

Формулы сложения

Синус, косинус, тангенс суммы и
разности аргументов

Формулы сложения

- Синус суммы

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

- Косинус суммы

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Вывод формул

- Синус разности

$$\begin{aligned}\sin(x - y) &= \sin(x + (-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \\ &= \sin x \cos y + \cos x(-\sin y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y\end{aligned}$$

- Косинус разности

$$\begin{aligned}\cos(x - y) &= \cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \\ &= \cos x \cos y - \sin x(-\sin y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\end{aligned}$$

- Тангенс суммы

$$tg(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \left(: \cos x \cos y, \text{ при } \cos x \cos y \neq 0 \right)$$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx tgy}$$

- Тангенс разности

$$tg(x - y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx tgy}$$

Примеры применения формул

1. Вычислить $\sin 75^\circ$ и $\cos 75^\circ$

Решение: воспользуемся тем, что $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Ответ: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2. Доказать тождество $\sin(\pi + x) = -\sin x$

Решение: $\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x =$
 $= 0 \cdot \cos x + (-1) \sin x = -\sin x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$ 

3. Вычислить: $\sin \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15}$

Решение: «свернем» в синус суммы
данное выражение

$$\sin \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15} = \sin\left(\frac{4\pi}{15} + \frac{\pi}{15}\right) =$$

$$= \sin \frac{5\pi}{15} = \sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Упражнения

1. Представив 105° как сумму $60^\circ + 45^\circ$ вычислите: а) $\sin 105^\circ$, б) $\cos 105^\circ$, в) $\operatorname{tg} 105^\circ$

2. Упростите выражение:

$$а) \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta$$

$$д) \cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta$$

$$б) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$е) \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$в) \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta)$$

$$ж) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$з) \frac{\operatorname{tg} 2,22 + \operatorname{tg} 0,92}{1 - \operatorname{tg} 2,22 \cdot \operatorname{tg} 0,92}$$

$$з) \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \operatorname{tg} \alpha}$$

3. Докажите тождество:

$$a) \sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha) \cos(-\beta) = \sin \beta \cos \alpha$$

$$б) \cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha) \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta$$

$$в) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 2$$

4. Найдите значение выражения:

$$a) \cos 107^\circ \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \sin 17^\circ$$

$$б) \sin 36^\circ \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \sin 24^\circ$$

$$в) \sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x$$

$$г) \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x$$

Домашняя работа

1. Вычислите: $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\operatorname{tg} 15^\circ$
2. Упростите выражение:

$$a) \cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$$

$$б) \sin \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$$

$$в) \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$г) \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$$

Проверочная работа

Вариант 1

Вариант 2

1. Упростите

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

2. Найдите значение выражения

$$\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ$$

$$\sin 77^\circ \cos 17^\circ - \cos 77^\circ \sin 17^\circ$$

$$\cos 125^\circ \cos 5^\circ + \sin 125^\circ \sin 5^\circ$$

$$\cos 51^\circ \cos 21^\circ + \sin 51^\circ \sin 21^\circ$$

3. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$$