

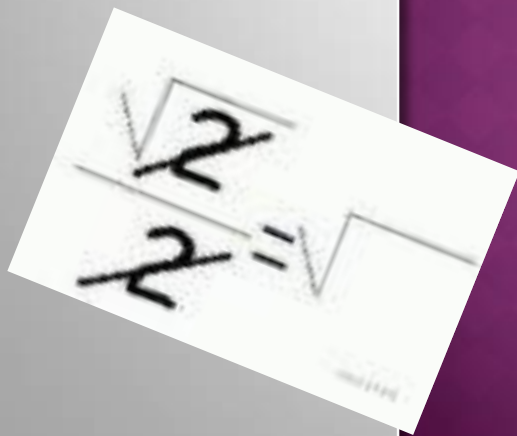
$$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\varphi(x)}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$$

# РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

11 класс

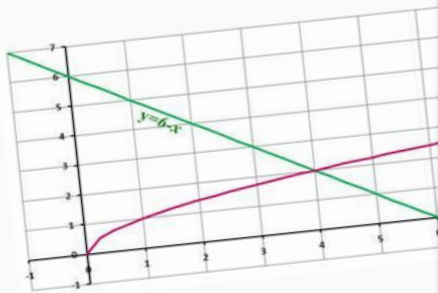
Учитель математики  
МКОУ «Ступинская СОШ №14»  
Сахно Людмила Николаевна



# Решение иррациональных уравнений

## ЦЕЛИ УРОКА

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$$

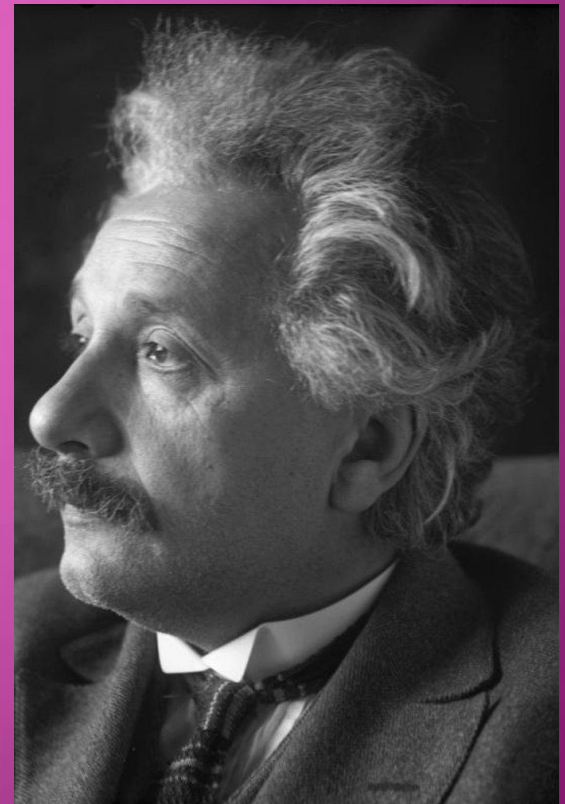


- Систематизация знаний
- Изучение методов решения иррациональных уравнений.
- Практическое применение средств MS Excel к решению иррациональных уравнений.

# Альберт Эйнштейн

© Мне приходится делить  
свое время между  
политикой и  $E=mc^2$   
уравнениями. Однако  
уравнения, по-моему,  
гораздо важнее потому,  
что политика  
существует только для  
данного момента, а  
уравнения будут  
существовать вечно.

$$E=mc^2$$



ЕГЭ

В3

Найдите корень уравнения:  $\sqrt{\frac{10}{4x-26}} = \frac{1}{7}$ .

В3

Найдите корень уравнения  $\sqrt{7x-3} = 5$ .

С1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

С1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

С1. Решите уравнение  $\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$ .

С1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\cos y} \sqrt{6x - x^2 - 8} = 0, \\ \sqrt{\sin x} \sqrt{2 - y - y^2} = 0. \end{cases}$$

С3

Решите неравенство

$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x-1}}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x-1}}\right)^2.$$

Из вариантов  
ЕГЭ 2010-13 и  
диагностичес-  
ких работ  
2009-13гг

ЕГЭ

ЕГЭ

ЕГЭ

ЕГЭ

ЕГЭ

Фамилия				
Этап урока	Время	№ задания	ответ	баллы
2	1 мин.	1 (16)		
	1 мин.	2(16)		
	1 мин.	3 (16)		
3	10 мин.	Виды иррациональных уравнений	По 2 б. за правильный ответ, балло	
4	16 мин.	Методы решения		
		1 (26)		
		2 (26)		
5	10-12 мин.	1 (26)		
		2 а(36)		
		б(26)		
ИТОГ	2-3 мин.			

В ходе урока набираются баллы за каждый этап урока и в итоге суммируются. Максимально возможное количество баллов - На «5» - 18-22 б. «4»- 12-17 б. «3»- 8-11 б.

Результаты заносятся в именную карточку, без исправлений.

1

Какие из следующих уравнений являются иррациональными?

а)  $x + \sqrt{x} = 2$

г)  $\sqrt[3]{x+2} = -1$

б)  $x\sqrt{2} = x + 1$

в)  $x^2 + 2x\sqrt{3} = 1$

Ответ

а, г

2  
э  
т  
а  
п

2

Является ли число  $x_0$   
корнем уравнения?

$$a) \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} \quad , \quad x_0 = 4;$$

$$b) \sqrt[3]{5-x} = 2 \quad , \quad x_0 = -3 .$$

Ответ

*a) нет,  
b) да*

2  
э  
т  
а  
п

3

При каких значениях  $x$   
выражение  $\sqrt{3-x}$   
имеет смысл?

1.  $(-\infty; +\infty)$

2.  $[0; +\infty)$

3.  $(-\infty; 3]$

4.  $[3; +\infty)$

Ответ

3.

2  
э  
т  
а  
п



# ВИДЫ

# ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## Способы решения

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{cases} f(x) = \varphi(x) \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

## Виды уравнений

1)  $\sqrt[4]{x^2 - 9} = 2$

2)  $\sqrt{22 - 2x} - x = 1$

3)  $\sqrt{-2x - 1} - \sqrt{x^2 - 36} = 0$

4)  $(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 0$

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$$

$$f(x) \cdot \sqrt{\varphi(x)} = 0$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = a$$

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \\ \sqrt{\varphi(x)} = 0 \end{cases}$$

СВОЙСТВО  
 $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

**Проверка**

3  
э  
т  
а  
п

# ВИДЫ

# ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$1) \sqrt[4]{x^2 - 9} = 2$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = a$$

СВОЙСТВО  
 $(\sqrt[n]{a})^n = a$

**Проверка**

$$2) \sqrt{22 - 2x} - x = 1$$

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x) \end{cases}$$

$$3) \sqrt{-2x - 1} - \sqrt{x^2 - 36} = 0$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ ИЛИ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x) \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$4) (x + 1) \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$$

$$f(x) \cdot \sqrt{\varphi(x)} = 0$$

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ \left[ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \sqrt{\varphi(x)} = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

○ Пример 1: решить уравнение  $\sqrt[4]{x^2 - 9} = 2$  .

*Решение.* Возведем обе части уравнения в четвертую степень и получим

$$x^2 - 9 = 16, x^2 = 25, x_1 = -5, x_2 = 5.$$

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения. При подстановке их в данное уравнение получаем верные числовые равенства

$$\sqrt[4]{5^2 - 9} = 2 \quad \text{и} \quad \sqrt[4]{(-5)^2 - 9} = 2$$

Следовательно,  $x_1 = -5, x_2 = 5$  - решения уравнения.

○ Пример 2: решить уравнение  $\sqrt{22 - 2x} - x = 1$

$$\sqrt{22 - 2x} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 22 - 2x = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 4x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -7 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$x = 3$ . Ответ: 3.

○ Пример 3. *Решить уравнение:*

$$\sqrt{-2x-1} - \sqrt{x^2-36} = 0$$

$$\sqrt{-2x-1} = \sqrt{x^2-36} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-1 = x^2-36 \\ -2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-35=0 \\ 2x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-7 \\ x \leq -0,5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = -7$ . Ответ : - 7.

◉ Пример 4. Найдите сумму корней уравнения:  $(x + 1) \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$ .

Решение.  $(x + 1)(\sqrt{x^2 + x - 2}) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x + 1 = 0 \\ \sqrt{x^2 + x - 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, x \geq 1 \\ x = -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2, x = 1.$$

Сумма корней  $-2+1=-1$

Ответ: -1.

# ПРОВЕРКА ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

$$1. \sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{7+x} = 4;$$

$$2. \sqrt{5-x} - \sqrt{7-x} + \sqrt{2x-15} = 2;$$

$$3. \sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+24} = 11;$$

$$4. \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1} = 3 - 5x^2.$$

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Возведение в степень.
2. Метод подстановки.

1) Решить уравнение  $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 4 = 0$

2) Решить уравнение  $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$

ОТВЕТЫ

1) 1, 256; 2) 2,5.

- 3) Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{7+x} = 4 .$$



# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 3. Метод использования области определения уравнения.

Решить уравнение:  $\sqrt{5-x} - \sqrt{7-x} + \sqrt{2x-15} = 2$  .

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 4. Метод использования монотонности функции.

Решить уравнение:  $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+24} = 11.$

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5. Метод оценки левой и правой части  
(метод мажорант).

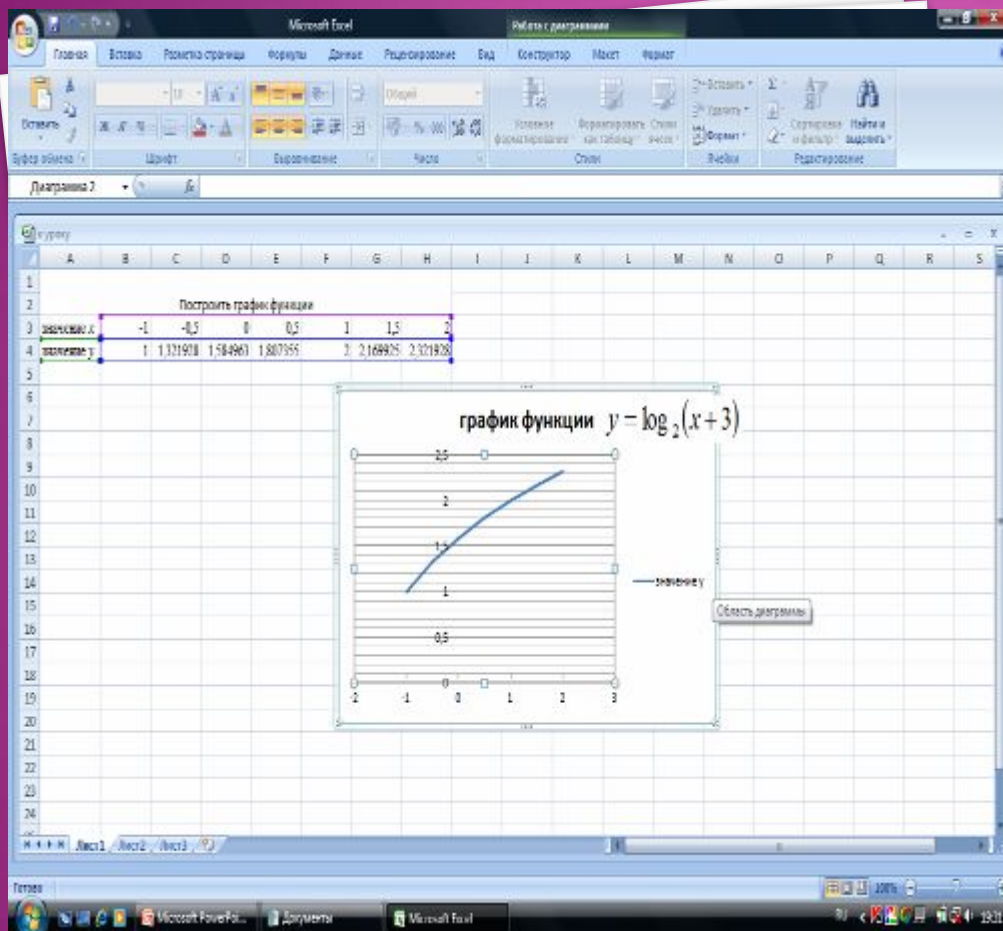
Решить уравнение:  $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1} = 3 - 5x^2$ .

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Возведение в степень.
2. Метод подстановки.
3. Метод использования области определения уравнения.
4. Метод использования монотонности функции.
5. Метод мажорант.
6. **Графический метод.**

# 5 этап

## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ СРЕДСТВАМИ MS EXCEL



- Алгоритм построения
1. Построить таблицу значений  $y$  от  $x$ . Значение  $y$  вычисляется по формуле.
  2. Выделить область построения
  3. Дать команду **Вставка-Диаграммы – Точечная-Точечная с гладкими кривыми**
  4. Задать свойства осей.

На **Рабочем столе** папка **11 класс** книга MS Excel

**Открытый урок.** Создать лист **Решение уравнений**

**Решить графически:**  $\sqrt{x+1} = 1-x$      $\sqrt{x} = 6-x$      $\sqrt{2-x^2} = x^2$

## 5 Решение иррациональных уравнений

а) Решить графически уравнение

$$\sqrt{x+1} = \cos x$$

б) Ответить по графику на вопросы:

□ На каком промежутке график функции

$y = \sqrt{x+1}$  расположен выше графика  $y = \cos x$

□ Какое наименьшее целое значение  $x$  является решением неравенства

$$\sqrt{x+1} > \cos x$$

Ответы

а)  $x=0$

б)  $[0; +\infty)$ ;

1.

Для решения графическим способом использовать средства MS Excel.

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Если вы не можете решить задачу, вы всегда можете взглянуть на ответ.

Но, пожалуйста, постарайтесь решить ее

самостоятельно, тогда вы научитесь большему и быстрее.  
(Д. Кнут. The TeXbook.)

- Решите уравнение:

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} = 1.$$

- Решите уравнение:

$$\sqrt[6]{x^2 - 81} + \sqrt[6]{81 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 54} = 3.$$

- Решите уравнение:

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} = 1.$$

Что означает  
владение  
математикой?  
Это есть умение  
решать задачи,  
притом не только  
стандартные, но и  
требующие  
известной  
независимости  
мышления,  
здорового смысла,  
оригинальности,  
изобретательнос  
ти.  
(Д. Пойа.  
Математические  
открытия.)

## ИТОГИ

- Подсчитайте количество баллов и внесите в лист самоконтроля.
- Подсчитайте свой рейтинг за урок по листку самоконтроля.
- Определите свою оценку за урок.



# РЕФЛЕКСИЯ

- Ответьте на вопросы и поставьте оценку по 5-ти бальной системе:
- *Как, на ваш взгляд, прошел урок, все ли вам было понятно?*  
\_\_\_\_\_
- *2. Вы себя уверенно чувствовали на уроке?* \_\_\_\_\_
- *3. Достаточно ли было вам знаний, полученных ранее?*  
\_\_\_\_\_

# Л И Т Е Р А Т У Р А

- Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. Алгебра и начала анализа 10-11. – М.: «Просвещение», 2009.
- Глазков Ю.А., Денищева Л.О. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ. Математика. – М.: «Интеллект – Центр», 2013.
- Корешкова Т.А., Шевелева Н.В. ЕГЭ 2012. Математика. Тренировочные задания. – М.: «Эксмо», 2012
- Семенов А.В., Юрченко Е.В. Система подготовки к ЕГЭ по математике. – Математика № 17-24, ИД «Первое сентября»