МОУ-гимназия №13

Гиперсфера

Работу выполнил:
ученик 11б класса
Мартыненко Александр

Учитель:
Черемисина Г. А.

п. Краснообск, 2008г.

✔***Отражение*** *в мозгу человека окружающего реального («объективного») мира есть* ***субъективное восприятие пространства*** *человеком. Нарушение субъективных характеристик приводит к иллюзиям.*

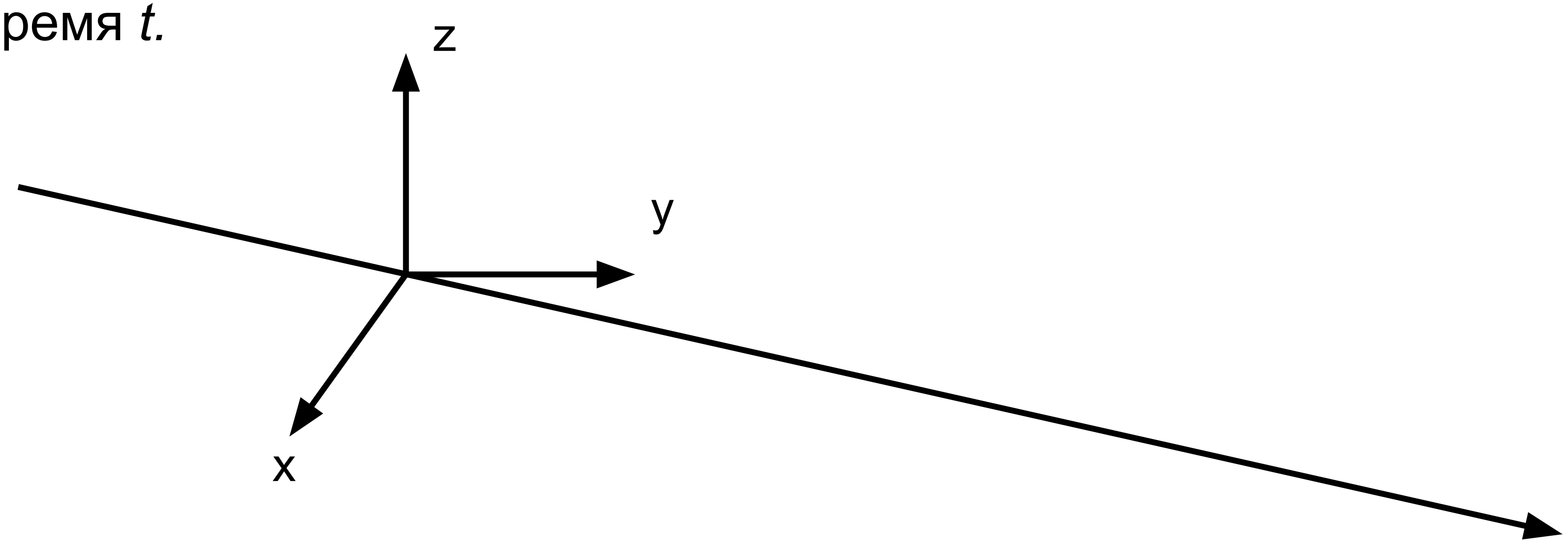
✔Что такое ***размерность пространства*** и как узнать, какова размерность пространства, в котором мы живем?

✔ Согласно предложенной модели, наше пространство является четырехмерной сферой.
Отсюда следует ***насущная необходимость образного представления***, если уж не самой сферы, то ***хотя бы ее свойств***.
Нижеследующие размышления имеют цель помочь читателю интуитивно приблизиться к пониманию этой геометрической формы.

Содержание

Введение
Четырехмерное пространство

Минковский и Эйнштейн считали, что трёхмерное пространство и время в отдельности не существуют и что реальный мир является четырёхмерным. Для этого они объединили трёхмерное евклидово пространство со временем в четырёхмерное пространство, взяв в качестве четвёртой оси системы координат расстояние, которое свет проходит за время *t.*



Цель:

- Интуитивно приблизиться к пониманию этой геометрической формы гиперсферы

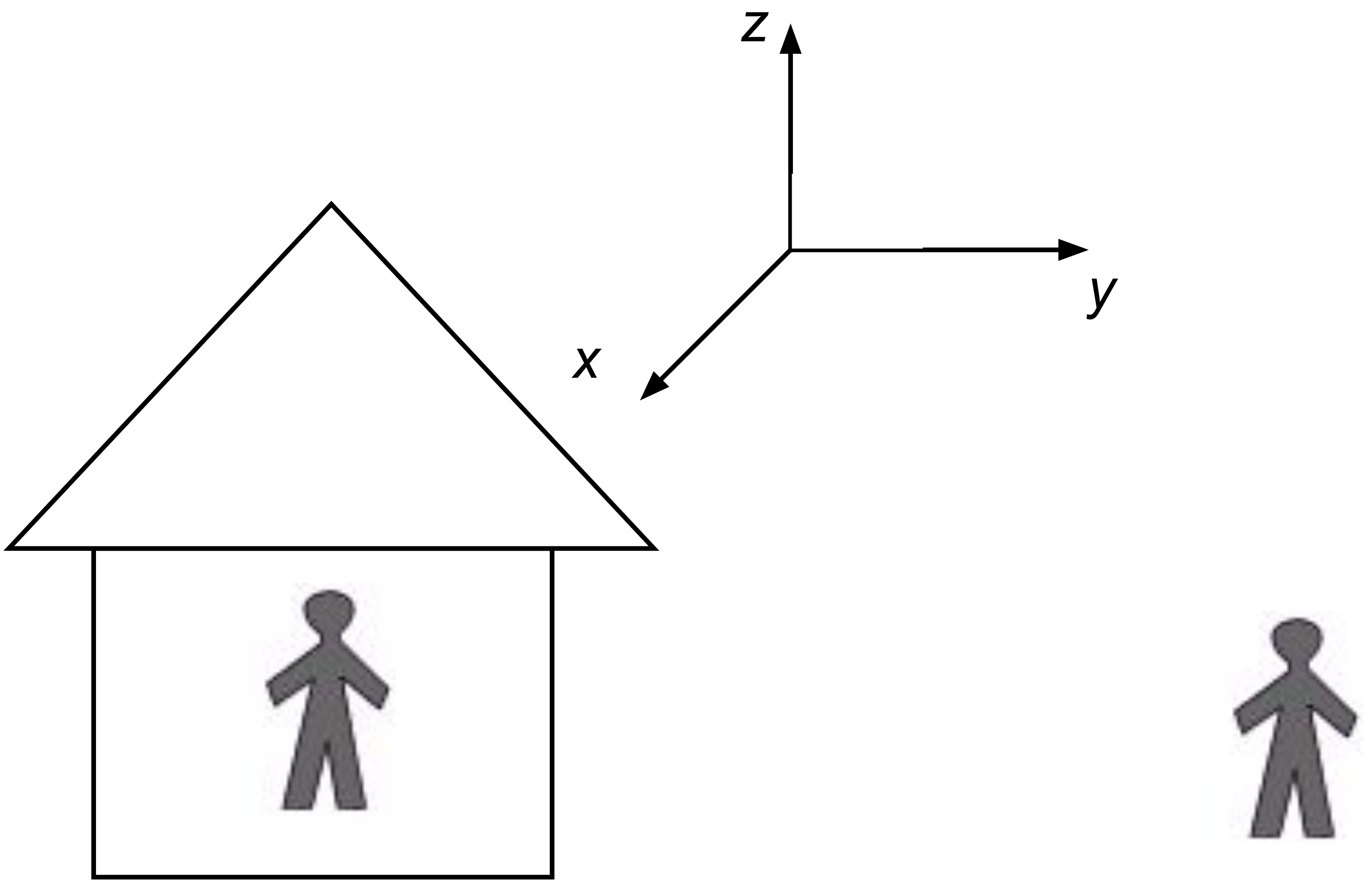
- Дать первоначальное знакомство с четырёхмерным пространством на примере гиперсферы (познакомится с определением гиперсферы, её уравнением и наглядным изображением).

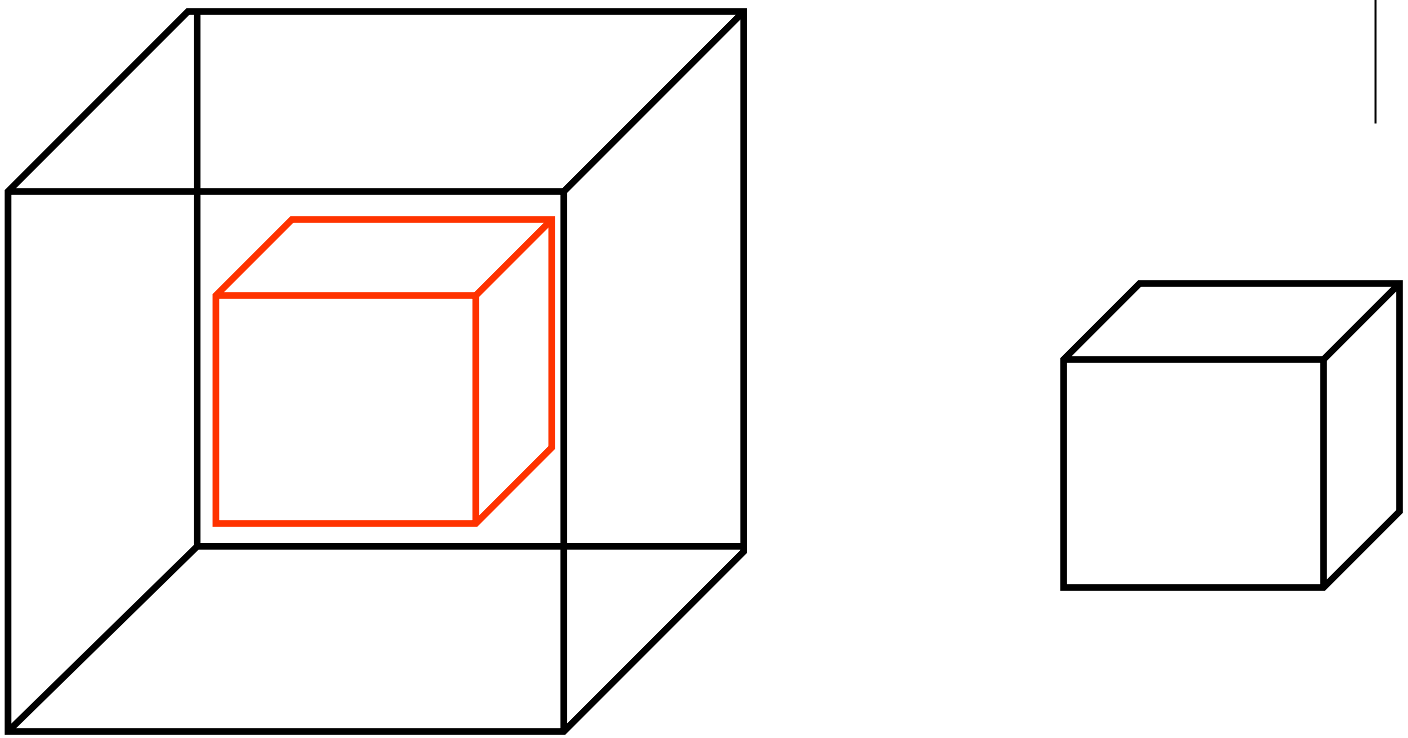
Для создания моделей четырёхмерных фигур в работе были использованы аналогии и закономерности фигур низших размерностей: точка, отрезок, окружность.

Основная часть

- Четырехмерное пространство
  - ✔ Физический способ измерения размерности
  - ✔ Изменение симметрии
  - ✔ Вместимость пространства
- Гиперсфера
  - ✔ Определение
  - ✔ Способы представления гиперсферы
    - Аналитическая модель гиперсферы
    - Динамическая модель гиперсферы
- Гипершар
  - ✔ Определение
  - ✔ Гиперобъем гипершара
  - ✔ Объем границы гипершара

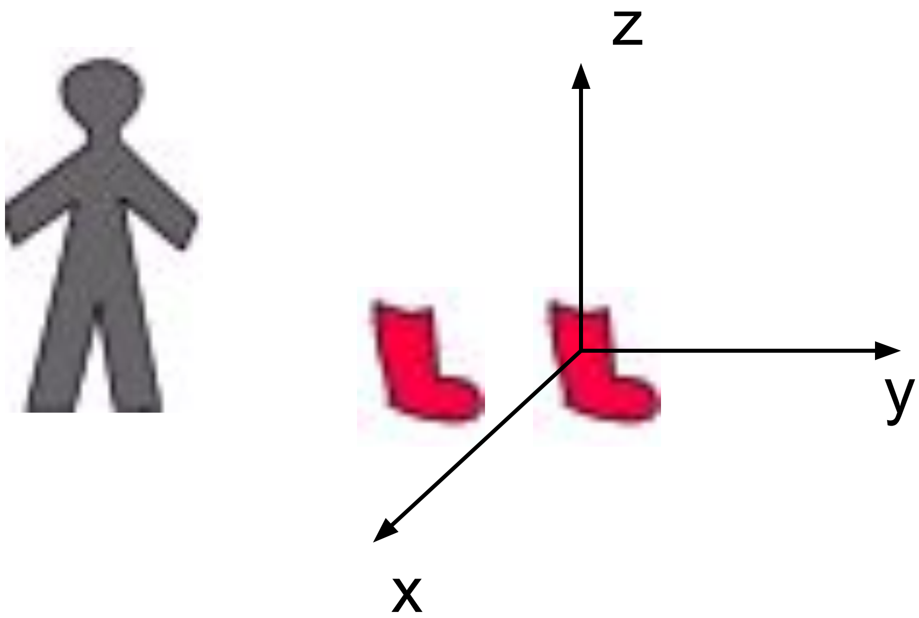
Физический способ измерения размерности



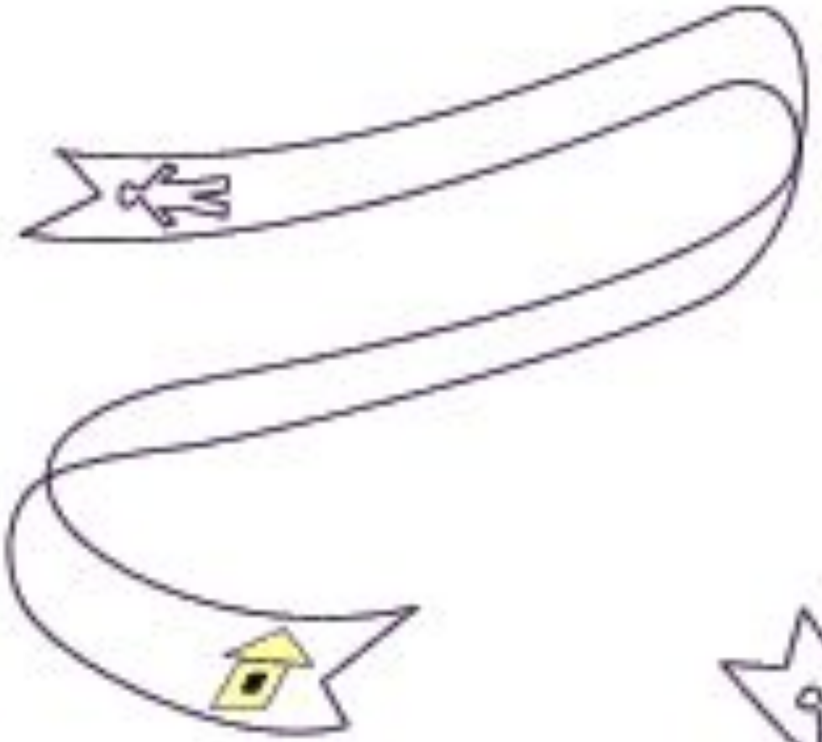


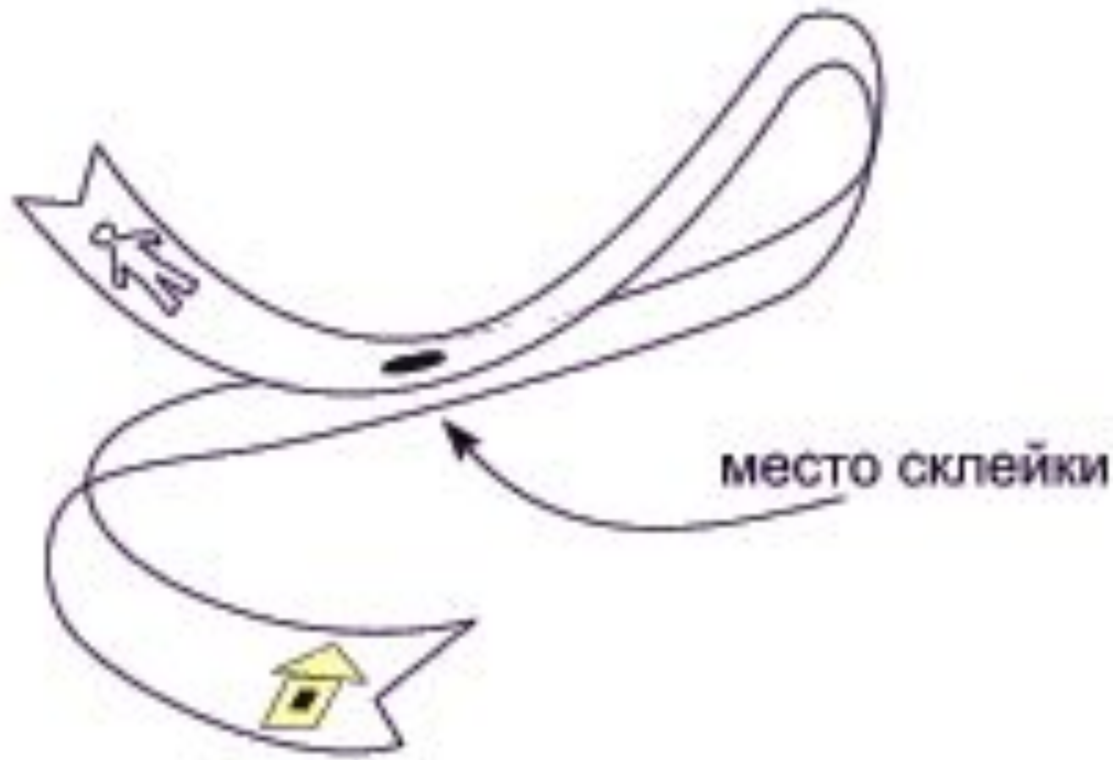
Можно нарушить замкнутость контура при помощи увеличения *мерности пространства*.

Изменение симметрии

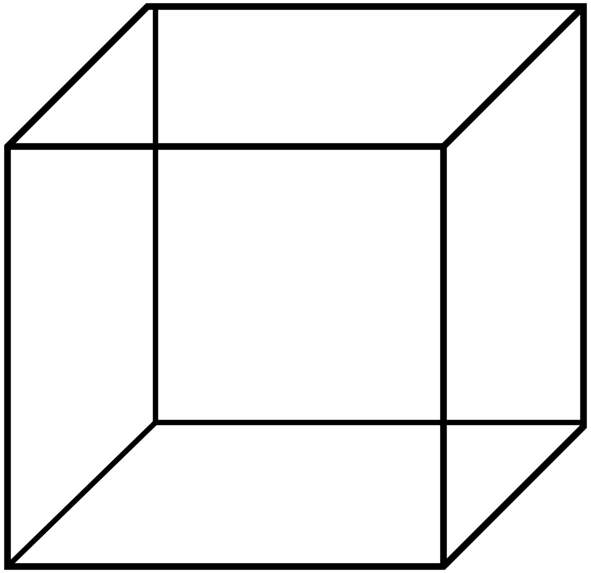


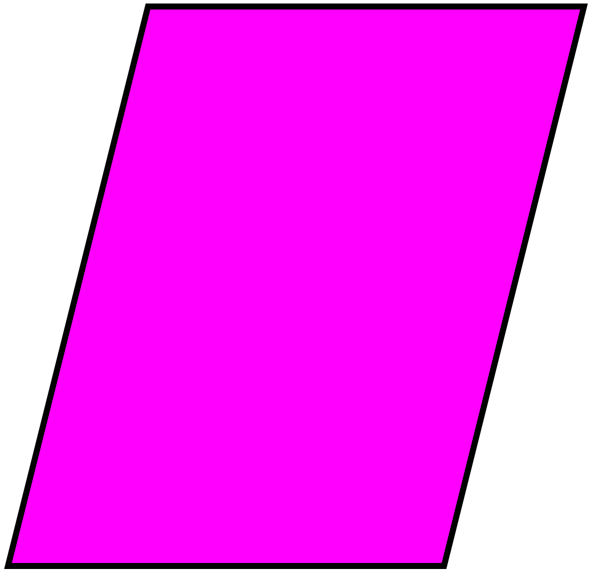
В пространстве размерности (n+1) можно менять симметрию объектов, взятых из пространства размерности n.




место склейки

Вместимость пространства





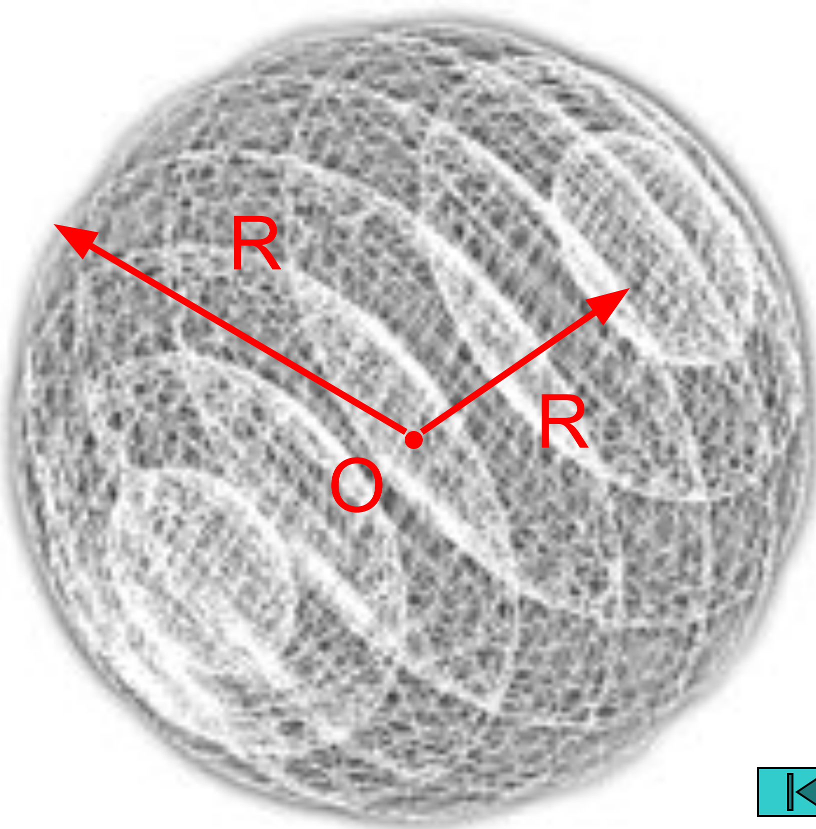
Пространство с увеличением размерности *n* становится все более вместительным.

Гиперсфера

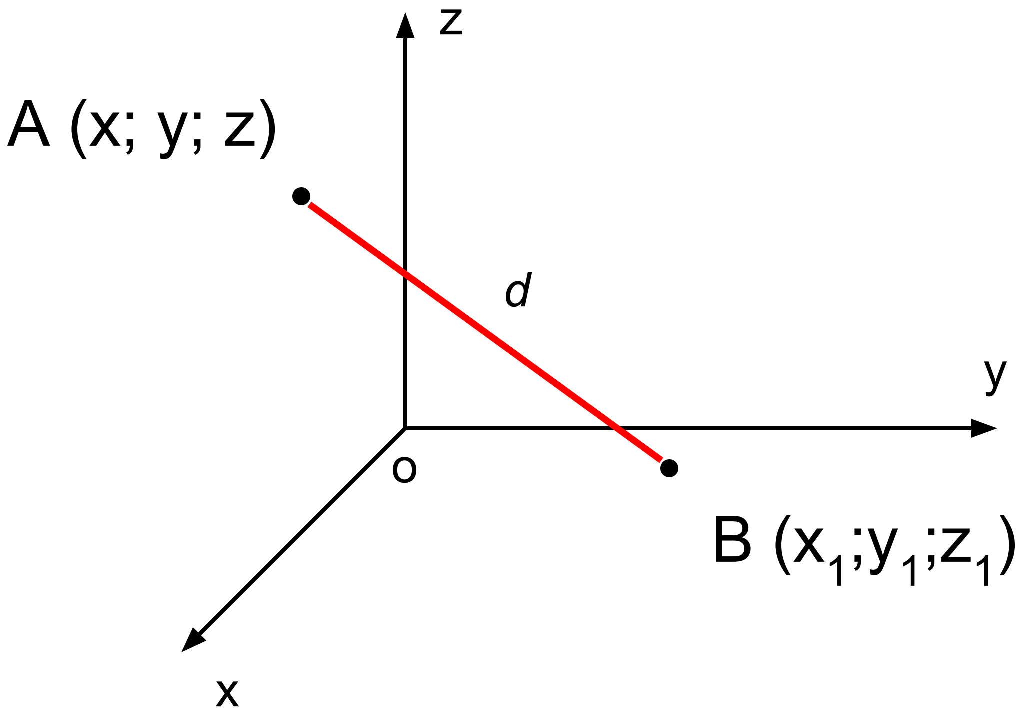
Гиперсфера – геометрическая фигура, состоящая из всех точек четырехмерного пространства, расположенных на данном расстояние от данных точек.

O – центр гиперсферы

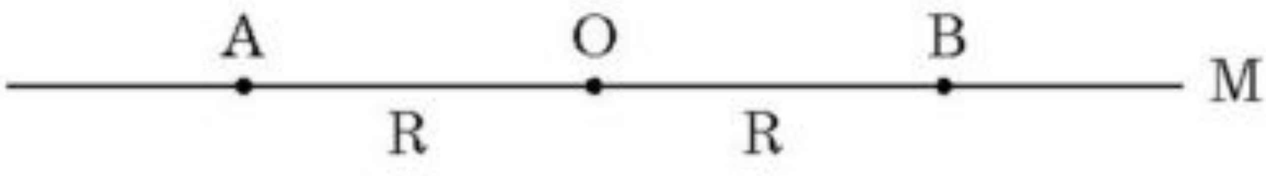
R – радиус гиперсферы



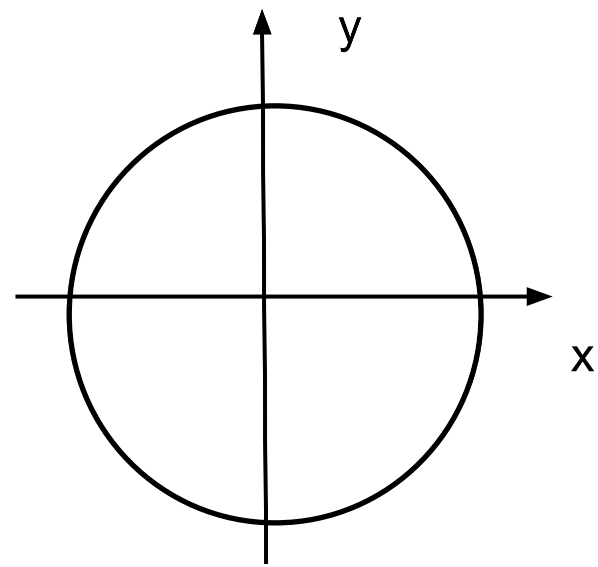
Аналитическая модель гиперсферы



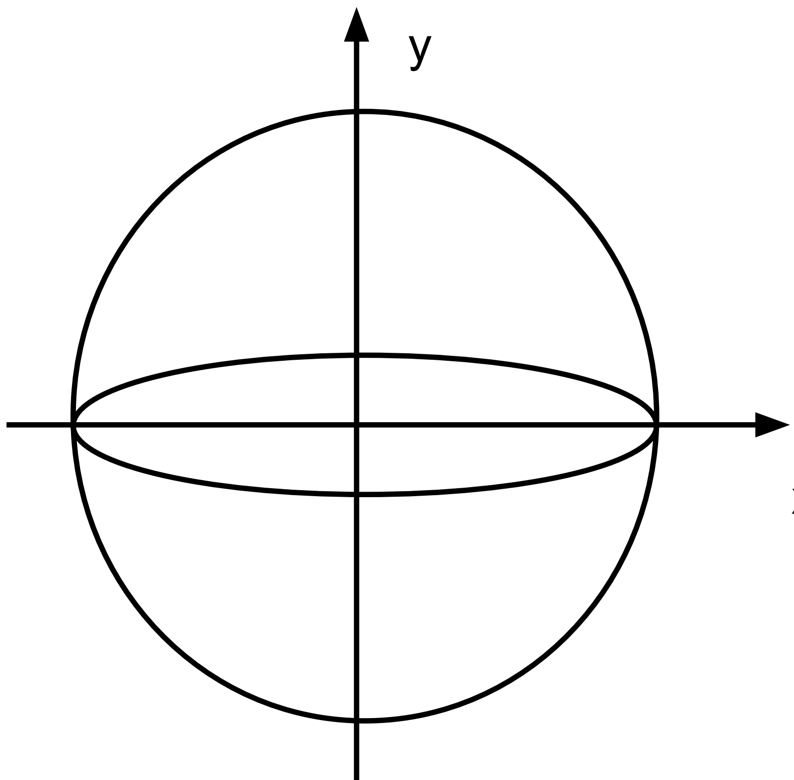
$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$



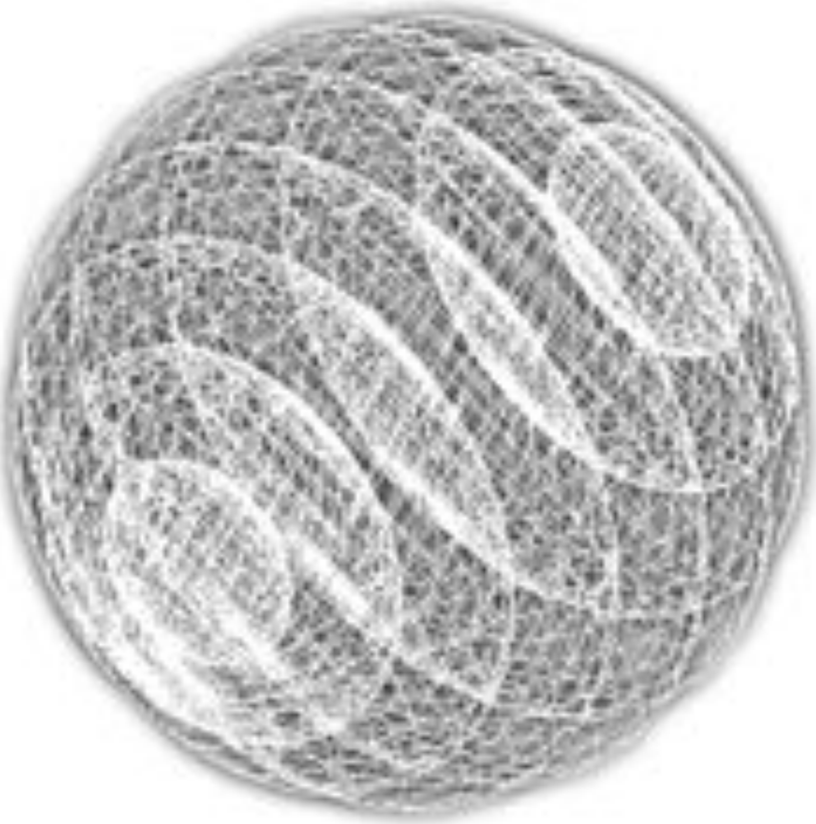
$$(x - x_1)^2 = R^2$$



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$$



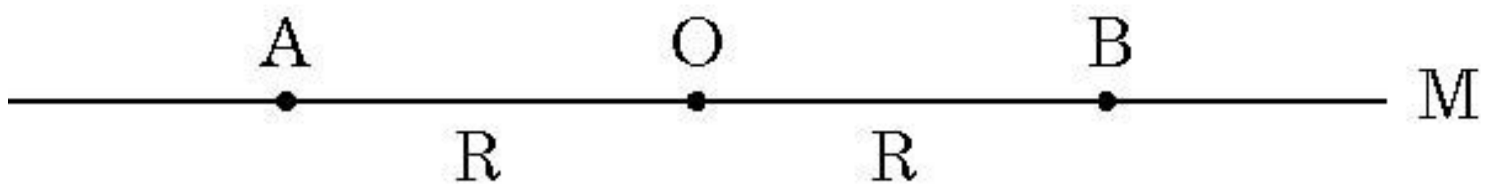
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$$



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (t - t_1)^2 = R^2$$

Динамическая модель гиперсферы

Способ 1



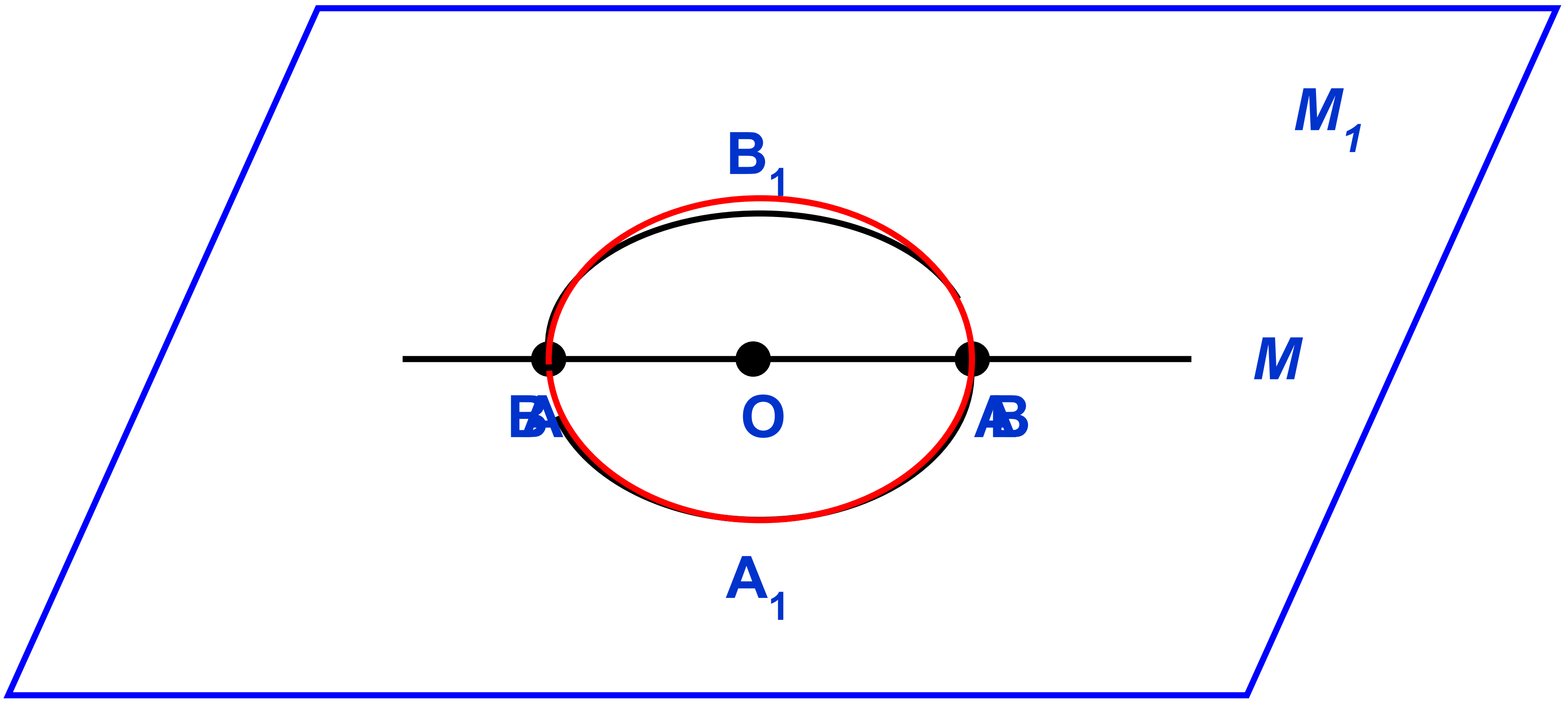
$$\angle AOB = 180^\circ \text{ – одномерная сфера}$$

M – прямая, модель одномерного пространства

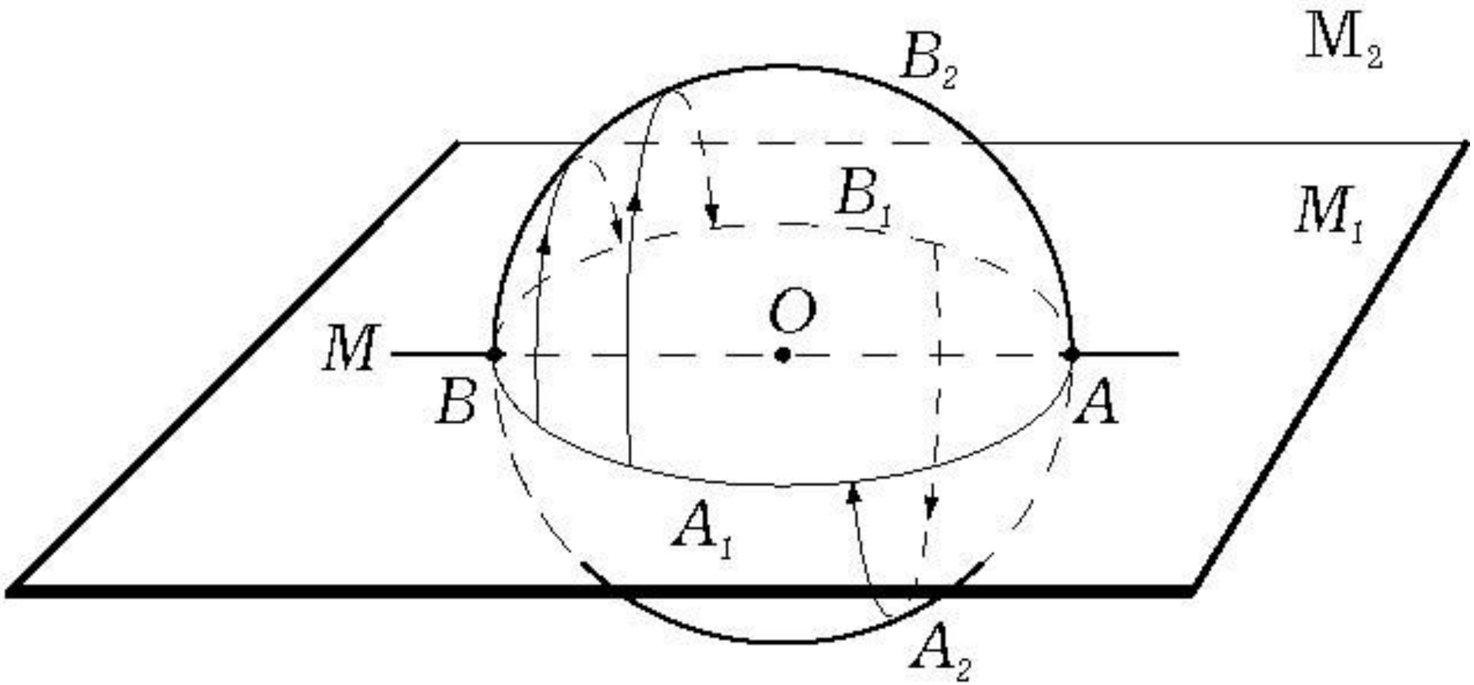
O – центр одномерной сферы

R – радиус одномерной сферы

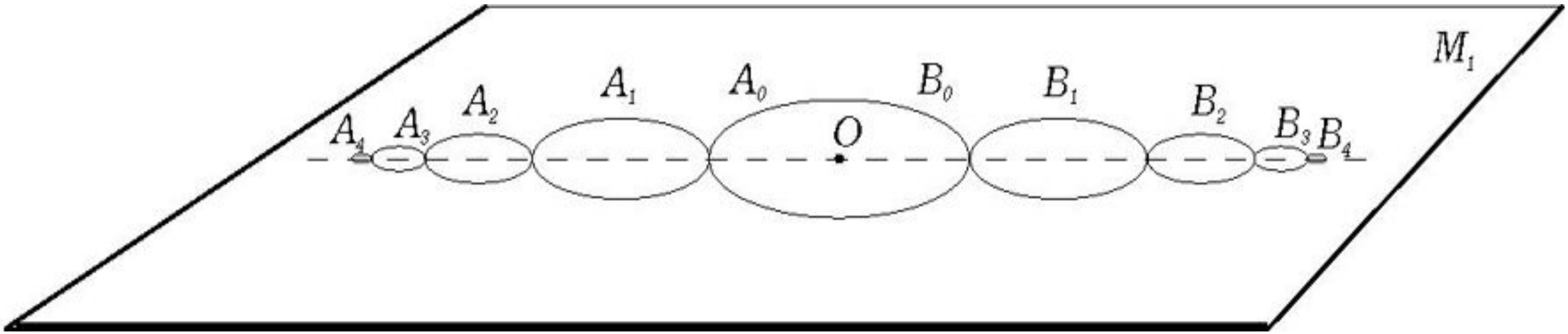
Способ 1



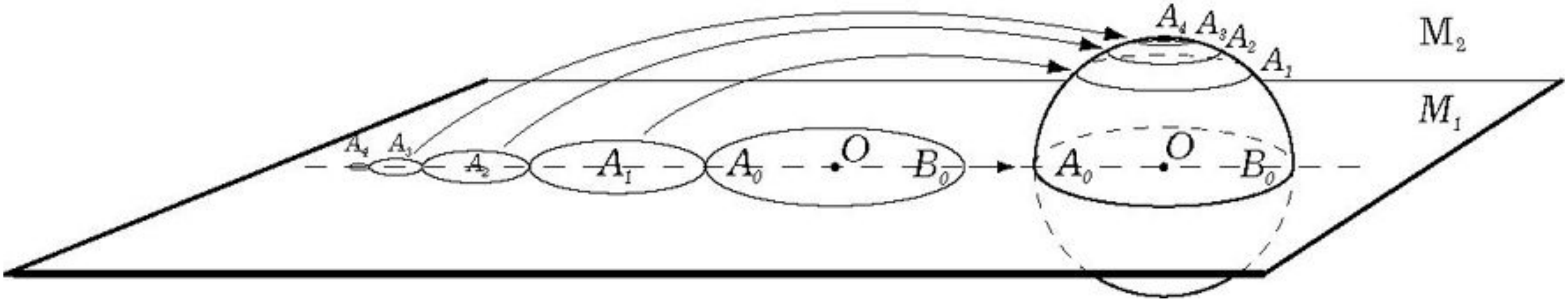
Способ 1



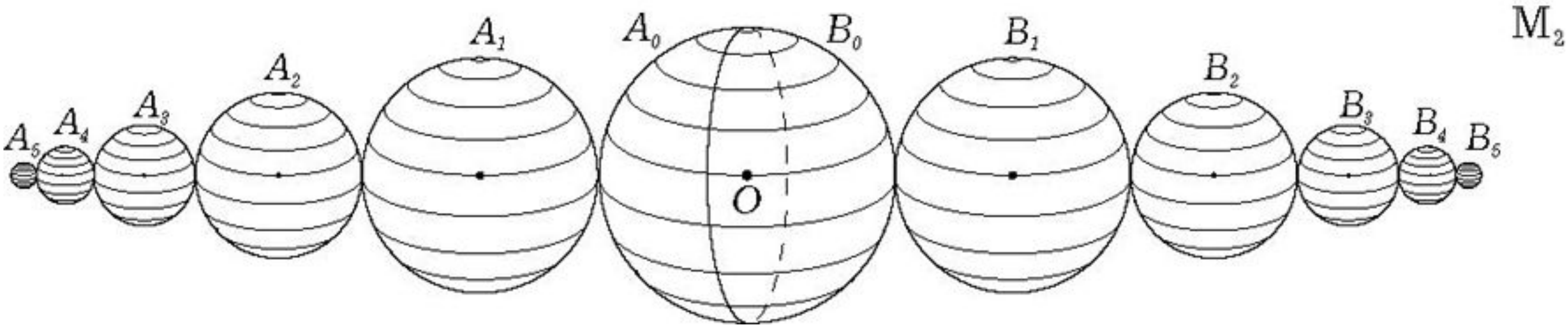
Способ 2



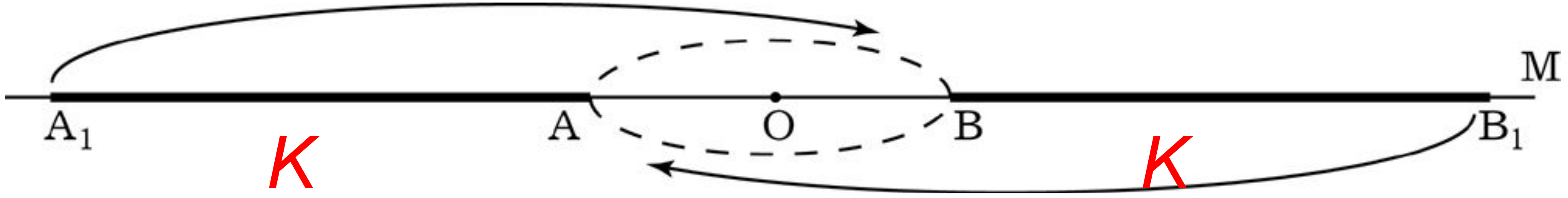
Способ 2



Способ 2

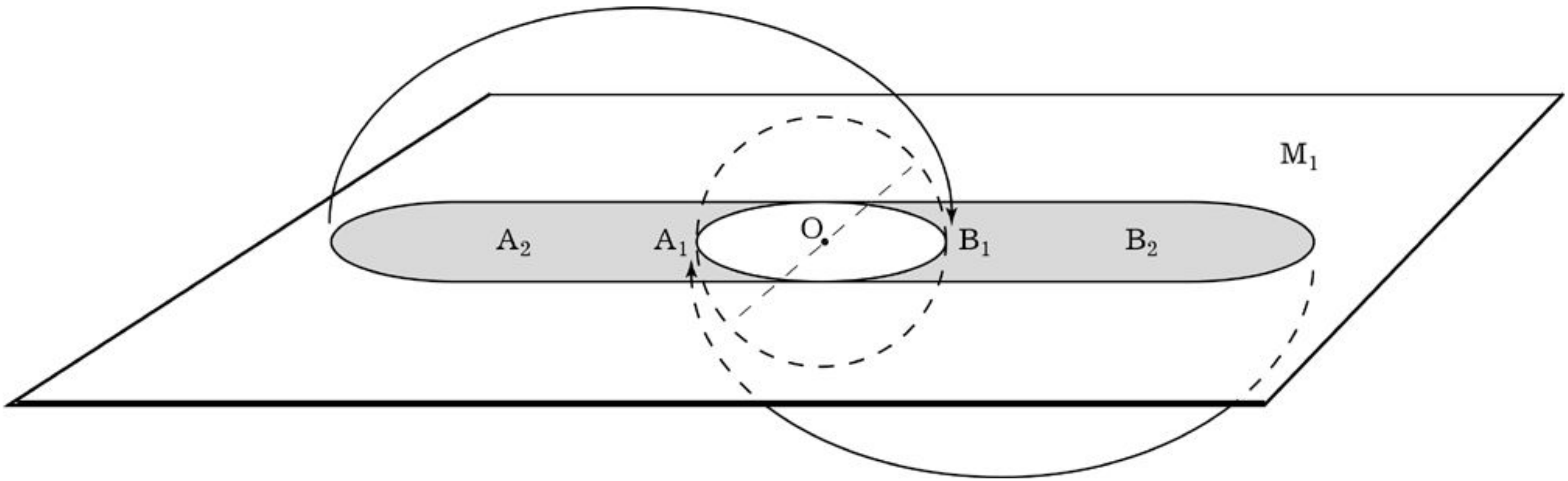


Относительные размеры четырехмерной сферы

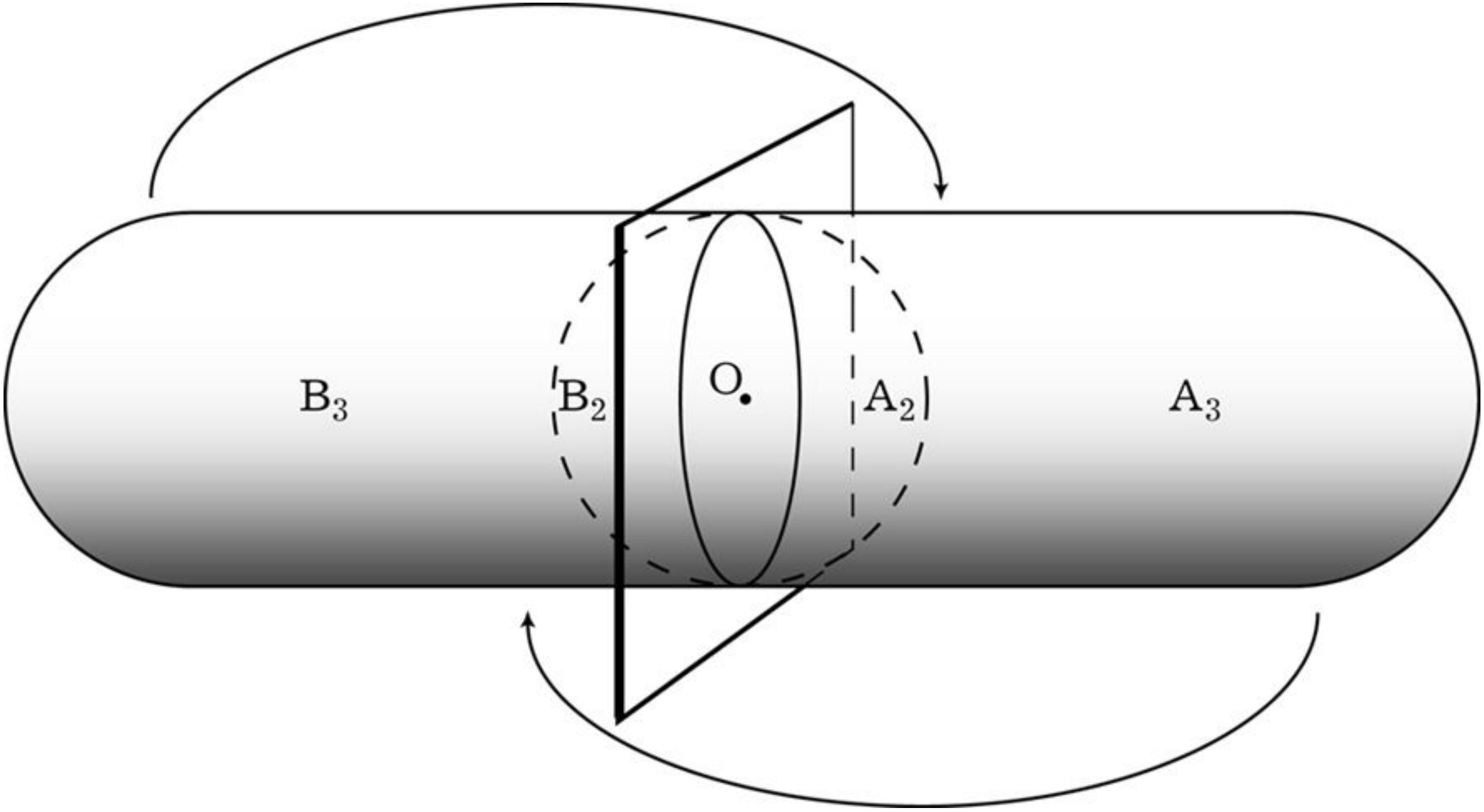


AO=R

K=*3R*



M$_1$
A$_2$
A$_1$
O
B$_1$
B$_2$



B_3
B_2
O
A_2
A_3

Гипершар

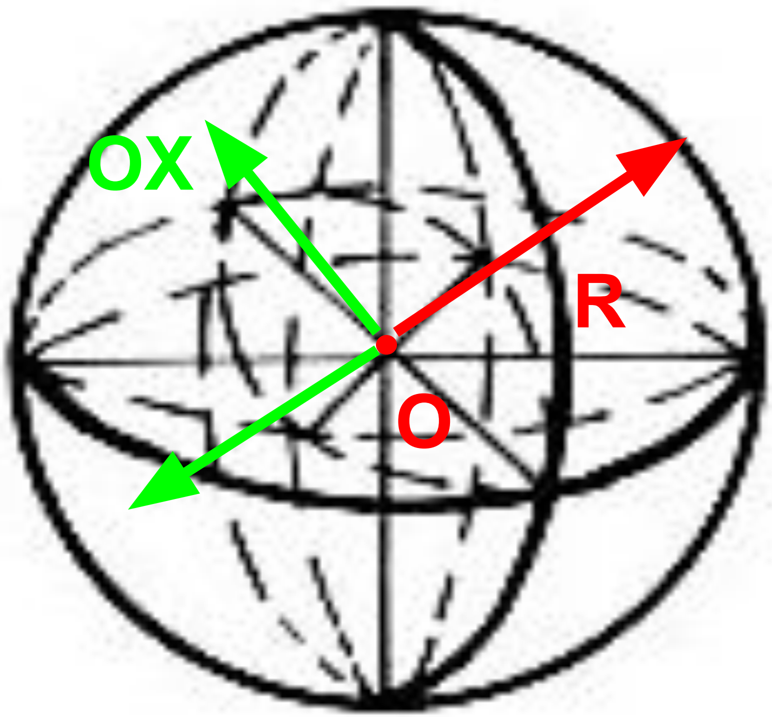
Гипершар – геометрическое тело, состоящее из всех точек четырехмерного пространства, для которых верно неравенство

OX ≤ R

O – центр гипершара,

R – его радиус,

OX – расстояние от точки О до произвольной точки гипершара.



Гиперобъем гипершара

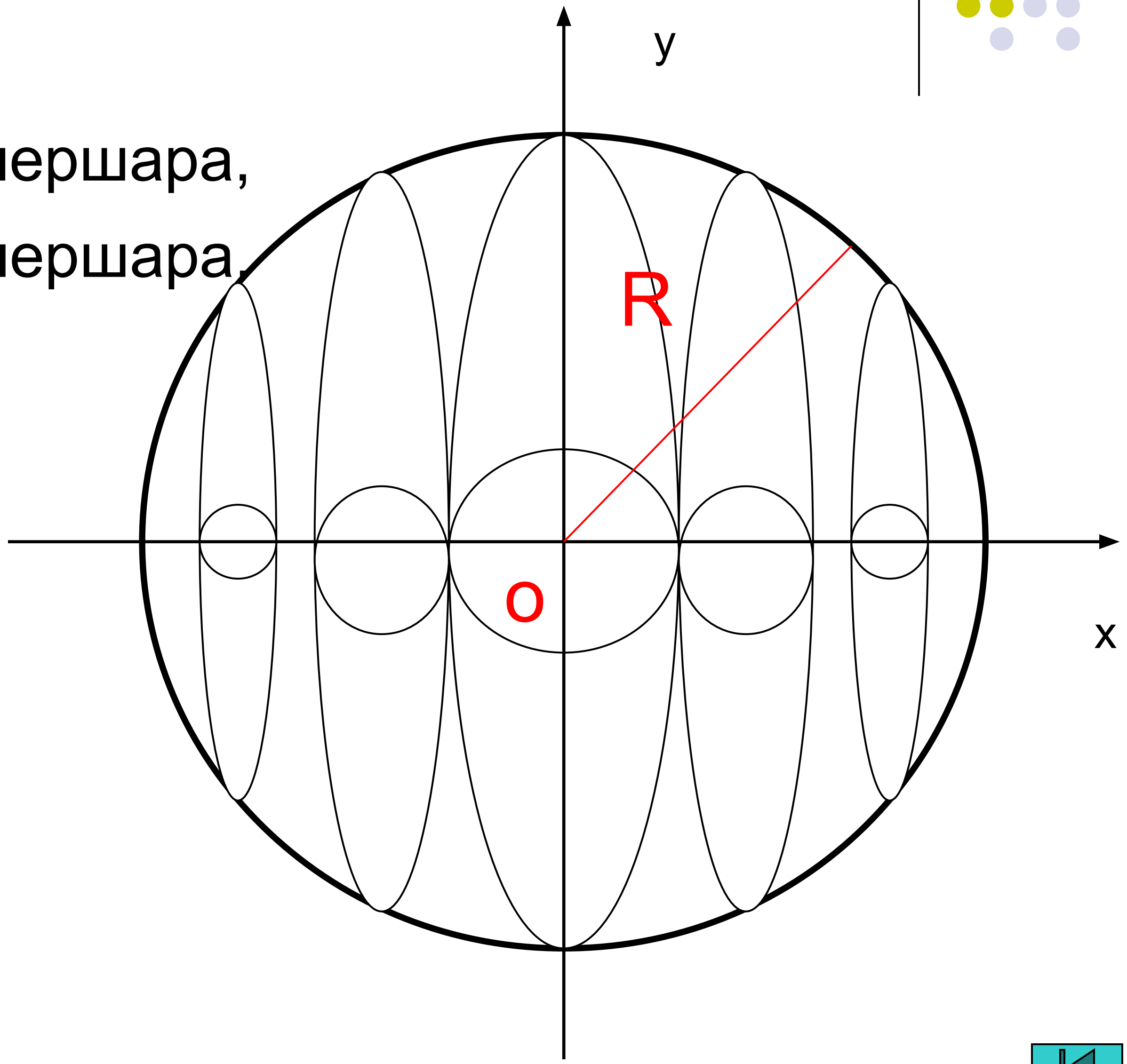
Теорема.

Если **R** – радиус гипершара,

W – гиперобъем гипершара,

то

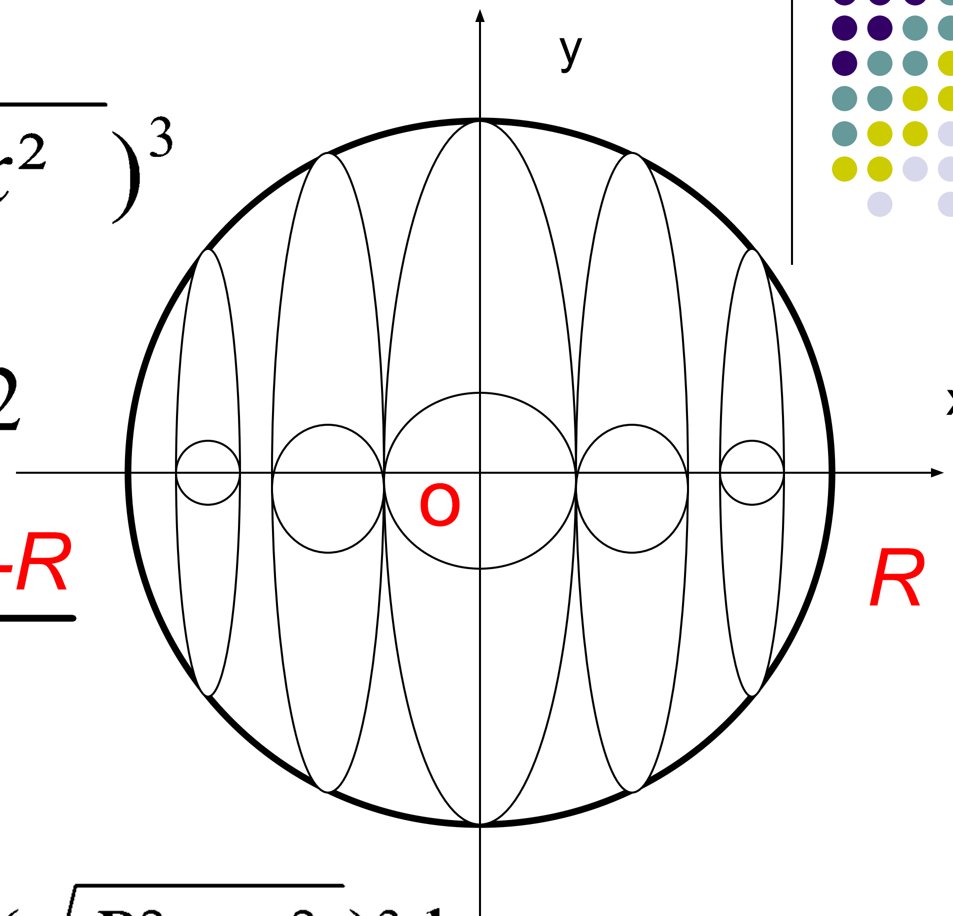
$$W = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$



Доказательство

$$V(x)=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3$$

$$x^2+y^2=R^2$$



$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$W=\int_{-R}^{R}V(x)dx=\int_{-R}^{R}\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3\mathrm{d}x$$

$$W = \frac{4}{3}\pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx$$

$$x = R\sin t \qquad dx = R\cos t\, dt$$

$$(\sqrt{R^2 - x^2})^3 = (\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t})^3 =$$

$$= (\sqrt{R^2(1 - \sin^2 t})^3 = (\sqrt{R^2\cos^2 t})^3 =$$

$$= (R\cos t)^3 = R^3\cos^3 t$$

$$а) -R = R\sin t,\ -1 = \sin t, t = -\frac{\pi}{2}$$

$$б) R = R\sin t,\ 1 = \sin t, t = \frac{\pi}{2}$$

$$W = \frac{4}{3}\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos^3 t \cdot R \cos t \, dt = \frac{4}{3}\pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$

$$W = \frac{4}{3}\pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \; dt$$

$$W = \frac{4}{3}\pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \; dt = \frac{4}{3}\pi R^4 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$

$$\cos^4 t = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2t + \cos 4t)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \; dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2t + \cos 4t)dt = \frac{3\pi}{8}$$

$$\boxed{W = \frac{\pi^2 R^4}{2}}$$

Объем границы гиперсферы

Если **R** – радиус гипершара,

V – объем границы гиперсферы,

то

$$V = 2\pi^2 R^3$$

$$W_{\text{гп}} = \frac{1}{4} V_{\text{осн}} \cdot h$$

$$W_{\text{гмп}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} V_i \cdot h_i$$

n – количество гиперпирамид,

V_i – объем основания i-й гиперпирамиды,

h_i – высота i-й гиперпирамиды.

$$W = \frac{1}{4} VR \qquad W = \frac{\pi^2 R^4}{2} \qquad V = 2\pi^2 R^3$$

Фигура	Шар	Гипершар
Размерность	Трехмерная	Четырехмерная
Граница	Сфера	Гиперсфера
Мера границы	Площадь	Объем
Формула	$S=4\pi R^2$	$V=2\pi R^3$
Мера фигуры	Объем	Гиперобъем
Формула	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$	$W=\frac{\pi^2 R^4}{2}$

Как видим, четырёхмерные фигуры можно изучать и познавать так же, как и трёхмерные, хотя в четырёхмерном пространстве существуют фигуры, аналогов которых нет в пространствах низших размерностей.

Список используемых ресурсов

- http://stratum.ac.ru/textbooks/kgrafic/lection16.html
- http://metaphysic.narod.ru/etud.htm
- http://fizika3000.narod.ru/prwr.htm
- http://ru.wikipedia.org/wiki
- Газета “Математика” приложение «1 сентября» 2005 г.