МБОУ «Красноалександровская основная общеобразовательная школа Шебекинского района Белгородской области.»

Доклад:

«Различные способы решения задач на смеси, сплавы, растворы»

Выполнил: Курылкина Т.И.
учитель математики.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Цели и задачи

II. Различные способы решения задач на смеси, сплавы, растворы

1. Теоретические основы решения задач на смеси, сплавы, растворы.
2. Вывод формулы $\frac{m_1}{m_2} = \frac{p - p_2}{p_1 - p}$
3. Обучение решению задач по этой формуле.
3. Список задач для самостоятельного решения.
4. Графические иллюстрации к решению задач на смеси, сплавы, растворы.
5. Вывод формулы для решения задач на неоднократные переливания.
6. Обучение решению задач по этой формуле.
7. Список задач для самостоятельного решения по формуле $C_n = C_0(1 - \frac{a}{V_0})^n$
8. Список задач для самостоятельного решения.

III. Список используемой литературы

Теоретические основы решения задач «на смеси, сплавы, растворы»

Перед тем, как приступить к объяснению различных способов решения подобных задач, примем некоторые ***основные допущения***.

Все получающиеся сплавы или смеси однородны.

При решении этих задач считается, что масса смеси нескольких веществ равна сумме масс компонентов, что отражает закон сохранения массы.

Определение. Процентным содержанием (концентрацией) вещества в смеси называется отношение его массы к общей массе всей смеси.

Это отношение может быть выражено либо в дробях, либо в процентах. Например, если мы в 120 г воды добавим 30 г поваренной соли (NaCl), то общая масса раствора станет 150 г, а концентрация соли в растворе 30:150=0,2 - дробью или 20%. Оба ответа приемлемы.

Иногда концентрация может быть определена и по объёму. Например, если в смеси из 20 куб.м находится 5 куб.м вещества «А», то его ***объёмная концентрация*** равна 5:20=0,25 – в дробях или 25%.

Но, как показывает практика, не всегда сумма объёмов смешиваемых веществ равна объёму их смеси. Поэтому чаще всего мы будем находить процентное содержание по массе.

Выскажем теперь замечание по поводу терминологии:

- процентное содержание вещества;
- концентрация вещества;
- массовая доля вещества.

Для нас это синонимы. Преподаватели химии рекомендуют нам привыкать к термину ***«массовая доля»***, поэтому в данной работе чаще упоминается именно этот термин.

Концентрация – это безразмерная величина. Сумма массовых долей всех компонентов, составляющих смесь, очевидно, равна единице.

Сначала рассмотрим самый распространённый тип задач, где из двух смесей (сплавов, растворов) получают новую смесь (сплав, раствор).

Решим типовую задачу в общем виде, выведем формулу, а затем предложим школьникам образцы решения задач по выведенной формуле.

Итак, решим задачу. Имеются два куска сплава меди с цинком. Процентное содержание меди в них **p_1 %** и **p_2 %** соответственно. В каком отношении нужно взять массы этих сплавов, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий **p%** меди?

Решение. Понаблюдаем за содержанием меди.

	Массовая доля **меди** в сплаве	Масса каждого сплава	Масса **меди** в каждом сплаве
I сплав	p_1 %	m_1 кг	$\frac{m_1 p_1}{100}$ кг
II сплав	p_2 %	m_2 кг	$\frac{m_2 p_2}{100}$ кг
Новый сплав	p%	$(m_1 + m_2)$ кг	$\frac{(m_1+m_2)p}{100}$ кг

Зная, что масса меди в новом сплаве есть сумма масс меди в каждом из взятых кусков, составим уравнение

$$\frac{m_1 p_1}{100} + \frac{m_2 p_2}{100} = \frac{(m_1+m_2)p}{100}.$$

$$m_1 (p_1 - p) = m_2 (p - p_2) \quad (*)$$

Исследуем уравнение (*) при условии, конечно, что будем брать ненулевые массы сплавов.

I случай. Если p_1, p_2 и p попарно не равны, то получим формулу

$$m_1 (p_1 - p) = m_2 (p - p_2) \quad (*)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p - p_2}{p_1 - p} \quad (**)$$

II случай. Возьмём два сплава с одинаковым процентным содержанием меди, т.е. $p_1=p_2$. Решая уравнение (*) , получим, что $p_1=p_2=p$, что очевидно, поскольку ни большей, ни меньшей концентрации сплав просто не получится, если исходные материалы имеют одинаковую процентную концентрацию меди, каковы бы ни были массы исходных сплавов.

III случай: $p_2 = p$, или же будет сказано, что $p_1 = p$, вывод тот же.

Заметим, что если взять два сплава, массы которых одинаковы, т.е. $m_1 = m_2$, то

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

то есть процентное содержание нового сплава станет равно среднему арифметическому процентных концентраций исходных сплавов. Это очень полезное следствие для равных масс исходных сплавов поможет нам в решении некоторых задач. Но даже, если на первых порах вы и забудете это следствие, формула (**) всё равно выведет вас на верный ответ.

А теперь давайте рассмотрим однотипные задачки, решение которых очень удобно по этой формуле.

№	*Задача*	Масса **первой** смеси	Массовая доля чистого вещества в **первой** смеси	Масса **второй** смеси	Массовая доля чистого вещества во **второй** смеси	Массовая доля чистого вещества в **общей их смеси**	*Решение*
		m_1	p_1	m_2	p_1	p	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p-p_2}{p_1-p}$ (**)
1	Смешали некоторое количество 11%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19% раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора. Ответ: 15%	m_1	**11%**	m_2	**19%**	**p%**	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p-11}{19-p}$ $m_1 = m_2 \quad p=15$ Можно также учесть замечание: *если массы исходных растворов равны , то концентрация их смеси равна среднему арифметическому концентраций смешиваемых жидкостей.* $p=(p_1+p_2)/2; \quad p=(11+19)/2; \quad p=15$
2	Сколько килограммов 20%-ного раствора соли нужно добавить к 1 кг 10%-ного раствора, чтобы получить 12%-ный раствор соли? Ответ: 0,25 кг	m_1	**20%**	***1 кг***	**10%**	**12%**	$\frac{m_1}{1} = \frac{12-10}{20-12}; m_1 = 0,25$
3	В сосуд, содержащий 13 литров 18%-го водного раствора некоторого вещества, добавили пять литров воды. Найти концентрацию получившегося раствора. Ответ: 13%	***13 л***	**18%**	***5 л***	**0%**	**p%**	$\frac{13}{5} = \frac{p-0}{18-p}; \quad p=13$
4	В сосуд, содержащий 11 литров 17%-го водного раствора некоторого вещества, добавили шесть литров воды. Найти концентрацию получившегося раствора. Ответ: 11%	***11 л***	**17%**	***6 л***	**0%**	**p%**	$\frac{11}{6} = \frac{p-0}{17-p}; \quad p=11$

А теперь предлагаю учащимся самим решить следующие задания;
это поможет вам прочно усвоить алгоритм решения задач такого типа.

№	*Задача*	Масса **первой** смеси	Массовая доля чистого вещества в **первой** смеси	Масса **второй** смеси	Массовая доля чистого вещества во **второй** смеси	Массовая доля чистого вещества в **общей их смеси**	***Решение***
		m_1	p_1	m_2	p_1	p	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p - p_2}{p_1 - p} \quad (**)$
1.	Имеется два раствора соли в воде, концентрации которых равны 20% и 30%. Сколько килограммов каждого раствора нужно смешать в одном сосуде, чтобы получить 25 кг 25,2%-го раствора? Ответ: 12 кг и 13 кг						
2.	К 3 кг 20%-ого раствора соли добавили 2 кг 10%-го раствора соли. Найти процентное содержание соли в получившемся растворе. Ответ: 16%						
3.	Сколько килограммов воды надо добавить к 20 кг 5%-го раствора соли, чтобы получить 4%-ый раствор соли? Ответ: 5 кг						
4.	В одном бидоне смешали 0,5 л молока 2,6%-ой жирности с 1л молока 3,2%-ой жирности. Какова стала жирность молока в бидоне? Ответ: 3%						
5.	В сосуд, содержащий 30 кг 25%-го раствора соли в воде, добавили 20 кг воды. Найти процентное содержание соли в получившемся растворе. Ответ: 15%						
6.	Сколько воды нужно добавить к 0,5 л раствора спирта в воде, чтобы объёмное содержание спирта в растворе уменьшилось с 60% до 40%? Ответ: 0,25 л						

Теперь покажу, как графические иллюстрации к условию задач помогают найти правильный путь к ответу на вопрос задачи

Задача. ***Сначала приготовили 25%-ый водный раствор поваренной соли. Затем одну треть воды выпарили. Найти концентрацию получившегося раствора.***

Решение

До выпаривания:

NaCl	H_2O	H_2O	H_2O
25%	**25%**	**25%**	**25%**

После выпаривания:

NaCl	H_2O	H_2O
$33\frac{1}{3}\%$	$33\frac{1}{3}\%$	$33\frac{1}{3}\%$

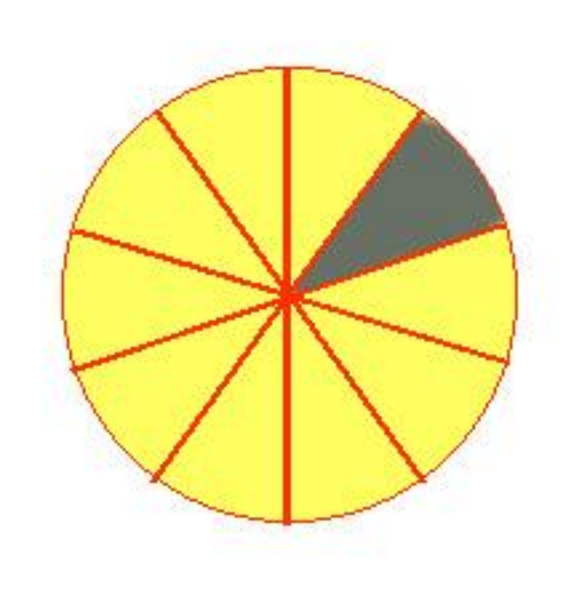
Сейчас соль стала составлять одну треть всего раствора или $33\frac{1}{3}\%$

Ответ: $33\frac{1}{3}\%$

Задача. ***Имеется два сплава золота и серебра. В одном количество этих металлов находится в отношении 1:9, а в другом 2:3. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 15 кг нового сплава, в котором золота и серебро относилось бы как 1:4?***

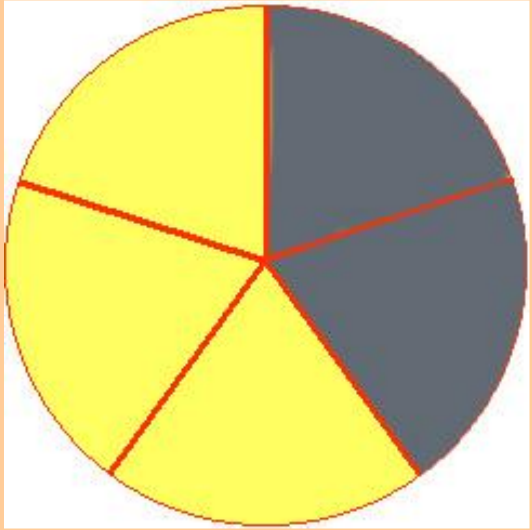
I СПЛАВ

Золота в нём 0,1 доля



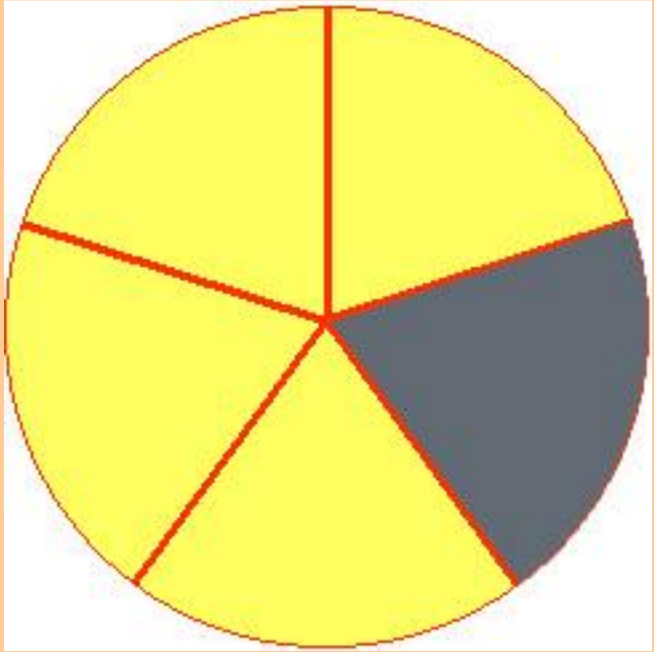
II СПЛАВ

Золота в нём 2/5 или 0,4



НОВЫЙ СПЛАВ

Золота в нём 1/5 или 0,2



Теперь внесём данные в таблицу

Имеется два сплава золота и серебра. В одном количество этих металлов находится в отношении 1:9, а в другом 2:3. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 15 кг нового сплава, в котором золота и серебро относилось бы как 1:4?

	Название элементов	Масса каждого элемента в сплаве	Общая масса сплава	Массовая доля элемента
Первый сплав	**золото**	**0,1х кг**	**Х кг**	**0,1**
	серебро			
Второй сплав	**золото**	**0,4(15-х) кг**	**(15-Х) кг**	**0,4**
	серебро			
Новый сплав	**золото**	**0,2·15=3 кг**	**15 кг**	**0,2**
	серебро			

Решение

0,1х+0,4(15-х) =3

Х =10

m (Iсплава) =10 (кг)

m (II сплава) =15–10 =5 (кг)

Ответ: 10 кг, 5 кг.

Кстати, на предыдущем слайде вам показали ещё один приём решения задач с использованием специальной таблицы, хотя, конечно, и здесь вполне может быть применена формула

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p - p_2}{p_1 - p}$$

где m_1=x, m_2=15-x, p_1=0,1, p_2=0,4, p=0,2

$$\frac{x}{15 - x} = \frac{0{,}2 - 0{,}4}{0{,}1 - 0{,}2}$$

получим x=10.
10 кг первого сплава надо взять.
15-10=5.
5 кг второго сплава надо взять.

Ответ: 10 кг, 5 кг.

№ 7.31(1)

Сколько граммов 75%-ного раствора кислоты надо добавить к 30 г 15%-ного раствора кислоты , чтобы получить 50%-ный раствор кислоты?

- *Решение:*
- *Было х г 75% раствора кислоты, в нём содержится-0,75х (г) кислоты . В 30 г 15%-го раствора кислоты содержится 30·0,15=45(г) кислоты. В (30+х) г 50%-ного раствора содержится 0,5·(30+х) г кислоты, следовательно,0,75х+4,5=0,5·(х+30); 1,5+9=х+30; 0,5х=21; х=42.*
- *Ответ: 42 г.*

№ 7.30 (1)

Сколько граммов воды надо добавить к 180 г сиропа, содержащего 25% сахара, чтобы получить сироп, концентрация которого равна 20%?

- *Решение:*
- *В сиропе* содержится 180/4=45(г) сахара; после добавления х г воды получится (180+х) *г сиропа и в нём сахара 0,2·(180+х) г., следовательно (180+х)·0,2=45; 0,2х=9; х=45.*
- Ответ: 45 г.

№ 7.29(1)

Влажность свежескошенной травы 60%, сена 20%.
Сколько сена получится из 1 тонны свежескошенной травы ?

- *Решение:*
- *Пусть х кг-количество сена с влажностью 20%. Значит на х кг сена приходится 0,2х кг воды и 0,8 кг сухого вещества.0,8 кг составляют 40% от количества . Тогда 0,8х кг-40%; 100% - свежескошенной травы- (0,8х·100)/40=2х ; 2х=1(т); х=0,5(т)*
- *Ответ: 500 кг*

В бидон налили 4 литра молока 3%-ной жирности и 6 литров молока 6%-ной жирности. **Каков процент жирности молока в бидоне ?**

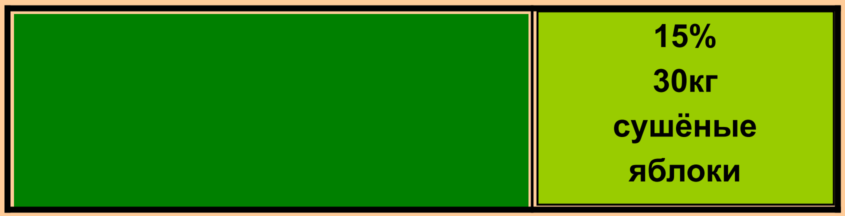
- *Решение:*
- ИМЕЛОСЬ 4 Л МОЛОКА 3%-НОЙ ЖИРНОСТИ, ЭТО ЗНАЧИТ 4·0,03=0,12 Л СОСТАВЛЯЕТ ЖИР , И 3,88 Л МОЛОКО БЕЗ ЖИРА. ИМЕЛОСЬ 4 Л МОЛОКА 3%-НОЙ ЖИРНОСТИ, ИМЕЛОСЬ ТАКЖЕ 6 Л МОЛОКА 6%-НОЙ ЖИРНОСТИ,ЭТО ЗНАЧИТ 6·0,06=0,36 Л ЖИРА, И 5,64 Л МОЛОКА БЕЗ ЖИРА.
- *Значит в 10 л содержимого бидона0,12+0,36=0,48 л жира, тогда жирность молока в бидоне 4,8%*

Из сосуда ,доверху наполненного 99% раствором кислоты, отлили 3,5 литра жидкости и долили 3,5 литра 51%-ного раствора этой же кислоты. После этого в сосуде получился 89%-ный раствор кислоты. Сколько литров раствора вмещает сосуд?

- *Решение:*
- *Первое состояние сосуда: 99% раствор, значит 0,99V- «чистая» кислота, 0,01V-вода, где V-объём сосуда. Если отлили 3,5 литра жидкости, то (V-3,5 л)- это второе состояние сосуда и при этом из сосуда «ушли» при отливе:3,5 ·0,99=3,465 л «чистой» кислоты и 3,5·0,01=0,035 л воды*
- *Третье состояние сосуда: долили3,5 л 51% раствора кислоты, значит «пришли»: 3,5·0,51=1,785 л «чистой» кислоты и 3,5·0,49=1,715 л воды*
- *Четвёртое состояние сосуда (конечное): 89% раствор кислоты, т.к. 0,89V- «чистая» кислота, 0,11V-вода.*
- *Сравним состояние 1 и 4:0,99V -0,89V =0,01V разница кислоты и 0,11V -0,01 V =0,01 V- разница воды/*
- *Из 2 и 3 состояния видим, что эта разница приходится на 3,465-1,785=1,68 л кислоты и 1,715-0,035=1,68 л -вода; тогда0,01 =1,68 л=> =16,8 л.*
- *Ответ: ёмкость сосуда 16,8 л.*

Привожу тексты и решения некоторых задач.

1. *Яблоки при сушке теряют 85% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы получить 30 кг сушёных?*



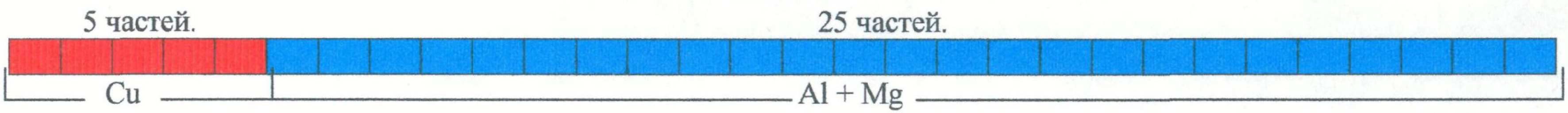
Решение: ***30:15*100=200 (кг)*** Ответ: 200 кг.

2. *В сплаве олова и меди медь составляет 85%. Сколько надо взять сплава, чтобы в нём содержалось 4,5 кг олова?*

Решение: ***4,5:15*100=30 (кг)*** Ответ: 30 кг.

Задача. **В сплаве меди, алюминия и магния масса меди в пять раз меньше суммарной массы алюминия и магния, а масса магния составляет 25% суммарной массы алюминия и меди. Найти отношение массы алюминия к сумме масс магния и меди.**

Решение:



Учтём, что 25% - это дробь ¼.

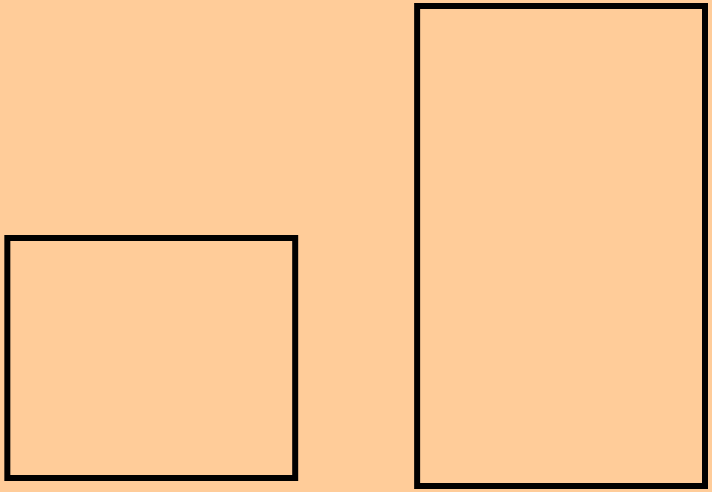
m(Al) : m(Mg + Cu)= 19:11

Ответ: 19:11.

Приведём пример задачи повышенной сложности. Графическая иллюстрация на каждом этапе решения помогла мне прийти к верному ответу

Для составления смеси из двух жидкостей *А* и *В* были взяты два сосуда: первый – ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости *А*. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью *В* и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости *А* столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости *А* ко всему объёму имеющейся жидкости для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости *А* было налито первоначально в первый сосуд?

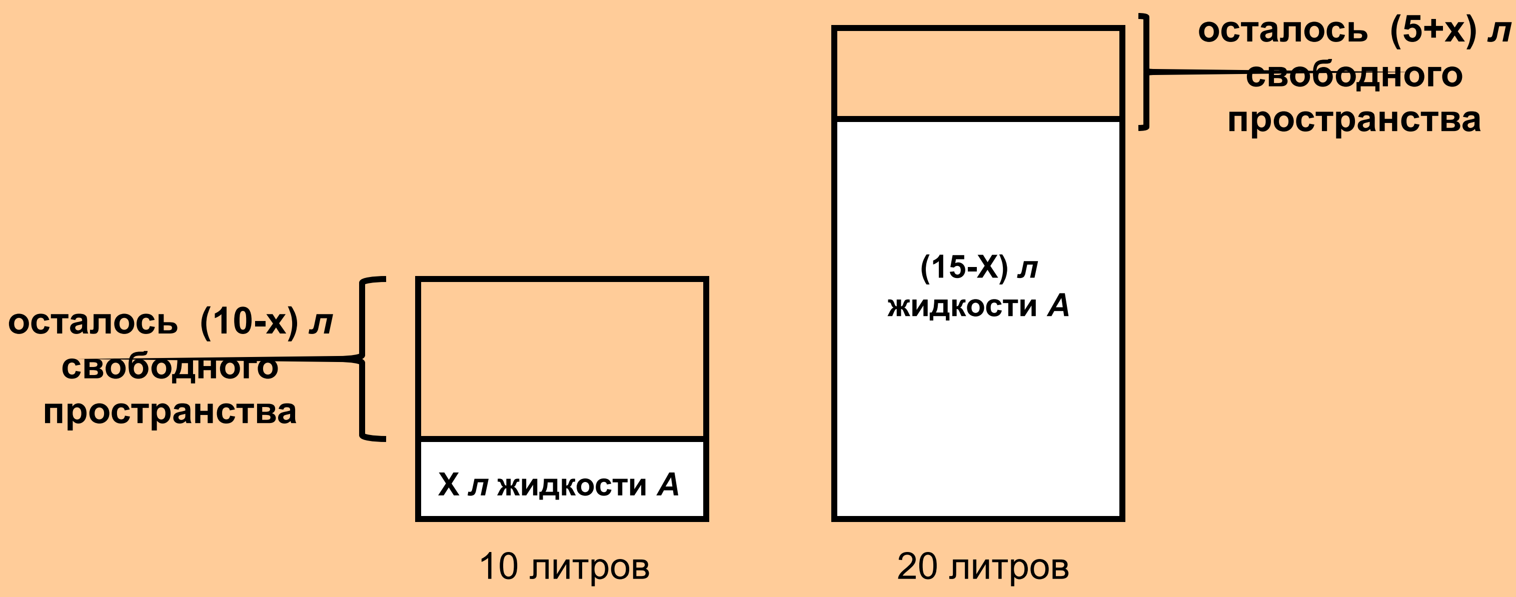
были взяты два сосуда : первый – ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров (пустые!)



10 литров **20 литров**

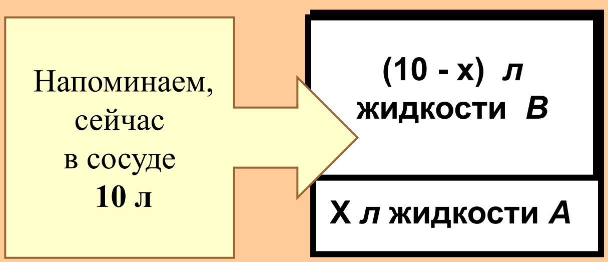
Для составления смеси из двух жидкостей *A* и *B* были взяты два сосуда: первый – ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости *A*. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью *B* и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости *A* столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости *A* ко всему объёму имеющейся жидкости для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости *A* было налито первоначально в первый сосуд?

Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости *A*.



Для составления смеси из двух жидкостей *А* и *В* были взяты два сосуда: первый – ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости *А*. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью *В*, и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости *А* столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости *А* ко всему объёму имеющейся жидкости для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости *А* было налито первоначально в первый сосуд?

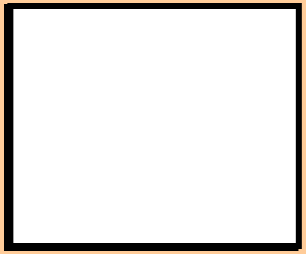
Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью *В*



Сейчас массовая доля жидкости *А* в первом сосуде равна **x/10**

Для составления смеси из двух жидкостей *A* и *B* были взяты два сосуда: первый – ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости *A.* Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью *B* и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости *A* столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости *A* ко всему объёму имеющейся жидкости для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости *A* было налито первоначально в первый сосуд?

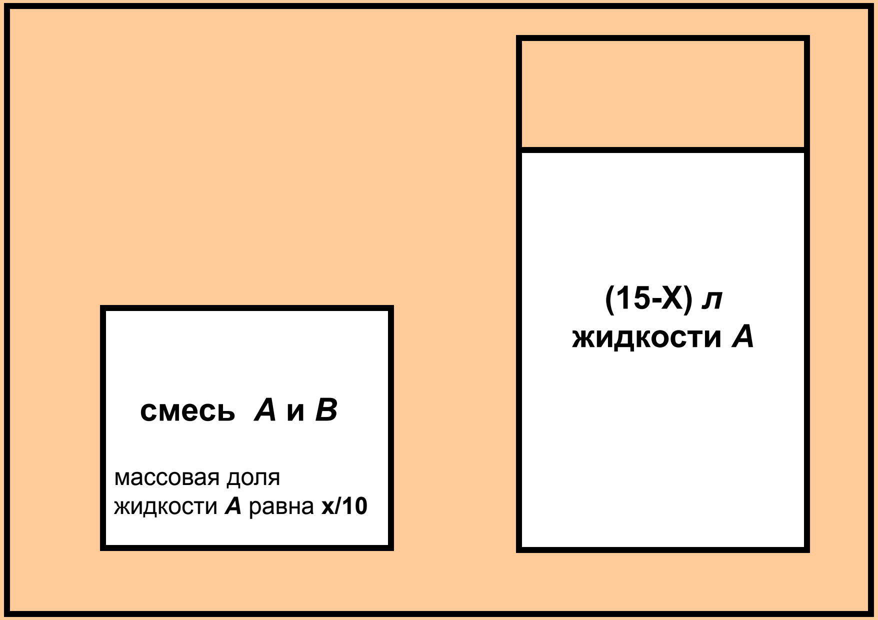
было произведено перемешивание

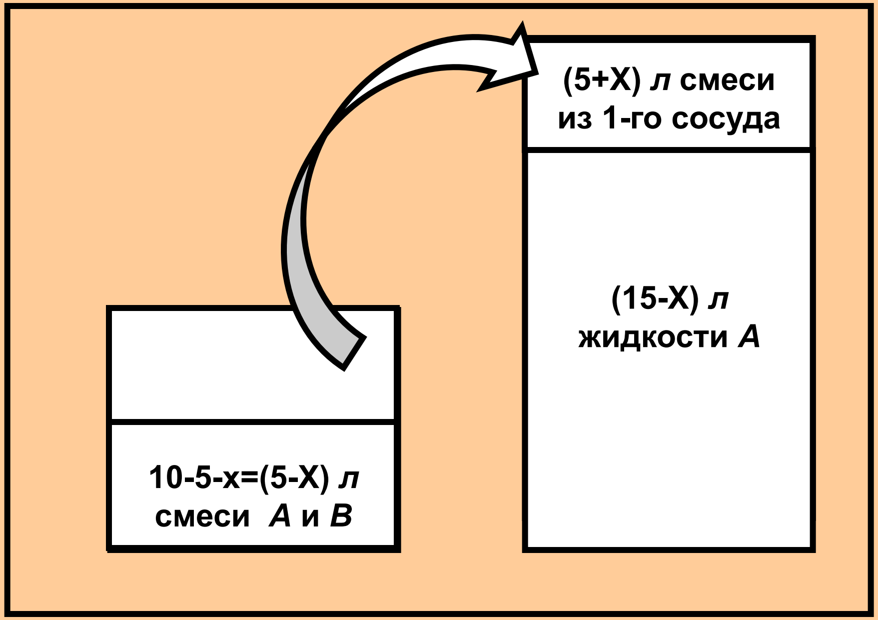


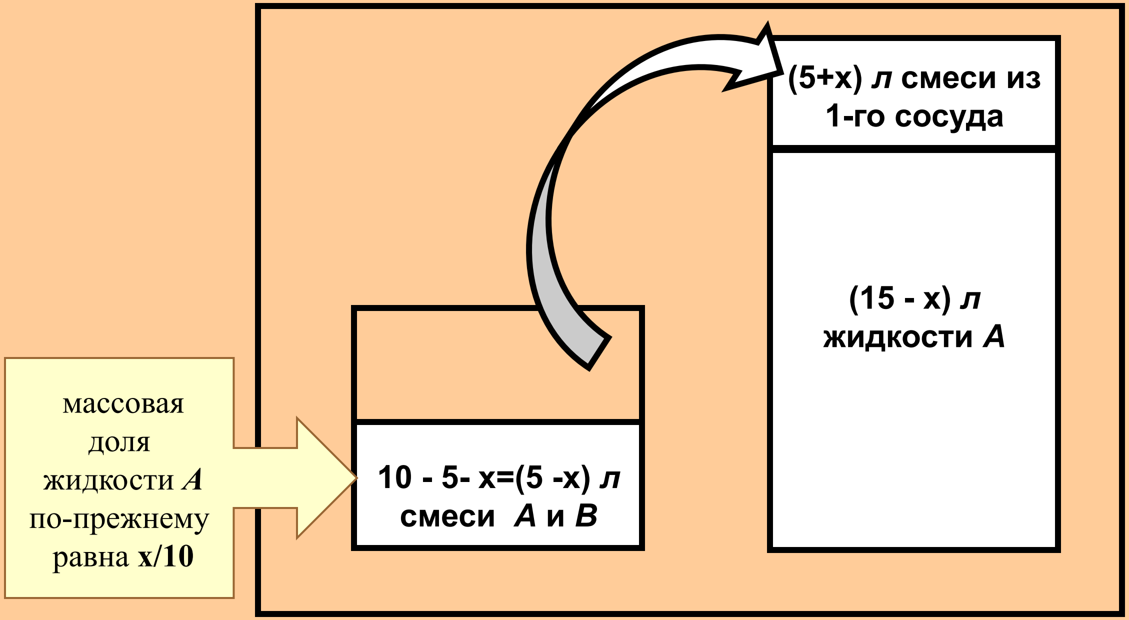
Сейчас здесь **10 л** смеси.
Массовая доля жидкости ***A*** равна **x/10.**

Для составления смеси из двух жидкостей *A* и *B* были взяты два сосуда: первый – ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости *A*. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью *B* и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости *A* столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости *A* ко всему объёму имеющейся жидкости для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости *A* было налито первоначально в первый сосуд?

После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда.







Узнаем сколько чистого вещества ***А*** поступило во второй сосуд: **(5+x)x/10 л,** да ещё было в нём **(15 - x) *л* жидкости *А.***

Итого сейчас во втором сосуде **(5+x)x/10 + (15-x) *л*** жидкости ***А,*** или

$(x^2 - 5x+150)/10$ *л* жидкости ***А.***

Зная, что объём второго сосуда **20 л**, рассчитаем массовую долю вещества ***А*** во втором сосуде

$(x^2 - 5x+150)/(10*20)$ или **$(x^2 - 5x+150)/200$**

Для составления смеси из двух жидкостей *А* и *В* были взяты два сосуда: первый – ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости *А*. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью *В* и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как <u>в первый сосуд было добавлено жидкости *А* столько, сколько было в него её налито сначала,</u> отношения количества жидкости *А* ко всему объёму имеющейся жидкости для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости *А* было налито первоначально в первый сосуд?

массовая доля жидкости *А* по-прежнему равна **x/10**

10 - 5- x=(5 -x) *л* смеси *А* и *В*

В первом сосуде сейчас находится $(5 - x)\, x/10$ *л* чистого вещества *А*

<u>в первый сосуд было добавлено жидкости *А* столько, сколько было в него её налито сначала, т.е. x л</u>

5-x+x=5 *л* смеси стало в 1-ом сосуде

В этой смеси чистого вещества *А* $(5-x)x/10 + x = (-x^2+15x)/10$ **л**

5 л
стало в 1-ом сосуде

Разделив массу чистого вещества *А* на всё количество смеси в 1-ом сосуде, рассчитаем массовую долю этого вещества

$(-x^2+15x)/(10*5)=(-x^2+15x)/50$

Для составления смеси из двух жидкостей *А* и *В* были взяты два сосуда: первый – ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости *А*. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью *В* и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости *А* столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости *А* ко всему объёму имеющейся жидкости для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости *А* было налито первоначально в первый сосуд?

Итак мы получили: массовая доля вещества ***А*** в 1-ом сосуде **$(-x^2+15x)/50$,**

массовая доля вещества ***А*** в 2-ом сосуде **$(x^2-5x+150)/200$.**

По условию задачи

отношения количества жидкости *А* ко всему объёму имеющейся жидкости для первого и второго сосудов стали равными.

Составим уравнения **$(-x^2+15x)/50 = (x^2-5x+150)/200$.**

Решив это уравнение, получим **$x_1 = 10$** **$x_2 = 3$**

*Но **10 л** жидкости **А** не могли налить в первый сосуд, т.к. в нём не осталось бы свободного пространства.*

Ответ: 3 л было налито первоначально в первый сосуд.

Применение свойств элементарных функций к решению задач

Задача. ***Два сосуда с раствором соли поставлены для выпаривания. Ежедневно выпариваемые порции соли постоянны для каждого сосуда. Из первого сосуда получено 48 кг соли, а из второго, стоявшего на 6 дней меньше - 27кг. Если бы первый сосуд стоял столько же дней, сколько второй, а второй столько же, сколько первый, то из обоих растворов получилось бы одинаковое количество соли. Сколько дней стоял каждый раствор?***

Решение. Обратим внимание на фразу из задачи: **ежедневно выпариваемые порции соли постоянны для каждого сосуда.**

Это надо понять так, что масса получаемой соли прямо пропорциональна количеству дней выпаривания, при этом количество соли, получаемой каждый день, это и есть коэффициент пропорциональности. То есть имеем функциональную зависимость:

Количество выпариваемой соли = скорость выпаривания * количество дней.

Пусть $К_1$ – коэффициент пропорциональности для первого сосуда, $К_2$ – для второго сосуда. Х дней выпаривали соль из первого сосуда.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 48=К_1Х, \\ 27=К_2(Х-6), \\ К_1(Х-6)=К_2Х. \end{cases}$$

$$К_1=48/Х,$$
$$К_2=27/(Х-6)$$

Подставим полученные значения в третье уравнение системы

$$(48/Х)^*(Х-6)=(27/(Х-6))^*Х$$

Обозначив участвующие здесь обратные дроби соответственно как t и 1/t, получим, что t=3/4

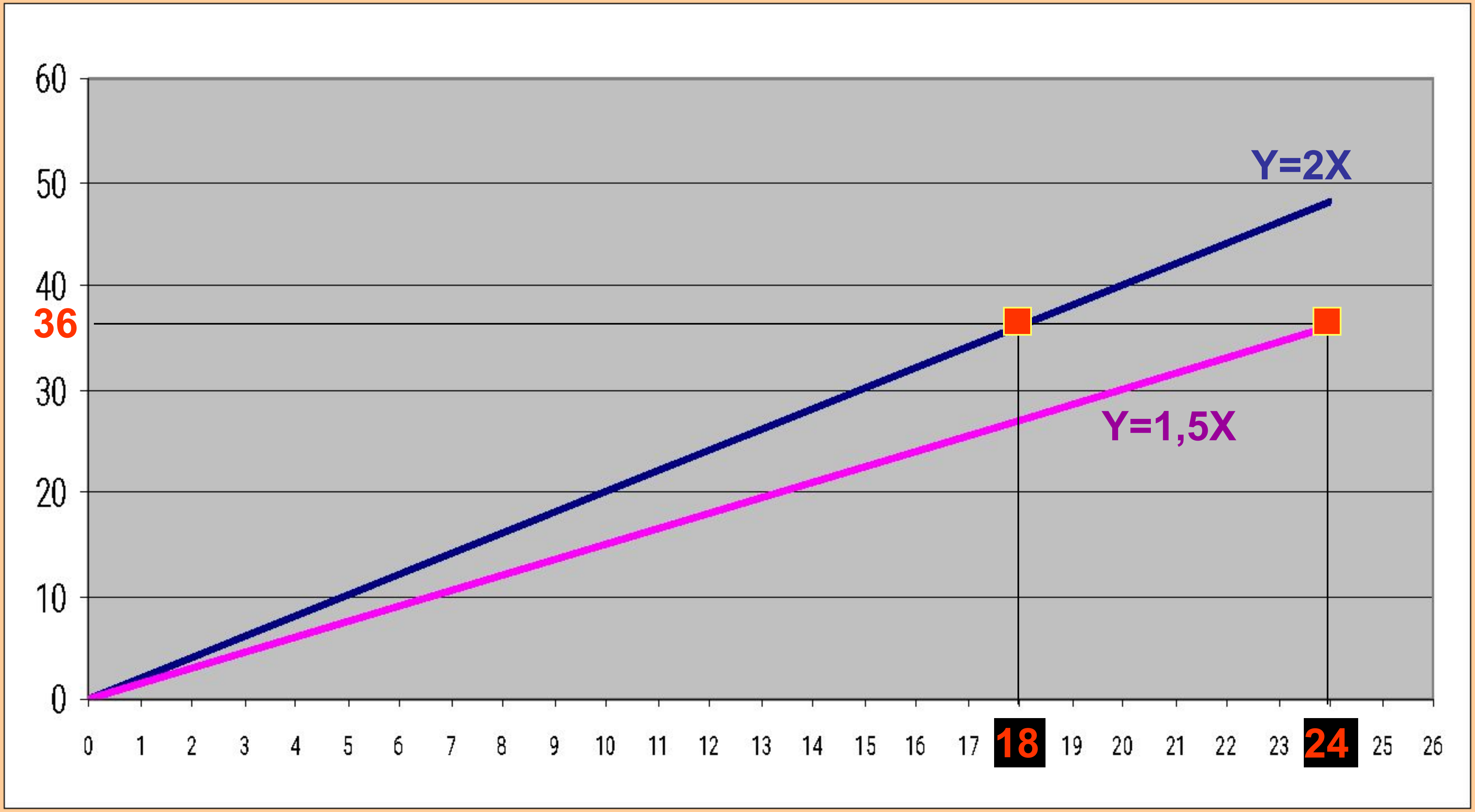
$$(Х-6)/Х=3/4, \quad Х=24$$

Итак,24 дня стоял первый сосуд, а на 6 дней меньше, или 18 дней стоял второй сосуд.

Ответ: 24 дня, 18 дней.

Графиком прямой пропорциональности Y= KX является прямая. Любопытно рассмотреть графическую иллюстрацию происходящего в задаче процесса выпаривания. Коэффициенты К1 и К2 найдем из системы К1=48/24 или 2, К2= 27/18 или 1,5.

Y=2X соответствует процессу выпаривания соли из первого сосуда, а Y=1,5X из второго. В частности из графиков видно, что если первый сосуд будет стоять не 24 дня, а 18 дней, второй сосуд не 18 дней, а 24 дня, то в них окажется одинаковое количество соли 36 кг.



Рассмотрим задачи, которые можно объединить в одну группу из-за того, что поиск ответа на вопрос связан с выявлением общей закономерности изменения концентрации раствора в результате многократно повторяющейся операции.

Решим в общем виде такую задачу. *В сосуде, объём которого равен **V_0** литров, содержится раствор соли концентрации **C_0**. Из сосуда выливается **a** литров смеси и доливается **a** литров воды, после чего раствор тщательно перемешивается. Эта процедура повторяется **n** раз. Какова станет концентрация соли в растворе после n таких процедур?*

Если в задаче **n** раз отливают некоторое количество раствора и затем столько же раз приливают такое же количество воды или другого однородного вещества, то для решения задачи вам пригодится формула:

$$C_n = C_0\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n$$

В этой формуле ***n*** – количество шагов, ***V_0*** - начальный объём, который сохраняют неизменным при каждом шаге

C_n- конечная концентрация, ***C_0*** - начальная (исходная) концентрация,

a – объём отливаемой каждый раз смеси

Докажем эту формулу.

Шаг процедуры	Объём раствора	Сколько соли находится в выливаемых *а* литрах раствора?	Сколько соли осталось в растворе после того, как *а* литров раствора вылили?	Расчёт концентрации (массовой доли) соли в растворе на каждом этапе
0-й	V_0		$C_0 V_0$ *соли*	C_0
1-й	V_0	$C_0 a$	$C_0 V_0 - C_0 a = C_0(V_0 - a)$ соли	$C_1 = C_0(V_0 - a) : V_0$, $C_1 = C_0(1 - \frac{a}{V_0})^1$.
2-й	V_0	$aC_1 = aC_0(1-\frac{a}{V_0})^1$	$C_0(V_0 - a) - aC_0(1-\frac{a}{V_0})^1$	$C_2 = (C_0(V_0 - a) - aC_0(1-\frac{a}{V_0})^1) : V_0$, $C_2 = C_0(1-\frac{a}{V_0}) - \frac{a}{V_0}C_0(1-\frac{a}{V_0})$, $C_2 = C_0(1-\frac{a}{V_0})^2$
3-й	V_0	$aC_2 = aC_2(1-\frac{a}{V_0})^2$	$C_0(V_0 - a) - aC_0(1-\frac{a}{V_0})^1 - aC_0(1-\frac{a}{V_0})^2$	Аналогично, чтобы найти C_3, делим количество оставшейся в растворе соли на V_0, выносим за скобку C_0 и получим $C_3 = C_0(1-\frac{a}{V_0})^3$
……	…		……….	……………...
n-й	V_0		аналогичные преобразования	$C_n = C_0(1-\frac{a}{V_0})^n$

Если вам это доказательство показалось сложным, попробую привести вам такое рассуждение.

Последовательность C_0, C_1, $C_2, \ldots$, C_{n-1}, C_n представляет собой убывающую геометрическую прогрессию концентраций раствора.

Согласитесь, что выражение $C_n * V_0$ соответствует количеству соли после проведения n-ой процедуры.
Но эта же соль присутствовала в $(V_0 - a)$ л предыдущего раствора в количестве $C_{n-1}(V_0 - a)$л
Составим уравнение $C_n * V_0 = C_{n-1}(V_0 - a)$. Разделим обе части на V_0

$C_n = C_{n-1}(1 - \frac{a}{V_0})$, откуда получаем $$C_n = C_0(1 - \frac{a}{V_0})^n$$

Теперь предложим несколько однотипных задач, которые уже легко решить с помощью только что выведенной формулы.

	Начальная концентрация раствора	Начальный объём	Кол-во вливаемой жидкости после каждой операции	Кол-во повторяющихся операций	Конечная концентрация раствора	Решение
	C_0	V_0	a	n	C_n	
В сосуде имелось 1250 л 80%-го раствора кислоты. Из него три раза отливали некоторое кол-во р-ра, добавляя такое же кол-во воды. В результате в сосуде осталось 125л чистой кислоты. Какое кол-во р-ра брали из сосуда каждый раз? Ответ:625 л.	80% или 0,8	1250 л	а л	3	$C_3 = =125/1250=0,1$	$C_3=C_0(1-a/1250)^3$ $0,1=0,8(1-a/1250)^3$ $0,125=(1-a/1250)^3$ $0,5=1-a/1250$ $a/1250=0,5$ $a=625$
Сколько литров чистого спирта останется в сосуде, если из 50л 80%-ного раствора 20 раз отливать по 1л раствора, каждый раз добавляя по 1 л воды? Ответ:26,7 л.	80% или 0,8	50 л	1 л	20	C_{20}	$C_{20}=0,8(1-1/50)^{20}$ $C_{20}=0,534$ $0,534*50=26,7$(л)

Предлагаю вам задачи для самостоятельного решения по этой формуле

№1 Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину допили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций? ***Ответ: 0,5 л; 3,5 л.***

№2 В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и долили сосуд водой, затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор соляной кислоты? ***Ответ: 6 л***

№3 (Это №13.432 из группы В сб. конкурсных задач под ред. М.И.Сканави). Из сосуда с водой отлили 1 л воды и добавили 1 л кислоты. Затем отлили 1 л смеси и добавили 1 л кислоты и т. д. После того, как процесс был повторён 20 раз, оказалось, что смесь в сосуде состоит наполовину из воды и наполовину из кислоты. Сколько воды было первоначально в сосуде? ***Ответ: 20,05 / (20,05 - 1) л***

№4 Из бутыли, наполненной 12%-ным раствором соли, отлили 1 литр и долили 1 литр воды. В бутыли оказался 3%-ный раствор соли. Какова вместимость бутыли? ***Ответ: 4/3 л***

Существуют задачи, внешне похожие на применение формулы ***Сn*** , но при внимательном чтении ***оказывается, что цикл переливаний не закончен***. Так что будьте бдительны.
Приведем пример.

Задача. ***Из сосуда, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили водой; потом опять вылили столько же литров смеси; тогда в сосуде осталось 24 л чистой кислоты. Ёмкость сосуда 54 л. Сколько кислоты вылили в первый раз и второй раз?***

Решение

Обратим внимание, что на втором шаге воду не доливали.
По условию задачи объём сосуда, наполненного кислотой, **54** л. Её концентрация 100%. Пусть вылили **X** литров смеси, тогда в сосуде осталось **(54-X)** литров 100%-ной кислоты. В сосуд доливают **X** л воды. По определению массовой доли кислоты надо массу кислоты разделить на массу раствора:
(54-X)/54.
Опять выливают X литров смеси, в сосуде остаётся **(54-X)** л смеси с массовой долей кислоты **(54-X)/54.**
Чтобы найти массу кислоты в этой оставшейся смеси, надо массу раствора умножить на массовую долю чистой кислоты в этом растворе. По условию масса чистой кислоты в этом растворе стала **24л**. Составим и решим уравнение:

$$(54-X)^* ((54-X)/54) = 24,$$
$$(54-X)^2 = 1296,$$

зная, что **X** меньше **54**, получим единственное решение **X = 18.**
В первый раз вылили **18 литров** чистой кислоты. Но во второй раз выливали 18 литров смеси, в ней чистой кислоты было 18* (54-18)/54 = **12 (л)**
Ответ: **18 л; 12л**

Рекомендую решить интересные задачи на сплавы и смеси.

1. Имелось два сплава серебра. Процент содержания серебра в первом сплаве был на 25% выше, чем во втором. Когда сплавили их вместе, то получили сплав, содержащий 30% серебра. Определить массы сплавов, если известно, что серебра в первом сплаве было 4кг, а во втором 8 кг.
   ***Ответ:* 8** *кг;* **32** *кг*
2. В первом сосуде растворили 0,36 л, а во втором 0,42 л чистого спирта. Процентное содержание спирта в первом сосуде оказалось на 6% больше, чем во втором. Каково процентное содержание спирта во втором и первом сосудах, если известно, что растворы в первом сосуде на 4 л меньше?
   Ответ: 12% и 6%
3. В 4 кг сплава меди и олова содержится 40% олова. Сколько килограммов олова добавить к этому сплаву, чтобы его процентное содержание в новом сплаве стало бы равным 70%?
   Ответ: 4кг
4. К 40% раствору серной кислоты добавили 50 г чистой серной кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60%. Найти первоначальную массу раствора.
   Ответ: 100 *г*
5. К раствору, содержащему 30 г соли, добавили 400 г, после чего концентрация соли уменьшилась на 10%. Найти первоначальную концентрацию соли в растворе.
   Ответ: 15%
6. В 5 кг сплава олова и цинка содержится 80% цинка. Сколько килограммов олова надо добавить к сплаву, чтобы процентное содержание цинка стало вдвое меньше?
   Ответ: 5 кг

7. К 5 кг сплава олова и цинка добавили 4 кг олова. Найти первоначальное процентное содержание цинка в первоначальном сплаве, если в новом сплаве цинка стало в 2 раза меньше, чем олова.
   Ответ: 60%
8. К некоторому количеству сплава меди с цинком, в котором эти металлы находятся В отношении 2:3, добавили 4 кг чистой меди. В результате получили новый сплав, в котором медь и цинк относятся как 2:1. Сколько килограммов нового сплава получилось?
   Ответ: 9 кг
9. Имеется два сплава меди и свинца. Один сплав содержит 15% меди, а другой 65% меди. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 200 г сплава, содержащего 30% меди?
   Ответ: 140 г, 60 г
10. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 140 тонн стали с содержанием никеля в 30%?
    Ответ: 40 т и 100 т
11. Имеется два разных сплава меди, процент содержания меди в первом сплаве на 40% меньше, чем во втором. Когда оба сплава сплавили вместе, то новый сплав стал содержать 36% меди. Известно, что в первом сплаве было 5 кг меди, а во втором вдвое больше. Каково процентное содержание меди в обоих сплавах?
    Ответ: 20% и 60%
12. Имеются два сплава золота и серебра. В одном количестве этих металлов находится в отношении 1:9, а в другом 2:3. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 15 кг нового сплава, в котором золото и серебро относились бы как 1:4?
    Ответ: 10 кг и 5 кг
13. На завод поступило 20 тонн меди и 10 тонн свинца. Из них были приготовлены три сплава: в первый сплав медь и свинец входят как 3:2, во второй как 3:1 и в третий как 5:1. Найти массы изготовленных сплавов, если известно, что первого и второго сплавов вместе было приготовлено в 4 раза больше, чем третьего.
    Ответ: 20 тонн, 4 тонны, 6 тонн

Краткий список литературы, изученной в ходе нашей работы над проектом

1. *М.В. Лурье* и др. Задачи на составление уравнений, изд-во «Наука», М., 1976 г.
2. *Н.А. Терёшин* Прикладная направленность школьного курса математики, «Просвещение», М., 1990 г.
3. *А.В. Шевкин* Школьные математические олимпиады, изд-во «Русское слово», 2002г.
4. *О. Городнова* Статья «Учимся решать задачи на «смеси и сплавы», г-та «Математика» №36 за 2004 г.

Многочисленные сборники задач для поступающих в ВУЗы