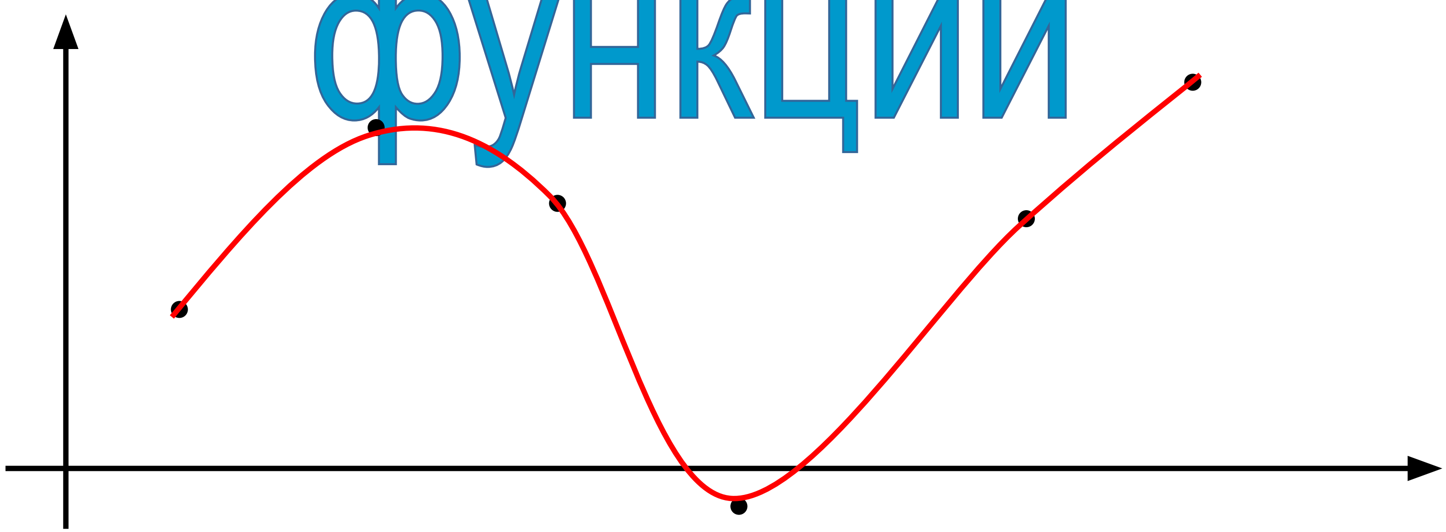
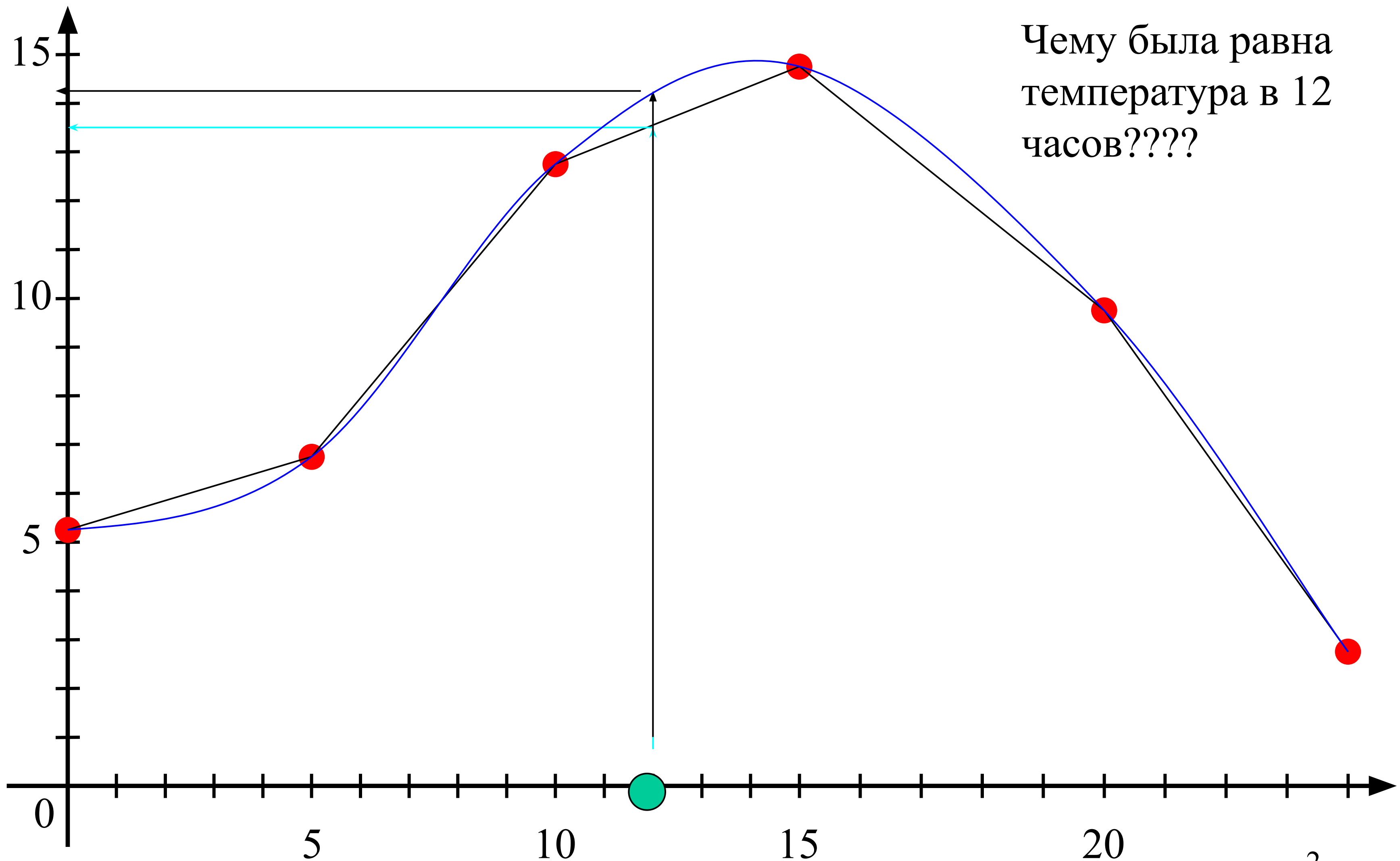
Интерполирование и экстраполирование функции



Интерполяционный многочлен Лагранжа

Температура, ^{0}C	**5**	**7**	**13**	**15**	**10**	**3**
Время суток, ч	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**	**24**



Чему была равна температура в 12 часов????

Основные виды интерполяции, экстраполяция и аппроксимация

- *линейная интерполяция*, при которой промежуточные точки, расположенные между двумя узловыми точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}), лежат на отрезке прямой, соединяющей две ближайшие узловые точки;
- *квадратичная интерполяция*, при которой промежуточные точки между узловыми точками (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) и (x_{i+2}, y_{i+2}) лежат на отрезке параболы, соединяющей эти узловые точки;
- *полиномиальная интерполяция*, при которой промежуточные точки вычисляются как значение некоторого многочлена $p_n(x)$, имеющего значения в узловых точках точно совпадающие с $f_i(x_i)$;
- Сплайновая интерполяция, при которой промежуточные точки находятся с помощью отрезков полиномов невысокой степени, проходящих через узловые точки и поддерживающие определенные условия стыковки в концевых точках.
- *экстраполяция* — вычисление функции вне того интервала, на котором она задана в виде таблицы, графически или иным способом.
- *аппроксимация* таблично заданная функция заменяется другой функцией, как правило, более простой и поэтому более быстро вычисляемой.

Математическая постановка задачи интерполирования

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ - ***узлы интерполяции***

$F(x)$ - *табулированная функция*

y_0	y_1	$\ldots$	y_n
x_0	x_1	$\ldots$	x_n

$$\boxed{y_o = F(x_0) = f(x_o),\ y_1 = F(x_1) = f(x_1), \ldots,\ y_n = F(x_n) = f(x_n)}$$

Интерполирование функции – это нахождение значения функции в точках, отличных от узлов интерполяции

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Интерполирование в узком смысле

Экстраполирование

$\mathbf{X} \in [\mathbf{X}_0; \mathbf{X}_n]$

$\mathbf{X} \notin [\mathbf{X}_0; \mathbf{X}_n]$

$$F_n(x_0) = y_0,\ Fn(x_1) = y_1,\ \ldots,\ F_n(x_n) = y_n$$

$F_n(x)$ - интерполяционный многочлен

При **интерполировании** функцию, заданную ее значениями в узлах интерполяции (то есть, с помощью **таблицы**) заменяют **формулой** (аналитическое задание функции)

Интерполирование с помощью многочлена **Лагранжа**

Интерполирование с помощью многочлена **Ньютона**

Равноотстоящие узлы интерполяции: $\mathbf{h=x_i-x_{i+1}=const}$

Неравноотстоящие узлы интерполяции: $\mathbf{h=x_i-x_{i+1}\neq const}$

Задача:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

L(x) **– многочлен Лагранжа**

$$L_n(x_0) = y_0$$
$$L_n(x_1) = y_1$$
$$\ldots$$
$$L_n(x_n) = y_n$$

1) Узлы интерполяции *неравноотстоящие*

$$h = x_i - x_{i+1} \neq \text{const}$$

$$\boxed{L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}$$

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)} +$$

$$y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots +$$

$$y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Сокращенный вид интерполяционного многочлена Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Пример 1. Функция задана таблично

x	0	1	2	6
y	-1	-3	3	1187

Пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа, найти ее значение в точке x = 4.

Решение.

Подставляя в формулу x=4, получим

$$L_3(4) = -1\cdot\frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(-1)(-2)(-6)} - 3\cdot\frac{4(4-2)(4-6)}{1(1-2)(1-6)} +$$
$$+3\cdot\frac{4(4-1)(4-6)}{2(2-1)(2-6)} + 1187\cdot\frac{4(4-1)(4-2)}{6(6-1)(6-2)} = 255.$$

2) Узлы интерполяции *равноотстоящие*

$$h = x_i - x_{i+1} = \mathrm{const}$$

Пусть $q=(x-x_0)/h$

$$\boxed{L_n(x) = \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{q-i} y_i}$$

$$\boxed{C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}}$$

Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа

$$\left|R_n(x)\right| = \left|f(x) - L_n(x)\right|$$

$$\boxed{\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|}$$

Интерполяционная формула Ньютона

Понятие *конечных разностей*

- Пусть задана функция $y=f(x)$ на отрезке $[x_0,x_n]$, который разбит на n одинаковых отрезков (случай равноотстоящих значений аргумента). $\Delta x=h=const$. Для каждого узла x_0, $x_1=x_0+h$, ..., $x_n=x_0+n\cdot h$ определены значения функции в виде:

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\ ...,\ f(x_n)=y_n.$$

Понятие *конечных разностей*

- **Конечные разности первого порядка**

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\Delta y_{n\text{-}1} = y_n - y_{n\text{-}1.}$$

- **Конечные разности второго порядка**

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\Delta^2 y_{n\text{-}2} = \Delta y_{n\text{-}1} - \Delta y_{n\text{-}2}$$

- Аналогично определяются конечные разности высших порядков:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k\text{-}1} y_1 - \Delta^{k\text{-}1} y_0$$
$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k\text{-}1} y_2 - \Delta^{k\text{-}1} y_1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\Delta^k y_{\mathrm{i}} = \Delta^{k\text{-}1} y_{\mathrm{i+1}} - \Delta^{\mathrm{k\text{-}1}} y_{\mathrm{i}} \quad , \qquad i = 0,1,\ldots,n\text{-}k.$$

Понятие *конечных разностей*

- Конечные разности функций удобно располагать в таблицах, которые могут быть:

1. Диагональными;
2. Горизонтальными.

Диагональная таблица

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

Горизонтальная таблица

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

Пример 1. Составить таблицу конечных разностей возможных порядков для функции, заданной таблично

x	2	4	6	8	10
y	3,146	4,028	4,911	5,796	6,680

Решение.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
2	3,146	0,882	0,001	0,001	-0,002
4	4,028	0,883	0,002	-0,001	
6	4,911	0,885	0,001		
8	5,796	0,884			
10	6,680				

Первая интерполяционная формула Ньютона

- Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для ***равностоящих значений*** независимых переменных: $x_n = x_0 + nh$, где h - *шаг интерполяции*.
- Необходимо найти полином $P_n(x)$ степени не выше n, принимающий в точках (узлах) x_i значения:

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i=0,\dots,n.$$

- Запишем интерполирующий полином в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

- Задача построения многочлена сводится к определению ***коэффициентов a_i*** из условий:

$$P_n(x_0)=y_0$$

$$P_n(x_1)=y_1$$

$$. \quad . \quad . \quad .$$

$$P_n(x_n)=y_n$$

Определение коэффициентов

- Полагаем в интерполирующий полиноме $x = x_0$, тогда, т.к. второе, третье и другие слагаемые равны ***0***,
- $$P_n(x_0) = y_0 = a_0 \qquad a_0 = y_0.$$
- Найдем коэффициент $\boldsymbol{a_1}$.
- При x

$$P_n(x_1) = y_1 = y_0 + \mathbf{a}_1(x_1 - x_0);$$
$$y_1 = y_0 + \mathbf{a}_1(x_1 - x_0),$$
$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Определение коэффициентов

- Для определения $\boldsymbol{a_2}$ составим конечную разность второго порядка.
- При $x = x_2$ получим:

$$P_n(x_2) = y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + 2\Delta y_0 + \mathrm{a}_2 2h^2,$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2y_1 + 2y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} =$$

$$= \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{2h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Построение многочлена

- Аналогично можно найти другие коэффициенты. Общая формула имеет вид.

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}\quad, \qquad k=1..n.$$

- Подставляя эти выражения в формулу полинома, получаем:

$$P_n(X) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

- где x_i ,y … ость между двумя …
- h – величина постоянная, т.е. узлы интерполяции ***равноотстоят*** друг от друга.

Первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(X) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

- Этот многочлен называют **интерполяционным полиномом Ньютона** для интерполяции в начале таблицы (интерполирование «вперед») или ***первым*** *полиномом Ньютона.*

Первая интерполяционная формула Ньютона

- Для практического использования этот полином записывают в преобразованном виде, вводя обозначение $t=(x-x_0)/h$, тогда

$$P_n(x)=y_0+t\cdot\Delta Y_0+\frac{t\cdot(t-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{t\cdot(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0\,.$$

- Эта ***формула применима*** для вычисления значений функции для значений аргументов, ***близких к началу интервала*** интерполирования.

Пример

- Дана таблица значений теплоёмкости вещества в зависимости от температуры $C_p = f(T)$. Определить значение теплоёмкости в точке T=450 K, n=3; h=100

x (T)	300	400	500	600
Y (Cp)	52.88	65.61	78.07	99.24

Пример 1. Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ задана своими значениями

x	y
2,0	0,0540
2,1	0,0440
2,2	0,0355
2,3	0,0283
2,4	0,0224
2,5	0,0175
2,6	0,0136

Применяя первую интерполяционную формулу Ньютона, найти $\varphi(2.22)$

Решение

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2,0	0,0540	-0,0100	0,0015	-0,0002
2,1	0,0440	-0,0085	0,0013	0
2,2	**0,0355**	**-0,0072**	**0,0013**	**-0,0003**
2,3	0,0283	-0,0059	0,0010	0
2,4	0,0224	-0,0049	0,0010	
2,5	0,0175	-0,0039		
2,6	0,0136			

$$q=\frac{2,22-2,20}{0,1}=\frac{0,02}{0,1}=0,2$$

$$y=0,0355+0,2\,(-0,0072)+\frac{0,2\,(0,2-1)}{2!}\,0,0013+$$
$$+\frac{0,2\,(0,2-1)\,(0,2-2)}{3!}\,(-0,0003)=0,0339.$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- ***Второй*** интерполяционный полином Ньютона применяется для нахождения значений функций в точках, расположенных в ***конце интервала интерполирования.***
- Запишем интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \qquad (1)$$
$$\dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1).$$

Определение коэффициентов

- Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ определяем из условия:

$$P_n(x_i) = y_i \qquad i=0,\ldots,n.$$

- 1.Полагаем в интерполяционном многочлен

$$P_n(x_n) = a_0,$$

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

$$a_0 = y_n.$$

Определение коэффициентов

- 2.Полагаем $x=x_{n-1}$, тогда:

$P_n(x_{n-1})=y_{n-1}=y_n+a_1(x_{n-1}-x_n)$, $h=x_{\mathrm{n}}-x_{n-1}$,

Следовательно: $$a_1=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=\frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

- 3 Полагаем $x=x$, тогда

$$P_n(x_{n-2})=y_{n-2}=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x_{n-2}-x_n)+a_2(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1}),$$

$$y_{n-2}=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{h}(-2h)+a_2\cdot 2h^2=y_n-2\Delta y_{n-1}+a_2 2h^2,$$

$$a_2=\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}.$$

Определение коэффициентов

Аналогично можно найти другие коэффициенты многочлена:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3} \quad ,$$

....

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \quad .$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- Подставляя эти выражения в формулу (1), получим *вторую интерполяционную формулу Ньютона* или многочлен Ньютона для интерполирования «назад».

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- Введем обозначения:

$$\frac{x - x_n}{h} = t \text{ или } x = x_n + th,$$

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - (x_n - h)}{h} = t + 1,$$

$$\frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - (x_{n-1} - 2h)}{h} = t + 2,$$

....

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x(x_n - 2h)}{h} = t + n - 1.$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

- Произведя замену , получим

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

- Это ***вторая формула Ньютона для интерполирования «назад».***

Пример

- Вычислить теплоемкость (табл.1) для температуры T=550 К.
- Воспользуемся второй формулой Ньютона и соответствующими конечными разностями (табл. 2)

Пример

$$P_3(x) = y_3 + \frac{\Delta y_2}{h}(x - x_3) + \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}(x - x_3)(x - x_2) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1),$$

$$P_3(550) = 99.24 + \frac{21.17}{100}(550 - 600) + \frac{8.71}{2!100^2}(550 - 600)(550 - 500) +$$

$$+ \frac{8.98}{3!100^3}(550 - 600)(550 - 500)(550 - 400) = 87.01.$$

- Следовательно, значение теплоемкости при температуре 550 К равно:
- Ср(550)=97,01 Дж/(моль К).

Аппроксимация функций

- Особенностью интерполяции являлось то, что интерполирующая функция строго проходит через узловые точки таблицы, т. е. рассчитанные значения совпадали с табличными: $y_i=f(x_i)$.
- Эта особенность обуславливалась тем, что количество коэффициентов в интерполирующей функции (m) было равно количеству табличных значений (n)

Особенности аппроксимации

- если для описания табличных данных будет выбрана функция с меньшим количеством коэффициентов ($m<n$), что часто встречается на практике, то уже нельзя подобрать коэффициенты функции так, чтобы функция проходила через каждую узловую точку.

Особенности аппроксимации

В лучшем случае, она будет проходить каким – либо образом между ними и очень близко к ним (рис. 1).

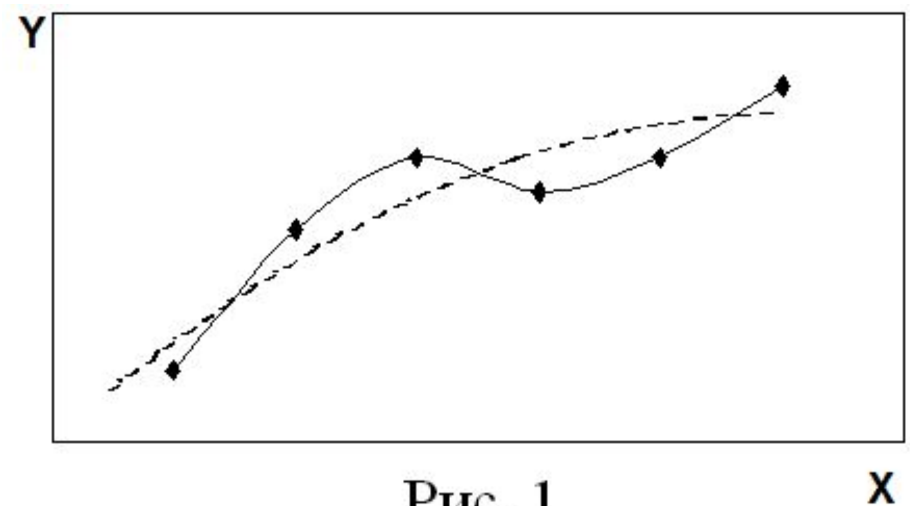


Рис. 1

– интерполирующая функция,

- - аппроксимирующая функция.

- Такой способ описания табличных данных называется ***аппроксимацией***, а функция – ***аппроксимирующей.***

Условия применения аппроксимации

1. Когда количество табличных значений очень велико. В этом случае интерполирующая функция будет очень громоздкой. Удобнее выбрать более простую в применении функцию с небольшим количеством коэффициентов, хотя и менее точную.

Условия применения аппроксимации

2. Когда вид функции заранее определен. Такая ситуация возникает, если требуется описать экспериментальные точки какой- либо теоретической зависимостью.

Условия применения аппроксимации

3. Аппроксимирующая функция может сглаживать погрешности эксперимента, в отличие от интерполирующей функции.

- Так, на рис.2 точками показаны табличные данные – результат некоторого эксперимента. Разброс данных объясняется погрешностью эксперимента.

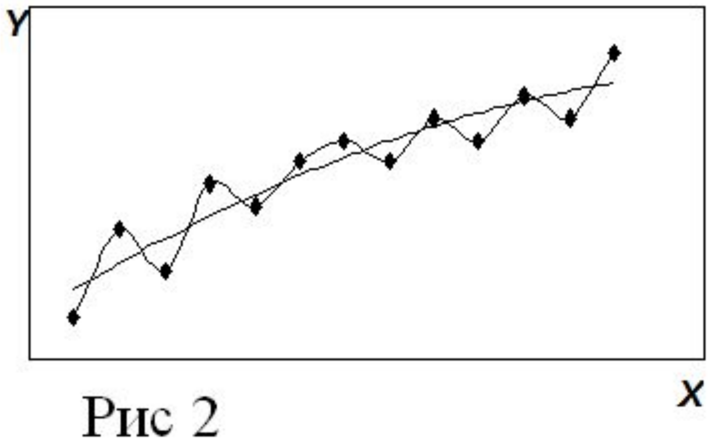


Рис 2

Условия применения аппроксимации

- интерполирующая функция, проходя через каждую точку, будет повторять ошибки эксперимента, иметь множество экстремумов: минимумов и максимумов – и в целом неверно отображать характер зависимости *Y* от *X*. Этого недостатка лишена аппроксимирующая функция.

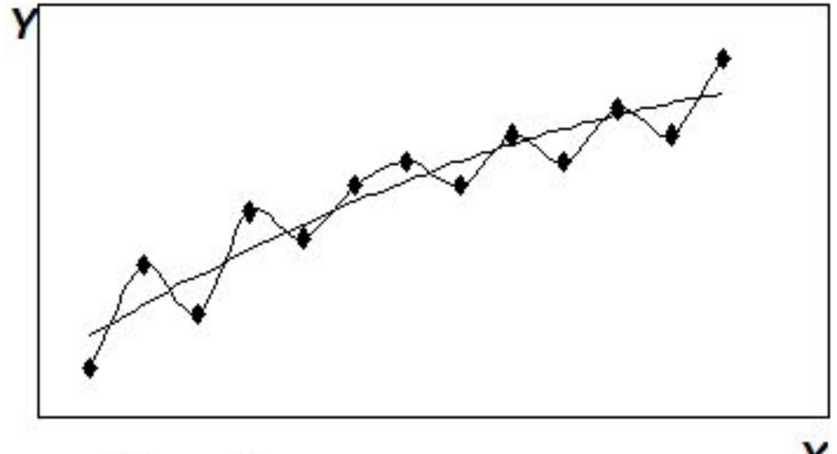


Рис 2

Условия применения аппроксимации

4. Интерполирующей функцией невозможно описать табличные данные, в которых есть несколько точек с одинаковым значением аргумента.

- Такая ситуация возможна, если один и тот же эксперимент проводится несколько раз при одних и тех же исходных данных. Однако это не является ограничением для использования аппроксимации, где не ставится условие прохождения графика функции через каждую точку.