



Перестановки

Теоретический материал

Примеры задач с решениями

Задачи для закрепления



Перестановкой из n элементов называется любой способ нумерации этих предметов (способ их расположения в ряд)

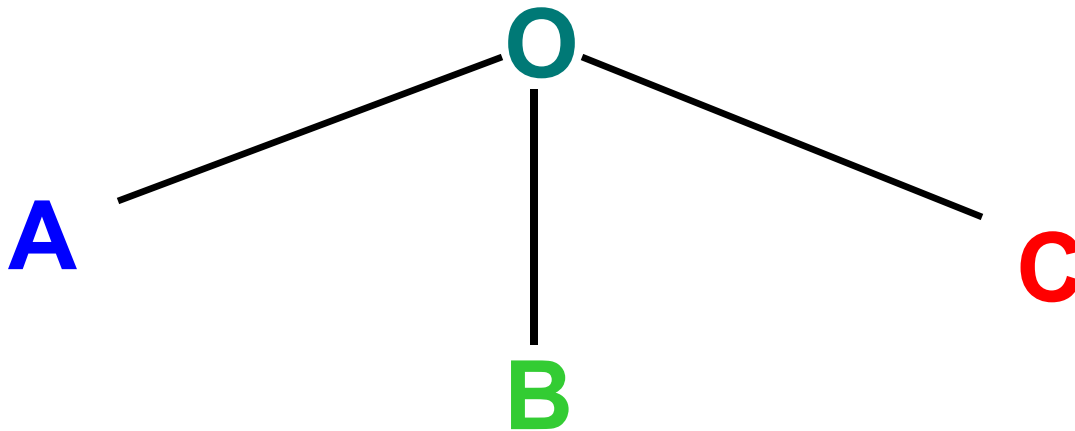


Сколькими способами можно рассадить
в ряд на **3** стула **трех** учеников?

Решение с помощью графа

За корневую вершину графа возьмём
произвольную точку плоскости **O**.

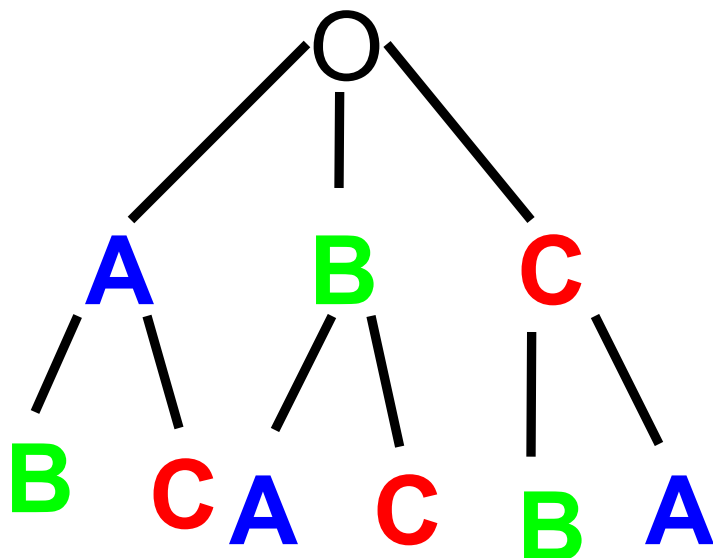
На первый стул можно посадить любого из
трех учеников - обозначим их **A**, **B**, **C**.



Посадив на первый стул ученика **A**, на второй стул можно посадить ученика **B** или **C**.

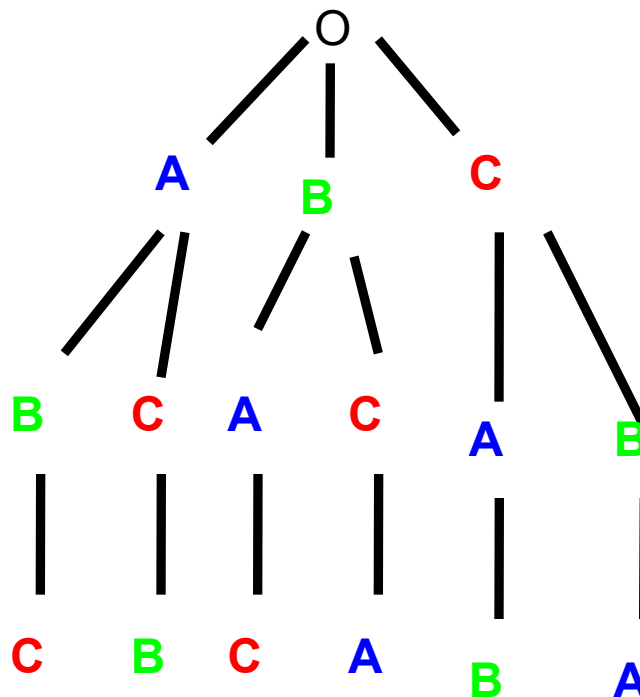
Если же на первый стул сядет ученик **B**, то на второй можно посадить ученика **A** или **C**.

Если на первый стул сядет ученик **C**, то на второй можно посадить ученика **A** или **B**.



Очевидно, что третий стул в каждом случае займет оставшийся ученик.

Это соответствует одной ветви графа, которая «вырастает» на каждой из предыдущих ветвей.



Запомните

Граф можно **не строить**, если не требуется
выписывать все возможные варианты, а
нужно указать их число.



В этом случае рассуждать нужно так:

- на первый стул можно посадить одного из **трех** человек,
- на второй одного из **двух** оставшихся
- на третий – **одного** оставшегося:

Получаем **$3 * 2 * 1 = 6$** вариантов
(по правилу произведения)





Задача №2

В гостинице семь одноместных номеров.
Семь гостей желают в них разместиться.
Причем трое заранее зарезервировали
конкретные номера.

Найдите число способов расселения
семи гостей по семи номерам.











Первый способ решения: с помощью графа



Так как три номера у нас были зарезервированы (то есть заняты), то мы их не рассматриваем

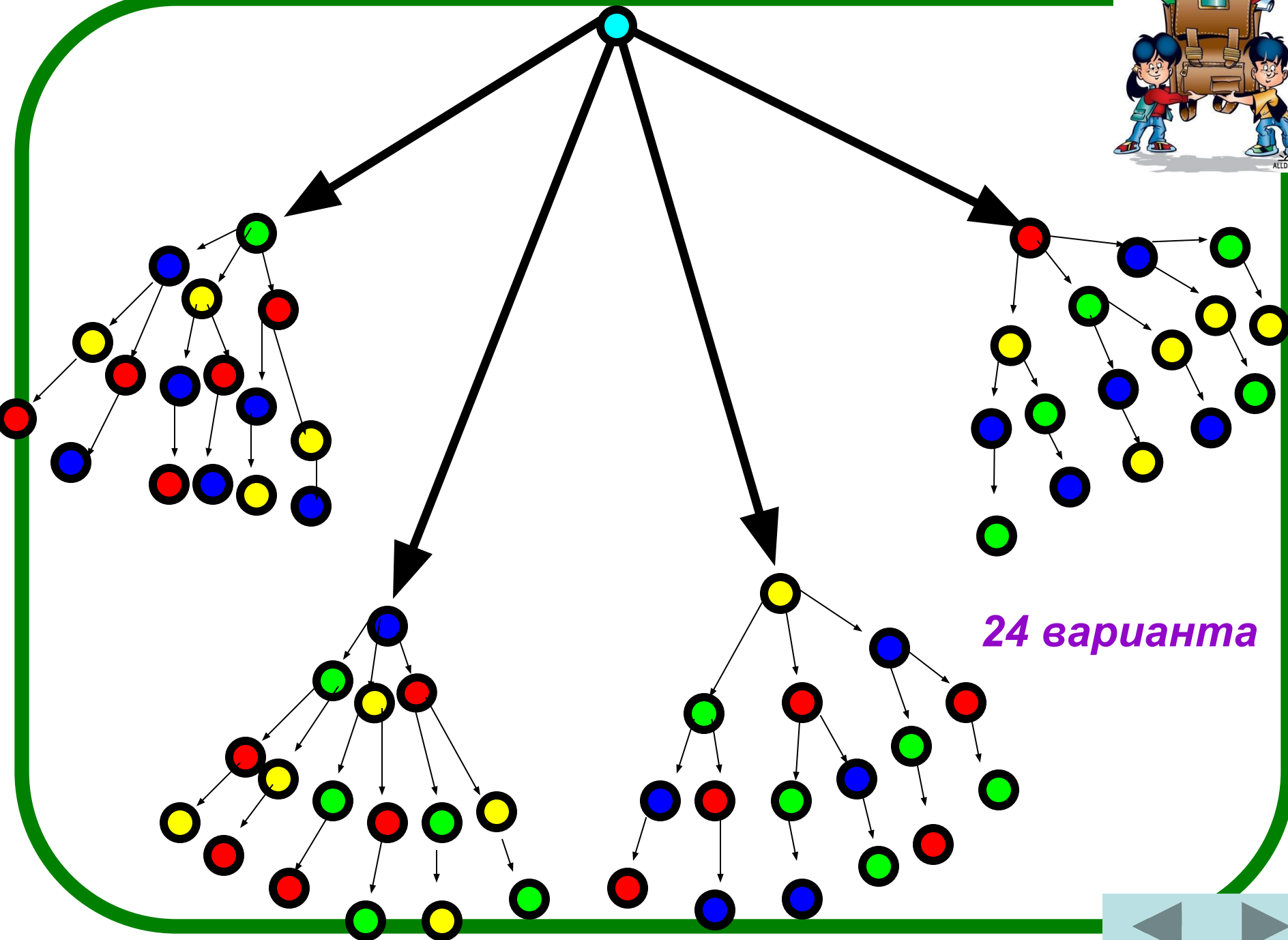
Пусть 1-ый гость –  2-ой гость – , 3-ий гость – , 4-ый гость – 

1. За начало берем произвольную точку.
2. В первый номер можно расселить любого из гостей гостиницы. Вы можете видеть это на графе.
3. А) Гость  займет 1-ый номер, гость  - 2-ой, гость  - 3-ий, гость  - 4-ый номер.
- Б) Если в первый номер заселить гостя , то во второй можно заселить либо гостя , либо - , либо - 

Далее продолжаем по аналогии.

Рассмотрим граф:





24 варианта



Второй способ решения

У гостя ● есть возможность заселиться в любой из четырех (4) номеров,

у гостя ● - в любой из трех,

у гостя ● - в любой из двух,

у гостя ● - в один оставшийся,



Гости могут заселяться в любом порядке:

То есть гость ● не обязательно первый, гость ● второй и так далее,

Эта задача решается с помощью последовательного умножения количества вариантов заселения гостей - то есть

факториал.



Факториал

Факториалом натурального числа **n** называется произведение всех натуральных чисел **от 1 до n**.
Обозначается **n!**

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n$$



Так как три номера уже занято,
значит $(7-3)=4$ номера свободно.



Поскольку мы меняем местами **четыре** человек по свободным номерам,
значит это будет перестановка из **4-х** элементов.

$P_{(7-3)} = (7-3)! = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$ - варианта перестановок





Перестановка



Перестановкой из **n** предметов называется любой способ нумерации этих предметов (способ их расположения в ряд)

$$P_n = n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) \dots (n-k)$$



Задача №3

Сколькими способами можно рассадить 4 человек за круглым столом.

(перестановка по кругу)

9

96

6

52



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение



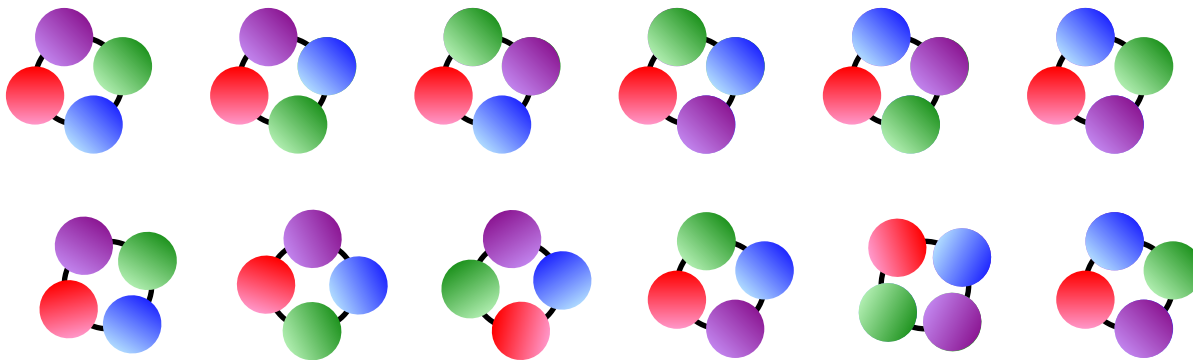
Решение к задаче №3

Пользуясь формулой перестановок по кругу « $P_n = (n-1)!$ » $n-1$ по тому что при перестановках элементов 1 элемент остается статичным и не переставляется.

Получаем $P_4 = (4-1)! = 3! = 6$

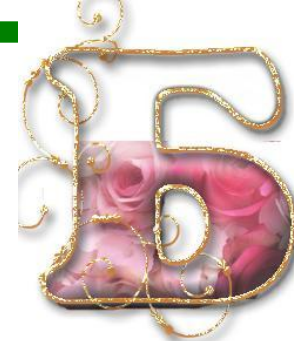


Перестановки по кругу



$$P_n = (n-1)$$

Задача №4



Найдите число различных перестановок
букв **a,a,a,b,b,c,c**

(см. перестановка с повторением)

210

60

7

5040



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение



Решение к задаче №4

Эта задача решается с помощью формулы перестановок с повторением то есть получаем.

$$\frac{7!}{3! * 2! * 2!} = \frac{5040}{24} = 210$$

Перестановки с повторением

Кроме рассмотренных нами комбинаций в комбинаторике есть еще многие другие.

Одна из наиболее важных типов *перестановки с повторением*.



Рассуждать нужно так:

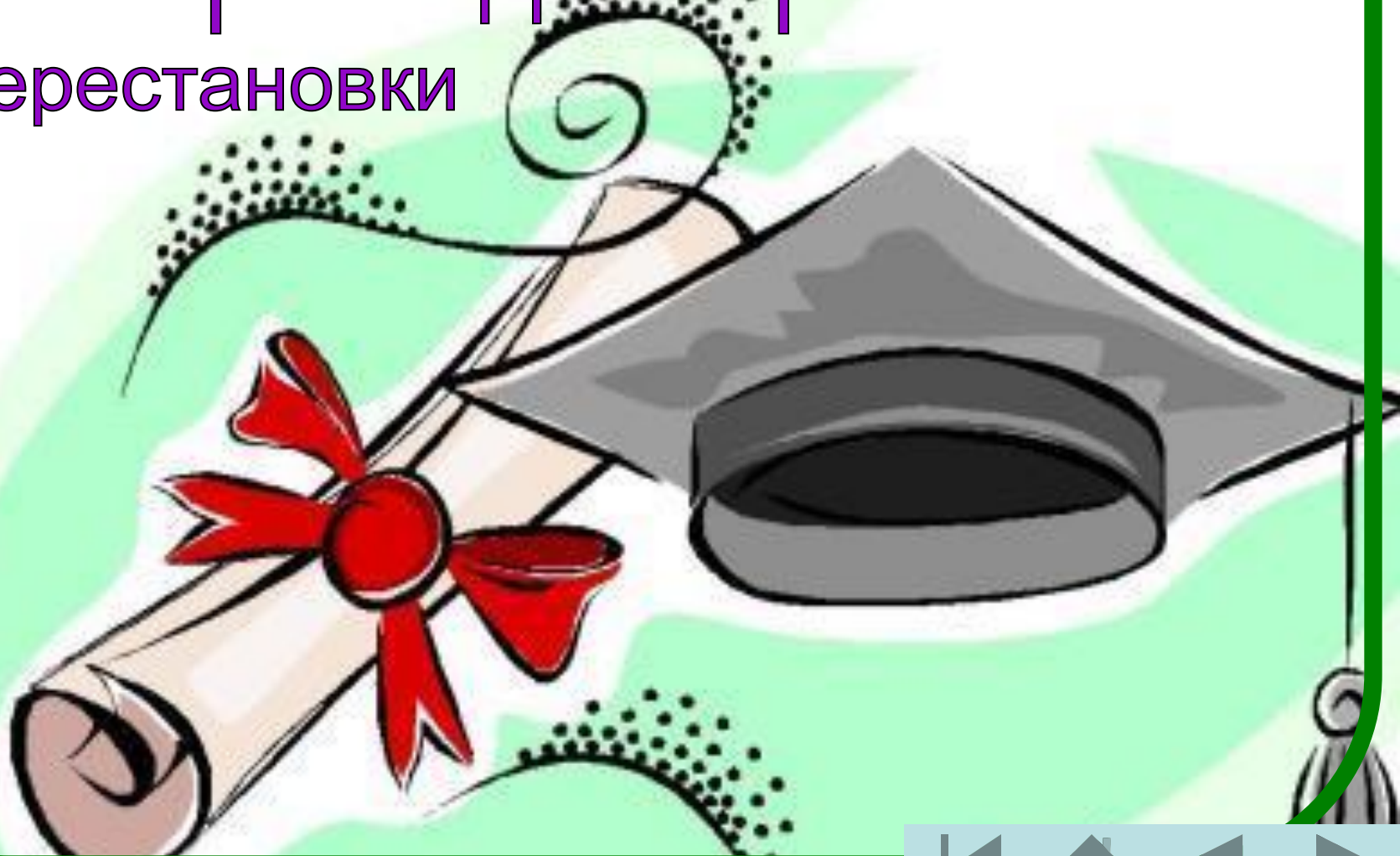
Возьмем m элементов среди которых имеется m_1 одинаковых между собой элементов первого рода, m_2 одинаковых элементов второго рода и т.д. Будем переставлять их всевозможными способами.

Получившиеся комбинации носят название перестановки с повторяющимися элементами. Число различных между собой перестановок с повторяющимися элементами равно:

$$\frac{P_m}{P_{m_1} * P_{m_2} \dots P_{m_k}} \quad \text{или} \quad \frac{m!}{m_1! * m_2! * m_3! \dots m_k!}$$



Примеры задач с решениями перестановки





Задача №1

Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде трех горизонтальных полос одинаковых по ширине, но разных по цвету: **белый** , **синий** , **красный**.

Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой, отличный от других, флаг?

7

4

6

2



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение



Решение задачи №1

Так как у флага три полосы и их нужно расположить **всеми возможными способами**, то мы используем перестановку из 3 элементов:

$$P_3 = 3! = 3 * 2 * 1 = 6$$





Задача №2

Подсчитаем, сколько существует различных способов каждому из пяти человек присвоить номер от одного до пяти?



700

10

61

120



Решение задачи №2

Так как есть пять человек и нужно присвоить им пять номеров **всеми возможными способами**, то мы используем перестановку из 5 элементов:

$$P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120 \text{ (способов)}$$



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение

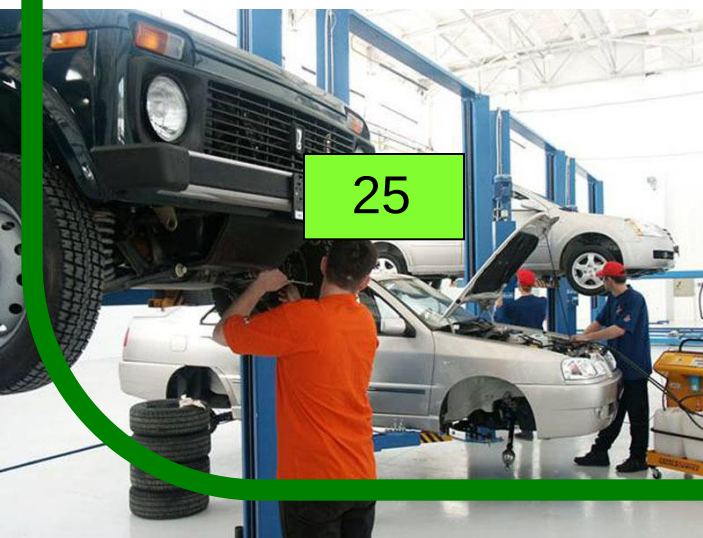




Задача №3

В автосервис одновременно приехали
3 машины для ремонта.

Сколько существует способов
выстроить их в очередь на
обслуживание?



25

6

11

15



Решение задачи №3

Так как есть три машины, и нужно расставить их в очередь на ремонт **всеми возможными способами**, то мы используем перестановку из 3 элементов:

$$P_3 = 3! = 3 * 2 * 1 = 6$$



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение





Задача №4

Сколько различных последовательностей (не обязательно осмысленных) можно составить из букв слова «автор»?



120

100

30200

720



Решение задачи №4

Так как в слове «автор» 5 букв, где **все буквы разные** и нужно расставить их **всеми возможными способами**, то мы используем перестановку из 5 элементов:

$$P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120 \text{ (способов)}$$



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение





Задача №5

В гостинице семь одноместных номеров. Семь гостей желают в них разместиться. Причем двое заранее зарезервировали конкретные номера.

Сколько существует способов расселения семи гостей по семи номерам?

120

1000

200

7520



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение



Решение задачи №5

Так как двое гостей уже
зарезервировали номера, то остаётся
пять посетителей и они могут
расселиться по комнатам следующим
способом:

$$P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$





Задача №6

Сколькими способами можно составить расписание на понедельник чтобы русский и литература стояли рядом. (Русский язык, Геометрия, Литература, Алгебра, Физкультура, История).

1000

120

200

7520



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение



Решение задачи №6

Так как русский язык и литература должны стоять рядом, то мы **сгруппируем его в один элемент.**

Поэтому расписание можно составить следующим образом:

$$P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$



Решение к задаче №7

Перестановка из 7 элементов но при перестановке букв «а», получается одно слово, поэтому

$$\frac{P_7}{2!} = 2520$$





Задача №8

Сколько можно составить слов из букв в слове **математика**?

151200

3542

100

720



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



Верно!!!

Сравните решение



Решение к задаче №8

Перестановка из 10 элементов, но при перестановке букв «а», «м», «т» между собой, получается одно и то же слово, значит

$$\frac{P_{10}}{3! * 2! * 2!} = 151200$$





Задача №9

Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр **1,2,0,4,6**?

10

96

120

520



Решение к задаче №9

P_5 – количество перестановок где «0» на первом месте поэтому получается P_4

$$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4!(5-1) = 4! * 4 = 96$$



Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!



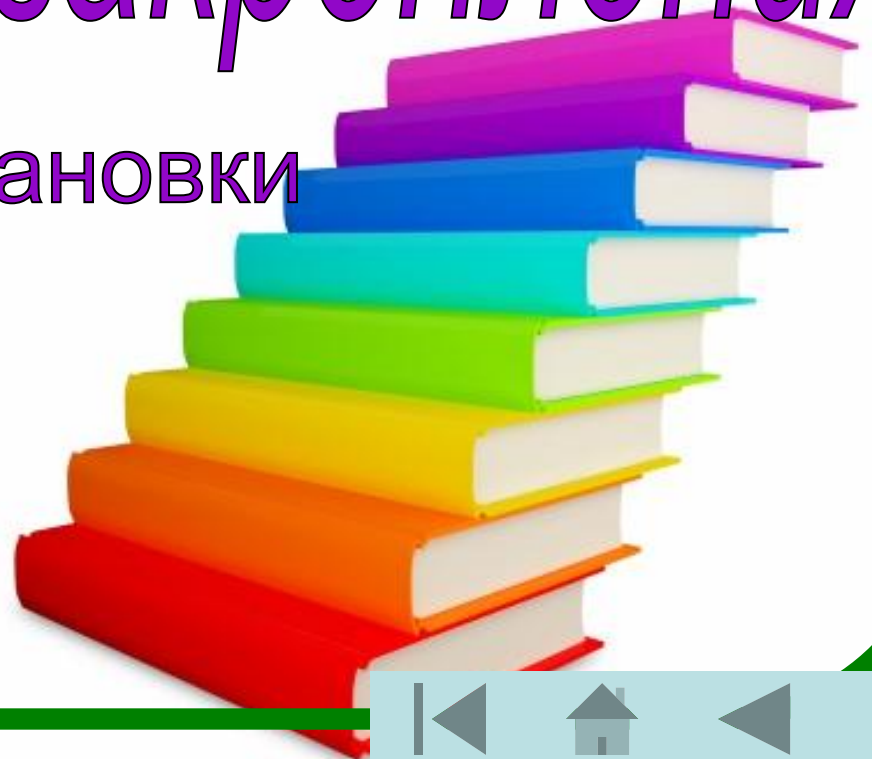
Верно!!!

Сравните решение



Задачи для закрепления

перестановки





Задача №6. У Спящей Красавицы 7 платьев. Сколькими способами она может их надевать, меняя каждый день, в течение недели?

Задача №7. Старушка Бэйбэрикээн заказала у кузнеца 5 колокольчиков для своих пяти коров. Сколькими способами она может надеть колокольчики на своих коровах?

Задача №8. Сколько различных восьмизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8 при условии, что ни одно из них не повторяется?

Задача №9. Всего 6 различных красок. Сколькими способами можно раскрасить слово «Эврика», если все буквы должны быть раскрашены разными цветами?



ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ 6-9:

Задача №6: $7! = 5040$

Задача №7: $5! = 120$

Задача №8: $8! = 30200$

Задача №9: $6! = 720$





Задача №15. Слово - любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить из слов

- а) ``ВЕКТОР";
- б) ``ЛИНИЯ";
- в) ``ПАРАБОЛА";
- г) ``БИССЕКТРИСА";
- д) ``МАТЕМАТИКА";

Задача 16. Сколькими способами 28 учеников могут выстроиться в очередь в столовую?

Задача 17. Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10-ю креслами так, чтобы они чередовались?



ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ 15-17:

Задача №15:

а) $6! = 720$

б) $5! - 2! = 120 - 2 = 118$

в) $8! - 3! = 40320 - 6 = 40314$

г) $11! - 3! - 2! = 39916800 - 6 - 2 = 39916792$

д) $9! - 2! - 2! - 3! = 362880 - 2 - 2 - 6 = 362870$

Задача №16: 28!

Задача №17: $(5-1)! * 2! = 4! * 2! = 48$

