из осей определены два противоположных луча с началом в точке O . Луч, направление которого совпадает с направлением координатной оси, называется **положительной полуосью**, а другой – **отрицательной полуосью**.



Если на плоскости задана прямоугольная система координат, то в этой системе координат каждой точке M плоскости соответствует упорядоченная пара чисел x, y . Эта пара чисел называется **координатами точки M** . Первая координата называется **абсциссой**, вторая – **ординатой**.

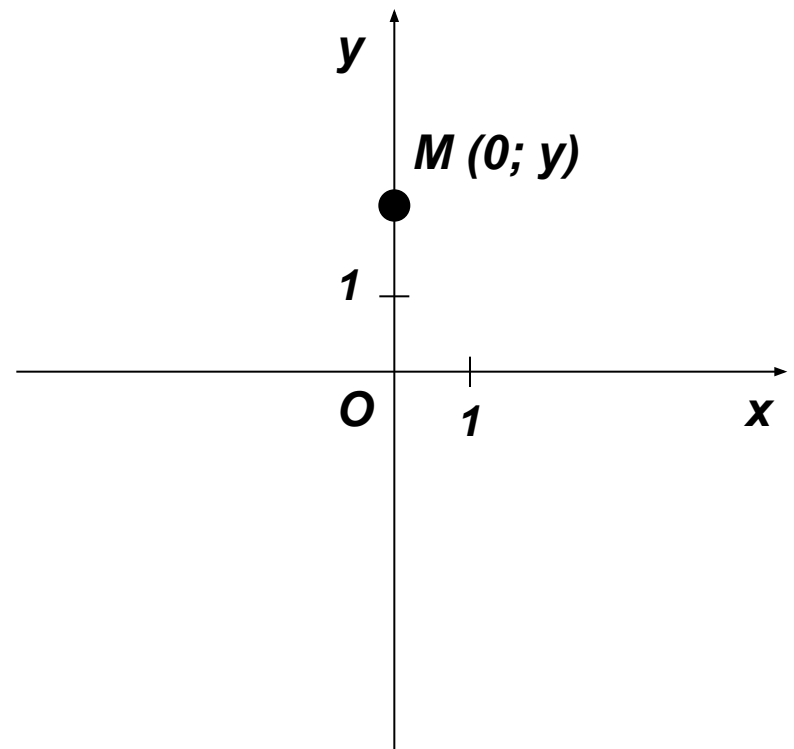
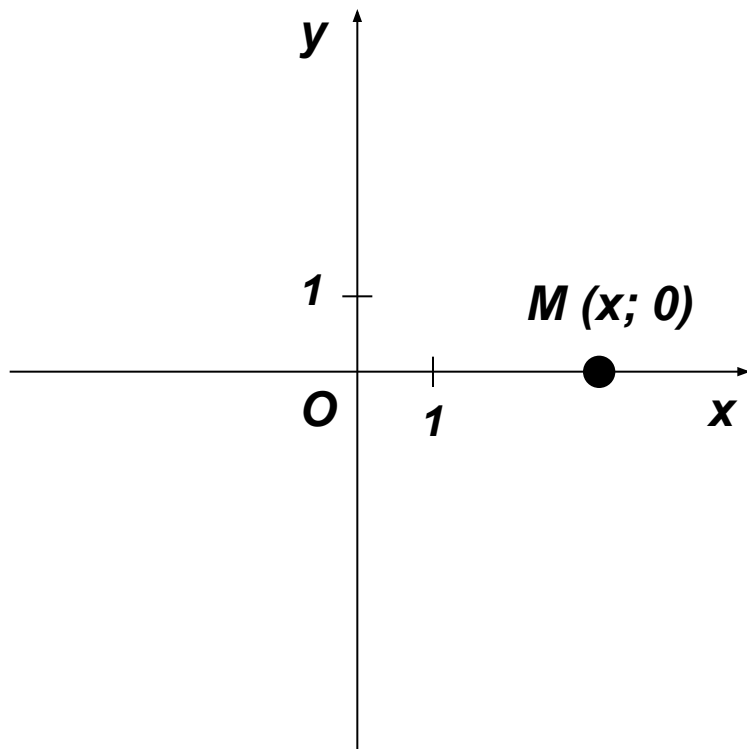
Пусть M_1 и M_2 – точки пересечения осей координат Ox и Oy с прямыми, проходящими перпендикулярно им через точку M соответственно. Тогда координаты x , y точки M определяются следующим образом:

- ✓ $x = OM_1$, если точка M_1 принадлежит положительной полуоси;
- ✓ $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O ;
- ✓ $x = -OM_1$, если точка M_1 принадлежит отрицательной полуоси;
- ✓ $y = OM_2$, если M_2 принадлежит положительной полуоси;
- ✓ $y = 0$, если M_2 совпадает с точкой O ;
- ✓ $y = -OM_2$, если точка M_2 принадлежит отрицательной полуоси.



Координаты точки ***M*** записываются в скобках после обозначения точки: ***M*** (***x***; ***y***) (на первом месте записывается абсцисса, на втором записывается ордината).

Если точка ***M*** лежит на оси ***Ox***, то она имеет координаты (***x***; ***0***), если ***M*** лежит на оси ***Oy***, то ее координаты – (***0***; ***y***).



Рассмотрим примеры.

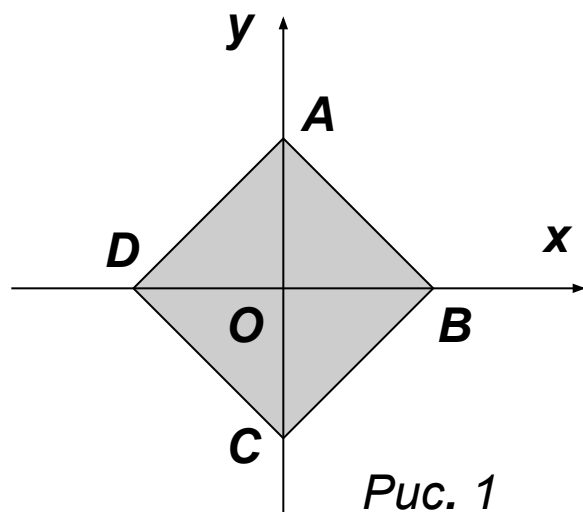


Рис. 1

Пусть **$ABCD$** – квадрат, длина стороны которого равна двум единицам длины, а прямоугольная система координат выбрана так, как показано на рисунке 1. Тогда в выбранной системе вершины квадрата имеют координаты:

$$A (0; \sqrt{2}); B (\sqrt{2}; 0); C (0; -\sqrt{2}); D (-\sqrt{2}; 0).$$

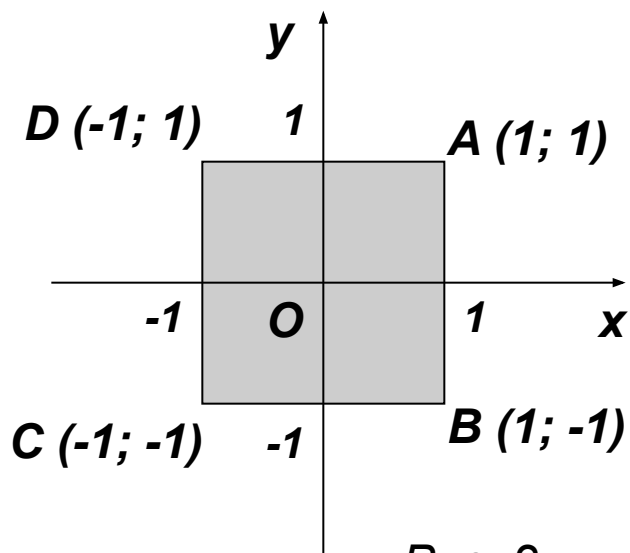


Рис. 2

Если система координат выбрана так, как показано на рисунке 2, то координаты вершин данного квадрата в этой системе имеют координаты:

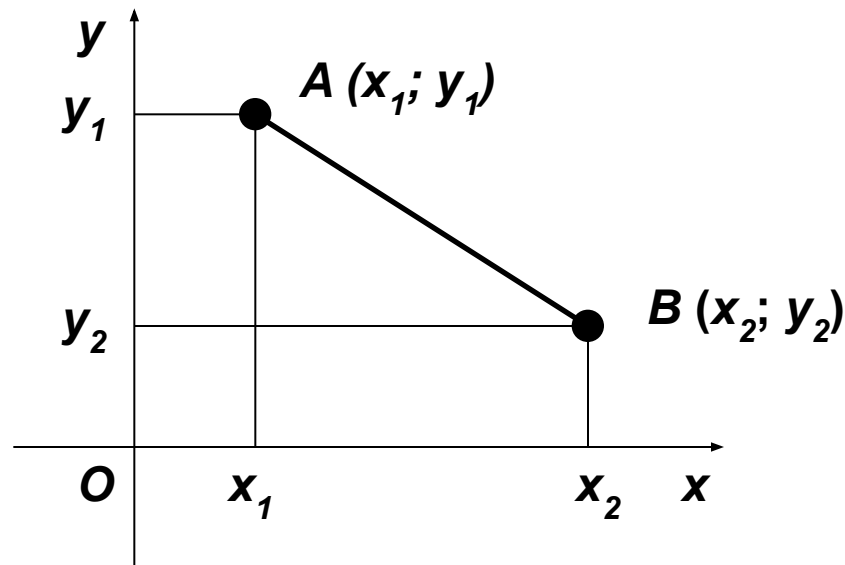
$$A (1; 1); B (1; -1); C (-1; -1); D (-1; 1).$$



Расстояние между точками

Рассмотрим вопрос о нахождении расстояния между точками, если известны их координаты. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат и известны координаты точек **A** и **B** в этой системе координат: **A** (x_1 ; y_1) и **B** (x_2 ; y_2). Тогда расстояние $d(A, B) = AB$ между точками **A** и **B** можно найти по формуле

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

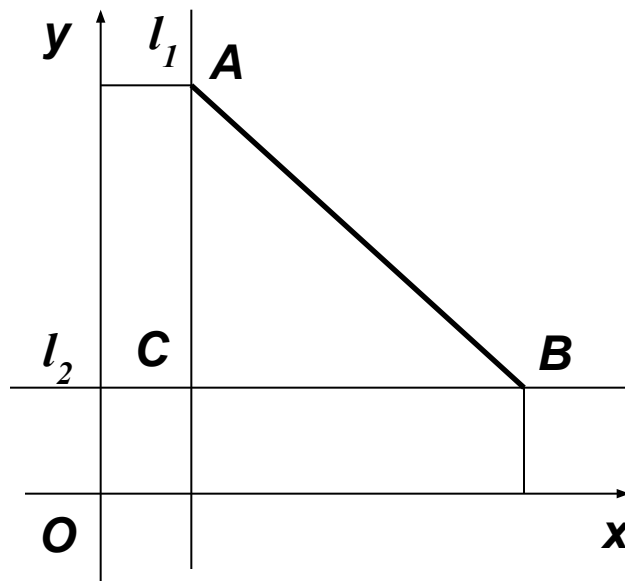


Докажем формулу $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ для случая, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, т. е. когда отрезок **AB** не параллелен ни одной из координатных осей. Пусть **C** – точка пересечения прямых l_1 и l_2 , которые проходят через точки **A**, **B** соответственно и параллельны осям **Oy**, **Ox**. Рассмотрим прямоугольный треугольник **ABC**. Длины сторон **AC** и **BC** равны: **AC** = $|x_2 - x_1|$, **BC** = $|y_2 - y_1|$. Тогда по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

или

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Заметим, что формула $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ верна и для случаев:

- а) $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$ (отрезок параллелен оси **Oy**, рисунок 1);
- б) $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$ (отрезок параллелен оси **Ox**, рисунок 2);
- в) $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ (точки **A** и **B** совпадают).

В случае а) $d(A, B) = AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$.

В случае б) $d(A, B) = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$.

Если точки **A** и **B** совпадают, то $d(A, B) = 0$.

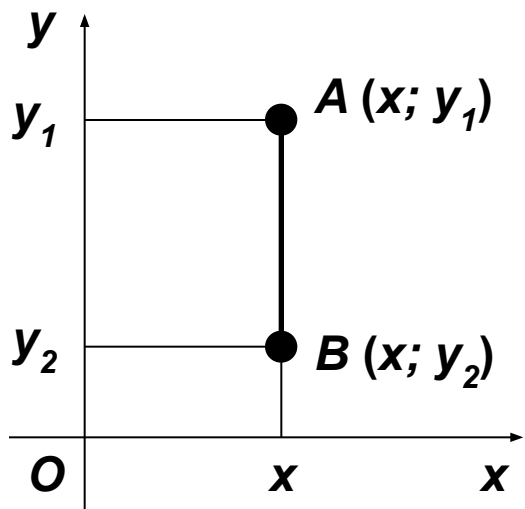


Рис. 1

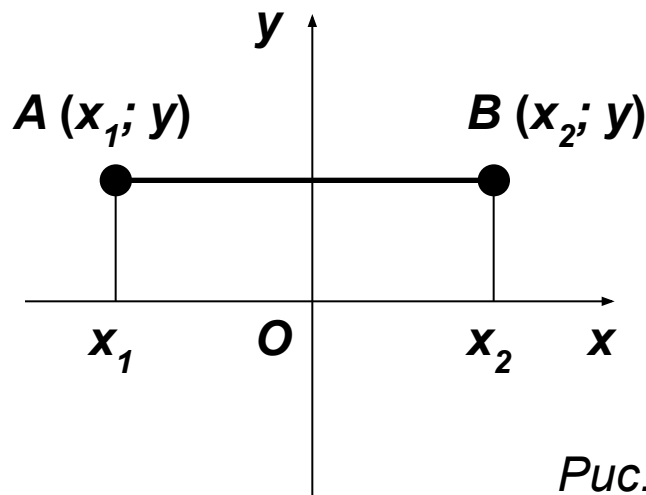


Рис. 2

Рассмотрим пример.

Пусть необходимо вычислить площадь квадрата **$ABCD$** , две вершины которого имеют координаты **$A(8; 8)$** и **$B(5; 5)$** . Площадь квадрата равна квадрату длины стороны.

Следовательно, **$S_{ABCD} = AB^2$** . Для вычисления длины стороны **AB** воспользуемся формулой расстояния между двумя точками

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$AB = \sqrt{(8 - 5)^2 + (8 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь квадрата **$S_{ABCD} = AB^2 = 18$ кв. ед.**

Ответ: 18 кв. ед.



Уравнение окружности

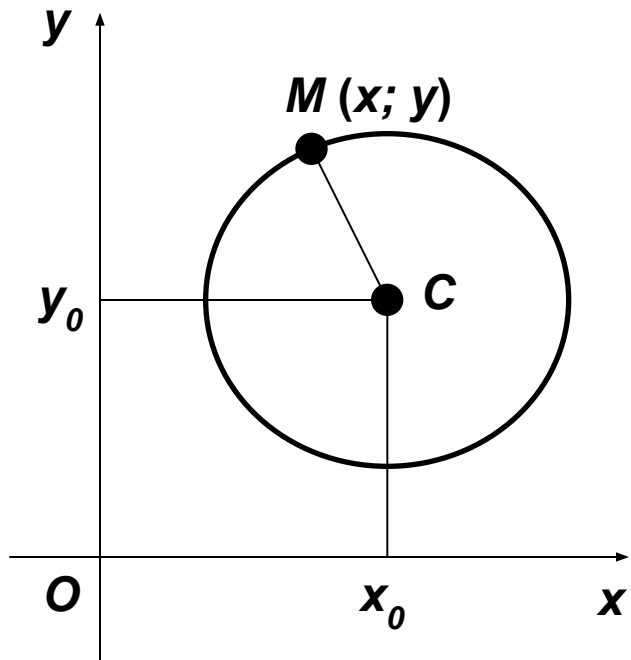
Рассмотрим вопрос об уравнении окружности.

Уравнение с двумя переменными называется **уравнением фигуры**, если ему удовлетворяют координаты любой точки этой фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной фигуре.

Составим уравнение окружности с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и радиусом R .

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит окружности. Тогда в силу определения окружности $CM = R$. Следовательно, квадрат расстояния между точками C и M равен квадрату радиуса:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$



Пусть точка $M_1(x_1; y_1)$ не принадлежит окружности, тогда $CM_1 \neq R$, а значит, $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \neq R^2$, т. е. если точка не принадлежит окружности, то ее координаты не удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

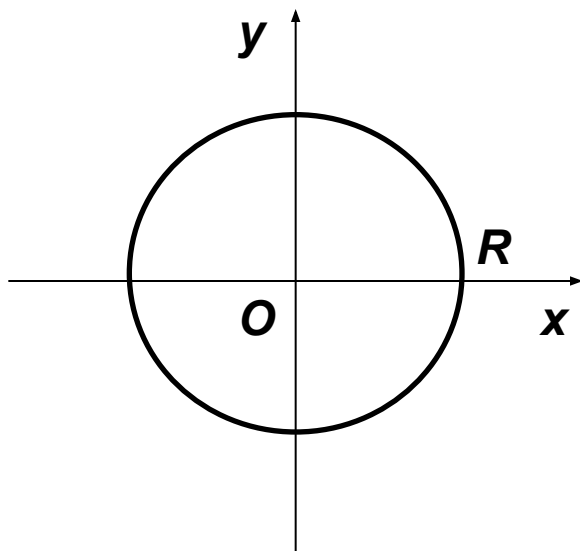
Таким образом, уравнение

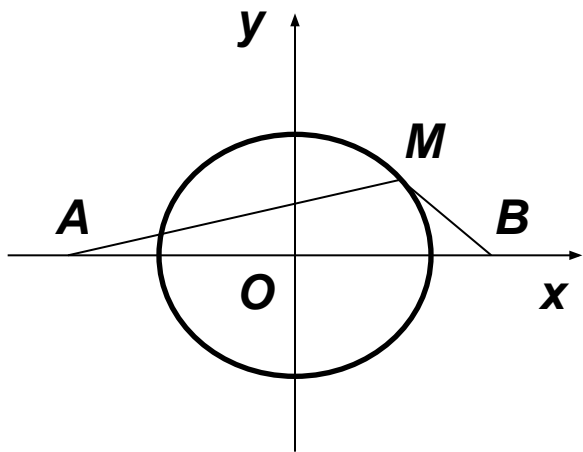
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

есть **уравнение окружности** с центром в точке $C(x_0; y_0)$ и радиусом R .

Заметим, что если центр окружности совпадает с началом системы координат, то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2$$





Задача. Составьте уравнение фигуры на плоскости, состоящей из всех точек, сумма квадратов расстояний которых от точек **A** $(-6; 0)$ и **B** $(6; 0)$ равна 104.

Решение.

1) Пусть **M** $(x; y)$ – точка, принадлежащая фигуре, уравнение которой необходимо составить. Тогда по условию задачи **$AM^2 + BM^2 = 104$** .

2) Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, координаты которых известны. Получаем:

$$AM = \sqrt{(x+6)^2 + y^2}; BM = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}.$$

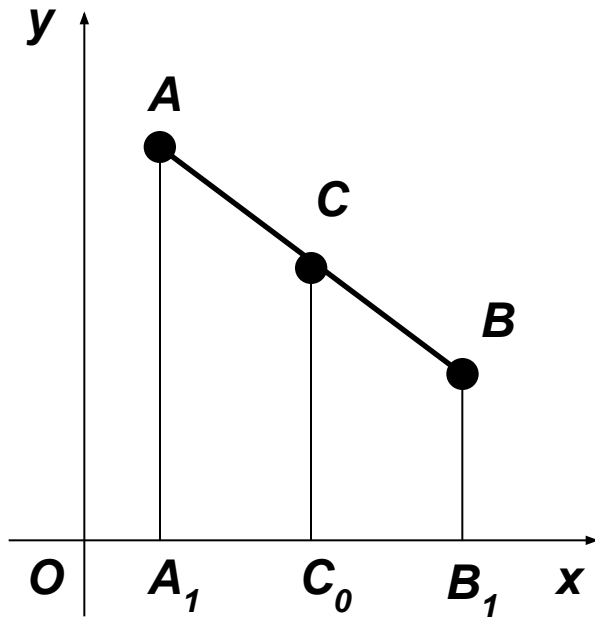
3) По условию задачи $(x+6)^2 + y^2 + (x-6)^2 + y^2 = 104$. После упрощения получаем $x^2 + y^2 = 16$.

Если точка **M** $(x; y)$ не принадлежит фигуре, о которой идет речь в задаче, то **$AM^2 + BM^2 \neq 104$** , а значит, координаты точки **M** $(x; y)$ не удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 16$. Таким образом, уравнение фигуры имеет вид $x^2 + y^2 = 16$ и фигура является окружностью с центром в начале координат и радиусом 4.



Координаты середины отрезка

Рассмотрим вопрос о вычислении координат середины отрезка, если известны координаты концов этого отрезка.



Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ – произвольные точки плоскости, а точка $C(x_0; y_0)$ – середина отрезка AB . Найдем координаты x_0 и y_0 .

Найдем координату x_0 .

1) Пусть отрезок AB не параллелен оси Oy , т. е. $x_1 \neq x_2$. Проведем через точки A , B и C прямые, параллельные оси Oy , которые пересекают ось Ox в точках $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$ и $C_0(x_0; 0)$ соответственно. Тогда по теореме Фалеса точка $C_0(x_0; 0)$ – середина отрезка A_1B_1 , т. е. $A_1C_0 = C_0B_1$ или $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$. Отсюда следует, что либо $x_0 - x_1 = x_0 - x_2$, либо $x_0 - x_1 = -(x_0 - x_2)$. Так как $x_1 \neq x_2$, то первое равенство невозможно, а значит, верно второе равенство, из которого получаем, что

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

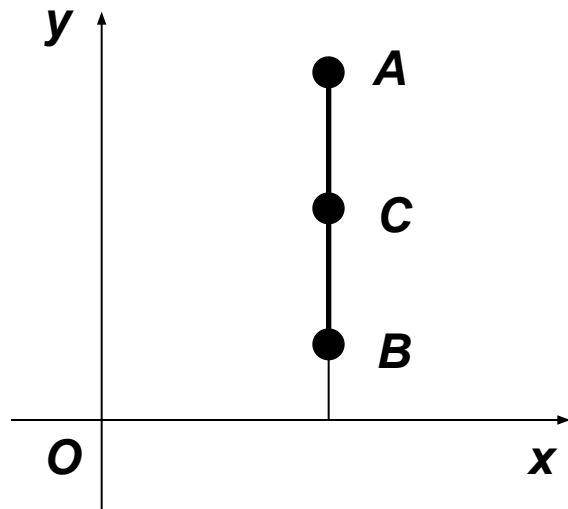


Рис. 1

2) Пусть отрезок **AB** параллелен оси **Oy**, т. е. $x_1 = x_2$. В этом случае все точки **A**₁, **B**₁, **C**₀ имеют одну и ту же абсциссу, а следовательно, формула

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

верна и в этом случае (рис. 1).

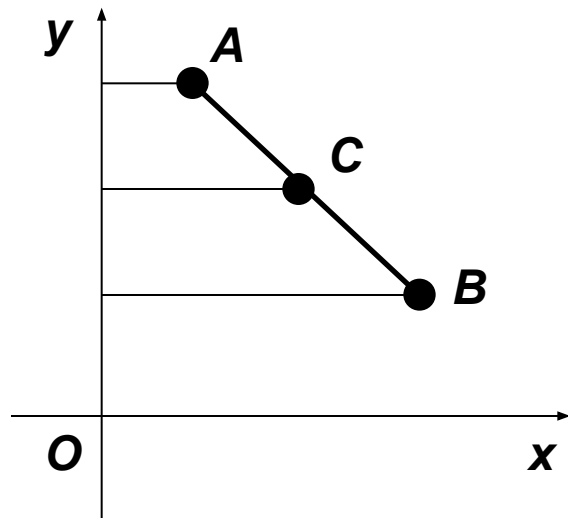
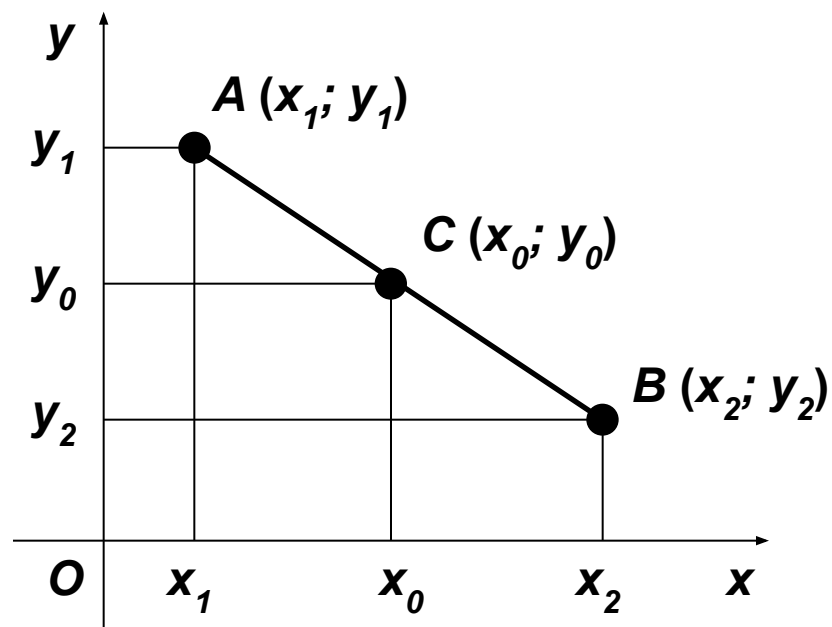


Рис. 2

Координата **y**₀ точки **C**₀ находится аналогично. В этом случае рассматриваются прямые, параллельные оси **Ox** (рис. 2), а соответствующая формула имеет вид

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Середина C отрезка AB , где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$:

$$C(x_0; y_0)$$
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Задача. Концами отрезка служат точки **A** $(-8; -5)$, **B** $(10; 4)$. Найдите координаты точек **C** и **D**, которые делят отрезок **AB** на три равные части.

Решение.

Пусть точки **C** и **D** имеют координаты $(x_C; y_C)$ и $(x_D; y_D)$.

1) Найдем абсциссы точек **C** и **D**.

Так как точка **C** – середина отрезка **AD**, то выполняется равенство

$$x_C = \frac{x_D - 8}{2},$$

так как точка **D** – середина отрезка **CB**, то

$$x_D = \frac{10 + x_C}{2}.$$

Решив систему
$$\begin{cases} 2x_C = x_D - 8, \\ 2x_D = 10 + x_C, \end{cases}$$

находим $x_C = -2$, $x_D = 4$.

2) Найдем ординаты точек C и D .

Для нахождения ординат точек C и D воспользуемся равенствами

$$y_C = \frac{y_D - 5}{2}; \quad y_D = \frac{y_C + 4}{2}.$$

Решив систему

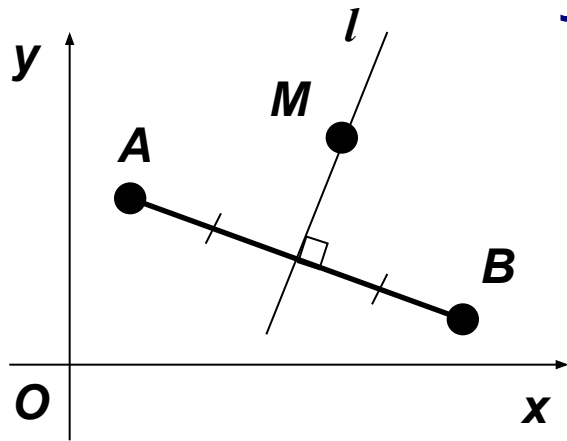
$$\begin{cases} 2y_C = y_D - 5, \\ 2y_D = y_C + 4, \end{cases}$$

находим $y_C = -2$, $y_D = 1$.

Ответ: $C (-2; -2)$, $D (4; 1)$.



Уравнение прямой



Выведем уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты которых известны.

Пусть на плоскости дана прямая l и выбрана прямоугольная система координат. Рассмотрим две различные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ такие, что прямая l является серединным перпендикуляром для отрезка AB .

1) Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой l , то $AM = BM$. Следовательно, координаты точки M удовлетворяют уравнению

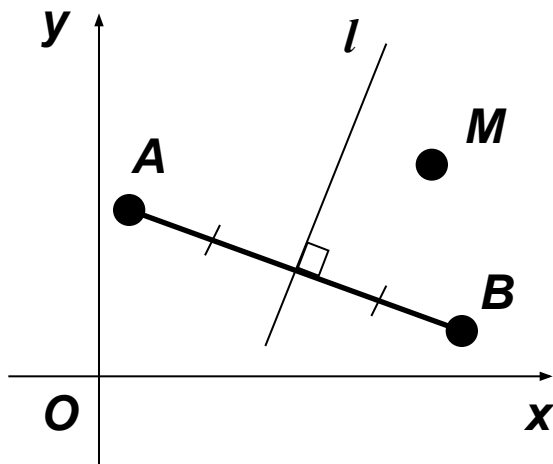
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

которое после преобразования принимает вид

$$ax + by + c = 0,$$

где $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$. Заметим, что хотя бы один из коэффициентов a , b уравнения $ax + by + c = 0$ не равен нулю, т. к. точки A и B различные, а значит, хотя бы одна из разностей $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ не равна нулю.

Таким образом, если точка M лежит на прямой l , то ее координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, где коэффициенты a и b одновременно не равны нулю.



2) Если точка $M(x; y)$ не лежит на прямой l , то $AM \neq BM$ и $AM^2 \neq BM^2$, а следовательно, координаты точки M не удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$.

Таким образом, **уравнением прямой** в прямоугольной системе координат является уравнение первой степени

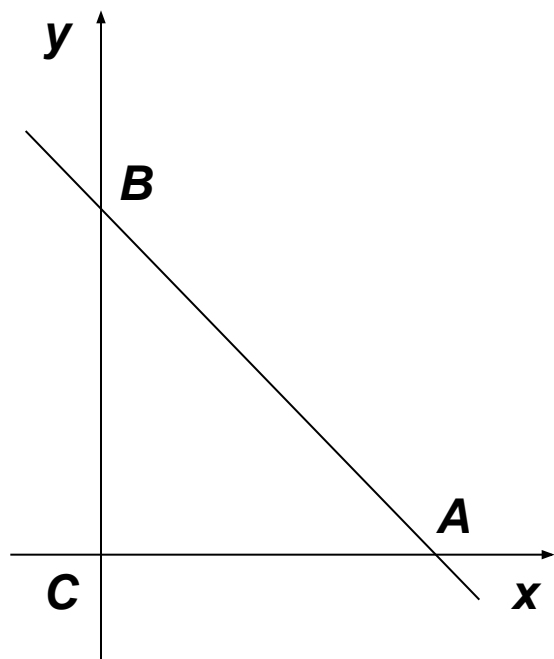
$$ax + by + c = 0,$$

где a и b одновременно не равны нулю.

- ✓ Если $a = 0$, то $y = c_1$ – прямая $\parallel O_x$.
- ✓ Если $b = 0$, то $y = c_2$ – прямая $\parallel O_y$.
- ✓ Если $c = 0$, то прямая проходит через $O(0; 0)$.

Задача. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ACB с прямым углом при вершине C . Найдите множество точек M плоскости, для каждой из которых выполняется условие $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$.

Решение.



Рассмотрим систему координат, начало которой совпадает с вершиной C , а вершины A и B расположены на осях Ox и Oy , как показано на рисунке. Если катет данного треугольника равен a , тогда $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a)$ – координаты точек C , A и B в выбранной системе координат соответственно. Пусть $(x; y)$ – координаты точки M , принадлежащей искомому множеству точек.

Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, если известны их координаты:

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}, \quad CM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

По условию задачи $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$, следовательно,

$$(x-a)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Отсюда получаем уравнение $x + y - a = 0$.

Если точка $M(x; y)$ не принадлежит искомому множеству точек, то $AM^2 + BM^2 \neq 2CM^2$, а значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению $x + y - a = 0$. Таким образом, $x + y - a = 0$ есть уравнение искомого множества точек и это множество есть прямая, на которой лежит гипотенуза AB данного треугольника.



Заключение

Суть координатного метода заключается в том, что введение системы координат позволяет записать условие задачи в координатах и решать ее, используя знания по алгебре.

