

Педагогическая мозаика

- Попченко Светлана Николаевна
- МБОУ СОШ №3 г. Клинцы, Брянской области
- Учитель математики

Система
уравнений

линейных

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Главным определителем системы называется число, которое равно

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$

Пример

Найти главный определитель
системы

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1, \\ 4x + 3y = 10, \end{cases}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) = 15 + 12 = 27,$$

Первым вспомогательным определителем называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1,$$

причем, он получается из главного определителя, если столбец коэффициентов

при x a_1
 a_2

заменить столбцом свободных членов

c_1

c_2

Вторым вспомогательным определителем называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1,$$

причем, он получается из главного определителя, если столбец коэффициентов при y

b_1

b_2

заменить столбцом свободных членов c_1

c_2

Пример.

Найти вспомогательный определитель системы

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x - 2y = 3, \end{cases}$$

Решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) = -2 + 9 = 7,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5.$$

Правило Крамера

1. Если главный определитель системы отличен от нуля $\Delta \neq 0$ то система совместна и имеет единственное решение, причем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

2. Если главный определитель системы равен нулю $\Delta = 0$ а хотя бы один из вспомогательных отличен от нуля $\Delta_x \neq 0$ ($\Delta_y \neq 0$), то система несовместна.

3. Если главный определитель системы и оба вспомогательных равны нулю, то система совместна и имеет бесконечное множество решений (является неопределенной), причем, если

$$x = t, \text{ тогда } y = \frac{c_1 - a_1 \cdot t}{b_1} \quad \text{или} \quad y = \frac{c_2 - a_2 \cdot t}{b_2},$$

где $t \in R$.

Решить системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + 3y = 8; \end{cases}$$

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 15 - 16 = -1, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = 8 - 10 = -2$$

Главный определитель системы отличен от нуля $\Delta = -1 \neq 0$,

значит система совместна и имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad \text{Ответ: } (1; 2).$$

$$2. \quad \begin{cases} 9x - 6y = 3, \\ 3x - 2y = 2; \end{cases}$$

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-2) - 3 \cdot (-6) = -18 + 18 = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-6) = -6 + 12 = 6, \Delta_y = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 18 - 9 = 9.$$

Главный определитель системы равен нулю, а один из вспомогательных не равен нулю ($\Delta_y = 9 \neq 0$),

Ответ: система несовместна.

$$3. \begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 6x + 8y = 10. \end{cases}$$

Решени

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 24 - 24 = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0.$$

Главный и оба вспомогательных определителя равны нулю, значит система совместна и имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти все пары решений системы, достаточно взять любое из уравнений системы и, придавая переменной x произвольные значения из множества действительных чисел $x = t \in R$, найти значения y :

$$y = \frac{5 - 3t}{4}.$$

Ответ: система имеет б/м решений, $x = t$, $y = \frac{5 - 3t}{4}$, где $t \in R$.

$$4. \begin{cases} 5x - y = 16 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 16 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 48 + 3 = 51; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 32 = -17$$

значит, система имеет единственное решение.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{51}{17} = 3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-17}{17} = -1$$

Ответ: (3; -1).

$$5. \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x - 3y = -8. \end{cases}$$

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 15 = -21 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 24 = 21; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -16 - 5 = -21$$

значит, система имеет единственное решение.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{21}{-21} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-21}{-21} = 1$$

Ответ: (-1; 1)

$$6. \begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 7x + 5y = 16. \end{cases}$$

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 21 = -11 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 16 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 48 = -33; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 16 \end{vmatrix} = 32 - 21 = 11$$

значит, система имеет единственное решение.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1$$

Ответ: (3; -1).

С помощью правила Крамера легко проводить исследование систем уравнений **с параметрами**.

Исследовать систему уравнений - это значит решить вопрос о ее совместности или несовместности, и если она совместна, то найти все ее решения.

7. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + y = 2a. \end{cases}$$

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2a = 2(1 - a),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2 = 2(a - 1)(a + 1).$$

1. Главный определитель системы не равен нулю, если $a - 1 \neq 0$, $a \neq 1$, тогда система совместна и имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2(1 - a)}{a - 1} = -\frac{2(a - 1)}{a - 1} = -2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2(a - 1)(a + 1)}{a - 1} = 2(a + 1).$$

2. Если $a - 1 = 0$, $a = 1$, тогда $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$,

значит система совместна и имеет бесконечное множество решений, т. е. является неопределенной.

Пусть $x = t$, тогда из первого или второго уравнения $y = 2 - t$,

где $t \in \mathbb{R}$.

8. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} (a+5)x + (2a+3)y - (3a+2) = 0, \\ (3a+10)x + (5a+6)y - (2a+4) = 0. \end{cases}$$

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a+5 & 2a+3 \\ 3a+10 & 5a+6 \end{vmatrix} = (a+5)(5a+6) - (3a+10)(2a+3) = \\ &= 5a^2 + 31a + 30 - 6a^2 - 29a - 30 = -a^2 + 2a = a(2-a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 3a+2 & 2a+3 \\ 2a+4 & 5a+6 \end{vmatrix} = (3a+2)(5a+6) - (2a+4)(2a+3) = \\ &= 15a^2 + 28a + 12 - 4a^2 - 14a - 12 = 11a^2 - 14a = a(11a-14). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} a+5 & 3a+2 \\ 3a+10 & 2a+4 \end{vmatrix} = (a+5)(2a+4) - (3a+10)(3a+2) = \\ &= 2a^2 + 14a + 20 - 9a^2 - 36a - 20 = -7a^2 - 22a = -a(7a+22). \end{aligned}$$

1. Если $\Delta \neq 0$, $a(2-a) \neq 0$, $a \neq 0$, $a \neq 2$,

тогда система совместна и имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a(11a-14)}{a(2-a)} = \frac{11a-14}{2-a}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-a(7a+22)}{a(2-a)} = \frac{7a+22}{a-2}.$$

2. Если $a = 2$, тогда $\Delta = 0$, $\Delta_x = 16 \neq 0$, $\Delta_y = -72 \neq 0$,

значит система несовместна.

3. Если $a = 0$, тогда $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$,

значит система имеет бесконечное множество решений, т. е. является неопределенной. Положим $x = t$, тогда из первого или второго уравнения находим

$$y = \frac{2-5t}{3}, \quad \text{где } t \in \mathbb{R}.$$

9. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} ax - y = b, \\ bx + y = a. \end{cases}$$

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a + b,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = b + a,$$

1. Если $\Delta = a + b \neq 0$, $a \neq -b$,

тогда система совместна и имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a + b}{b + a} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a - b)(a + b)}{a + b} = a - b.$$

2. Если $a = -b$, тогда $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$,

система имеет бесконечное множество решений, т. е. является неопределенной. Положим $x = t$, тогда $y = -b(t + 1)$, где $t \in R$.

10. Найти все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x + ay = 5, \\ 6x + 8y = -1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 6a = 6 \cdot (4 - a),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & a \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 40 + a, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 30 = -33$$

Если $\Delta \neq 0$, $4 - a \neq 0$, $a \neq 4$

то система имеет **единственное решение**.

11. Найти все значения m , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (m-2)x + 7y = 9, \\ (m+1)x + 2(m+2)y = 18. \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-2 & 7 \\ m+1 & 2(m+2) \end{vmatrix} = 2m^2 - 8 - 7m - 7 = 2m^2 - 7m - 15 = 2(m+1,5)(m-5)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 18 & 2(m+2) \end{vmatrix} = 18m + 36 - 126 = 18m - 90 = 18(m-5),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m-2 & 9 \\ m+1 & 18 \end{vmatrix} = 18m - 36 - 9m - 9 = 9m - 45 = 9(m-5)$$

Если $m = 5$, тогда все три определителя равны нулю $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$
а значит система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Ответ: $m = 5$.

12. Найти все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x - ay = 3 \\ ax - 4y = a + 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение

Найдем главный и оба вспомогательных определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -4 \end{vmatrix} = -4 + a^2 = a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ a + 4 & -4 \end{vmatrix} = -12 + a^2 + 4a = a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a - 2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a & a + 4 \end{vmatrix} = a + 4 - 3a = -2(a - 2)$$

При $a = -2$ главный определитель равен нулю $\Delta = 0$

а оба вспомогательных не равны нулю $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$

Ответ: $a = -2$.

Дополнительные задачи

Решить систему уравнений:

$$1. \begin{cases} 6x - 5y = 19, \\ 3x + y = 34. \end{cases}$$

Ответ: (9; 7).

$$2. \begin{cases} 7x + 4y = 15, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$$

Ответ (1;2)

Исследовать системы уравнений:

$$3. \begin{cases} 3x + ay = 5a^2, \\ 3x - ay = a^2. \end{cases}$$

Ответ:

1. Если $a \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение $(a^2; 2a)$.

2. Если $a = 0$, то система совместна и имеет бесконечное множество решений.

$$4. \begin{cases} (a-1)x + 2ay + 2 = 0, \\ 2ax + (a-1)y - (a-1) = 0. \end{cases}$$

Ответ:

1. Если $a \neq -1$ è $a \neq \frac{1}{3}$

то система совместна и имеет единственное решение:

$$x = \frac{2a - 2}{3a - 1}; \quad y = -\frac{a + 1}{1 - 3a}$$

2. Если $a = -1$, то система совместна и имеет бесконечное множество решений.

3. Если $a = \frac{1}{3}$, то система несовместна.

5.
$$\begin{cases} ay - bx = 0, \\ y - x = b - a. \end{cases}$$

Ответ:

Если $a \neq b$, то система совместна и имеет единственное решение $(a; b)$.

2. Если $a = b$, то система совместна и имеет б/м решений.

6. Найти все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 5x + ay = 2, \\ 10x - 3y = 3. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ:
 $a \neq -1,5$

7. Найти все значения m , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (m-2)x + 27y = 4,5, \\ 2x + (m+1)y = -1, \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

Ответ: $m = -7$.

8. Найти все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 7ax + 4y = -8, \\ x + 7ay = 49a^2, \end{cases}$$

не имеет решений.

$a = \frac{\text{Ответ}}{7}$