

Комбинаторика

Решение задач

Из истории комбинаторики

Правило суммы

Примеры задач

Правило произведения

Примеры задач

Пересекающиеся множества

Примеры задач

Круги Эйлера

Размещения без повторений

Примеры задач

Перестановки без повторений

Примеры задач

Сочетания без повторений

Примеры задач

Размещения и сочетания с повторениями

Примеры задач

Перестановки с повторениями

Примеры задач

Задачи для самостоятельного решения

История комбинаторики

История комбинаторики

Комбинаторика занимается различного вида соединениями, которые можно образовать из элементов конечного множества. Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во II в. до н. э. Индийцы умели вычислять числа, которые сейчас называют «сочетания». В XII в. Бхаскара вычислял некоторые виды сочетаний и перестановок. Предполагают, что индийские ученые изучали соединения в связи с применением их в поэтике, науке о структуре стиха и поэтических произведениях. Например, в связи с подсчетом возможных сочетаний ударных (долгих) и безударных (кратких) слогов стопы из n слогов. Как научная дисциплина, комбинаторика сформировалась в XVII в. В книге «Теория и практика арифметики» (1656 г.) французский автор А. Также посвящает сочетаниям и перестановкам целую главу.

Б. Паскаль в «Трактате об арифметическом треугольнике» и в «Трактате о числовых порядках» (1665 г.) изложил учение о биномиальных коэффициентах. П. Ферма знал о связях математических квадратов и фигурных чисел с теорией соединений. Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования Лейбницем в 1665 г. работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в которой впервые было дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Изучением размещений впервые занимался Я. Бернулли во второй части своей книги «Ars conjectandi» (искусство предугадывания) в 1713 г. Современная символика сочетаний была предложена разными авторами учебных руководств только в XIX веке.

Все разнообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств – правило суммы и правило произведения.

Правило суммы

Если конечные множества не пересекаются, то число элементов $X \cup Y$ {или} равно сумме числа элементов множества X и числа элементов множества Y .

То есть, если на первой полке стоит X книг, а на второй Y , то выбрать книгу из первой или второй полки, можно $X+Y$ способами.

Примеры задач

Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

Решение: $X=17$, $Y=13$

По правилу суммы $X \cup Y=17+13=30$ тем.

Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автоматолотереи. Сколькими способами можно выбрать один билет из спортлото или автоматолотереи?

Решение: Так как денежно-вещевая лотерея в выборе не участвует, то всего $6+10=16$ вариантов.

Правило произведения

Если элемент X можно выбрать k способами, а элемент Y — m способами, то пару (X, Y) можно выбрать $k \cdot m$ способами.

То есть, если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно $5 \cdot 10 = 50$ способами.

Примеры задач

Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневые переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Решение: Имеется 12 книг и 3 цвета, значит по правилу произведения возможно $12 * 3 = 36$ вариантов переплета.

Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Решение: В таких числах последняя цифра будет такая же, как и первая, а предпоследняя - как и вторая. Третья цифра будет любой. Это можно представить в виде XYZYX, где Y и Z - любые цифры, а X - не ноль. Значит по правилу произведения количество цифр одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево равно $9 * 10 * 10 = 900$ вариантов.

Пересекающиеся множества

Но бывает, что множества X и Y пересекаются, тогда пользуются формулой

$$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y| \text{ где } X \text{ и } Y - \text{ множества, а}$$

$X \cap Y$ область пересечения.

Примеры задач

20 человек знают английский и 10 - немецкий, из них 5 знают и английский, и немецкий. Сколько человек всего?

Ответ: $10 + 20 - 5 = 25$ человек.

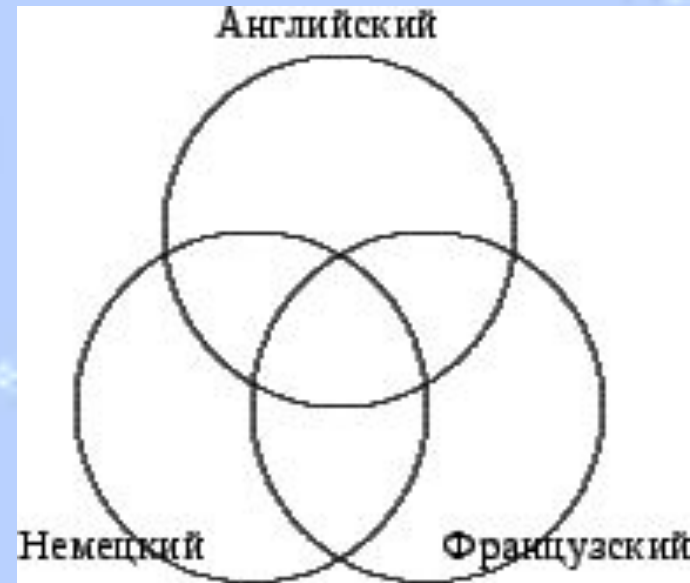
Также часто для наглядного решения задачи применяются круги Эйлера. Например:

Из 100 туристов, отправляющихся в заграничное путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским - 28, французским - 42. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским - 10, немецким и французским - 5, всеми тремя языками - 3.

Сколько туристов не владеют ни одним языком?

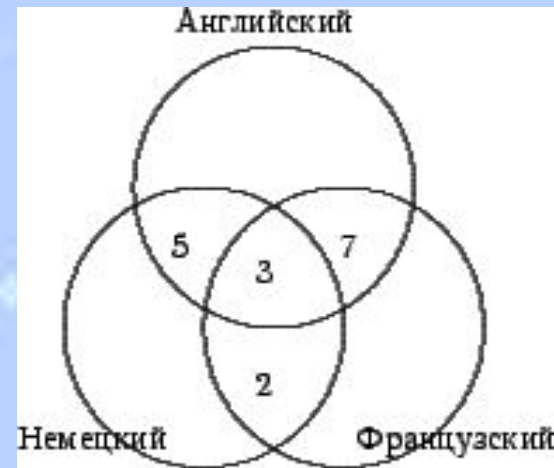
Решение: Выразим условие этой задачи графически. Обозначим кругом тех, кто знает английский, другим кругом - тех, кто знает французский, и третьим кругом - тех, кто знают немецкий.

Всеми тремя языками владеют три туриста, значит, в общей части кругов вписываем число 3. Английским и французским языком владеют 10 человек, а 3 из них владеют еще и немецким.

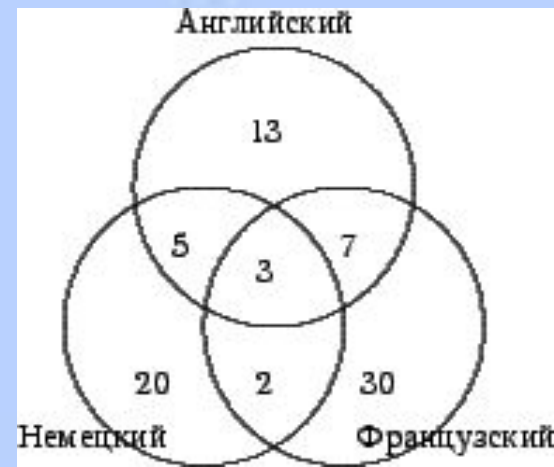


Следовательно, только английским и французским владеют $10-3=7$ человек.

Аналогично получаем, что только английским и немецким владеют $8-3=5$ человек, а немецким и французским $5-3=2$ туриста. Вносим эти данные в соответствующие части.



Определим теперь, сколько человек владеют только одним из перечисленных языков. Немецкий знают 30 человек, но $5+3+2=10$ из них владеют и другими языками, следовательно, только немецкий знают 20 человек. Аналогично получаем, что одним английским владеют 13 человек, а одним французским - 30 человек.



По условию задачи всего 100 туристов. $20+13+30+5+7+2+3=80$ туристов знают хотя бы один язык, следовательно, 20 человек не владеют ни одним из данных языков.

Размещения без повторений

Сколько можно составить телефонных номеров из 6 цифр каждый, так чтобы все цифры были различны?

Это пример задачи на размещение без повторений. Размещаются здесь 10 цифр по 6. А варианты, при которых одинаковые цифры стоят в разном порядке считаются разными.

Если X -множество, состоящие из n элементов, $m \leq n$, то размещением без повторений из n элементов множества X по m называется упорядоченное множество X , содержащее m элементов называется упорядоченное множество X , содержащее m элементов.

Количество всех размещений из n элементов по m обозначают

$n!$ - n -факториал (*factorial* англ. *сомножитель*)
произведение чисел натурального ряда от 1 до
какого либо числа n

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n \quad 0! = 1$$

Значит, ответ на вышеставленную задачу будет

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200$$

Возможно 151200 вариантов

Примеры задач

Задача

Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

Решение: два юноши не могут одновременно пригласить одну и ту же девушку. И варианты, при которых одни и те же девушки танцуют с разными юношами считаются, разными, поэтому:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Возможно 360 вариантов.

Перестановки без повторений

В случае $n=m$ (см. размещения без повторений) из n элементов по m называется перестановкой множества x .

Количество всех перестановок из n элементов обозначают P_n .
 $P_n=n!$

Действительно при $n=m$:
$$P_n = A_n^m = A_n^n = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Примеры задач

Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не повторяются?

Решение:

1) Найдем количество всех перестановок из этих цифр:

$$P_6 = 6! = 720$$

2) 0 не может стоять впереди числа, поэтому от этого числа необходимо отнять количество перестановок, при котором 0 стоит впереди.

А это $P_5 = 5! = 120$.

$$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600$$

Квартет
Проказница Мартышка
Осел,
Козел,
Да косолапый Мишка
Затеяли играть квартет

...

Стой, братцы стой! –
Кричит Мартышка, - погодите!
Как музыке идти?
Ведь вы не так сидите...

И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.
Тут пуще прежнего пошли у низ раздоры
И споры,
Кому и как сидеть...

Вероятно, крыловские музыканты так и не перепробовали всех возможных мест. Однако способов не так уж и много. Сколько?

Здесь идет перестановка из четырех, значит, возможно

$P_4=4!=24$ варианта перестановок.



Сочетания без повтoрений

Сочетанием без повтoрений называется такое размещение, при котором порядок следования элементов не имеет значения.

Всякое подмножество X состоящее из m элементов, называется сочетанием из n элементов по m .

Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

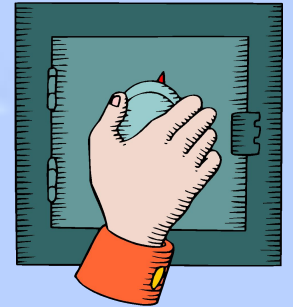
Примеры задач

Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр.

Решение:

Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможно

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!*3!} = \frac{8*9*10}{6} = 120 \text{ вариантов.}$$



У одного человека 7 книг по математике, а у второго – 9. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги.

Решение:

Так как надо порядок следования книг не имеет значения, то выбор 2-ух книг - сочетание. Первый человек может выбрать 2 книги

$$C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!*2!} = \frac{6*7}{2} = 21 \text{ способами. Второй человек может выбрать 2 книги}$$

$$C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!*2!} = \frac{8*9}{2} = 36$$

Значит всего по правилу произведения возможно $21*36=756$ вариантов.

При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение:

Первый игрок делает выбор из 28 костей. Второй из $28-7=21$ костей, третий 14, а четвертый игрок забирает оставшиеся кости.

Следовательно, возможно $C_{28}^7 * C_{21}^7 * C_7^{14}$



Размещения и сочетания с повторениями

Часто в задачах по комбинаторике встречаются множества, в которых какие-либо компоненты повторяются. Например: в задачах на числа – цифры. Для таких задач при размещении используется формула

$$\tilde{A}_n^m = n^m, \text{ а для сочетаний}$$

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = C_{m+n-1}^n$$

Примеры задач

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Так как порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три, а их число равно

$$A_5^3 = 5^3 = 125$$

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пироженных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пироженных.

Решение: Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пироженные в коробку. Покупки будут различными, если они отличаются количеством купленных пирожных хотя бы одного сорта. Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний четырех видов пироженных по семь -

$$\tilde{C}_4^7 = \frac{(7+4-1)!}{7!(4-1)!} = \frac{10!}{7!*3!} = 120$$

Обезьяну посадили за пишущую машинку с 45 клавишами, определить число попыток, необходимых для того, чтобы она наверняка напечатала первую строку романа Л.Н. Толстого «Анна Каренина», если строка содержит 52 знака и повторений не будет?

Решение: порядок букв имеет значение. Буквы могут повторяться. Значит, всего есть

$$A_{45}^{52} = 45^{52}$$

вариантов.

Перестановки с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

, где n -количество всех элементов, n_1, n_2, \dots, n_r -количество одинаковых элементов.

Примеры задач

Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Решение: всего букв 6. Из них одинаковы n_1 «а»=3, n_2 «н»=2, n_3 «с»=1. Следовательно, число различных перестановок равно

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3! * 2! * 1!} = 60$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи».

Ответ: 2520

2. Имеется пять различных стульев и семь рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев.

Ответ: 16807

3. На памятные сувениры в «Поле Чудес» спонсоры предлагают кофеварки, утюги, телефонные аппараты, духи. Сколькими способами 9 участников игры могут получить эти сувениры? Сколькими способами могут быть выбраны 9 предметов для участников игры?

Ответ: 4^9 , 220

4. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы на одна из них не могла бить другую?

Ответ: 40320

5. Сколько может быть случаев выбора 2 карандашей и 3 ручек из пяти различных карандашей и шести различных ручек?

Ответ: 200

6. Сколько способов раздачи карт на 4 человека существует в игре «Верю - не верю» (карты раздаются полностью, 36 карт).

Ответ: $C_{36}^9 * C_{27}^9 * C_{18}^9$

Задачи для самостоятельного решения

7. В течении 30 дней сентября было 12 дождливых дней, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, а один день был и дождливым, и ветреным, и холодным. В течение скольких дней в сентябре стояла хорошая погода.

Ответ: 15

8. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

Ответ: 480, 437

9. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?

Ответ: 9

10. Сколько существует четных пятизначных чисел, начинающихся нечетной цифрой?

Ответ: 25000

11. В книжный магазин поступили романы Ф. Купера «Прерия», «Зверобой», «Шпион», «Пионеры», «Следопыт» по одинаковой цене. Сколькими способами библиотека может закупить 17 книг на выбранный чек?

Ответ: 2985

Список используемой литературы

- ♦ Савина Л.Н., Попырев А.В. «КОМБИНАТОРИКА» издательство Елабужский государственный педагогический институт 1999 г
- ♦ Халамайзер А. Я. «Математика? – Забавно!» издание автора 1989 г