

# Угол между прямыми

Выполнили:  
Ученицы 11 А класса  
Преснякова Кристина  
Голубчик Евгения  
Малахова Татьяна

# УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Дан четырехугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найти угол между  $C_1 D_1$  и  $B F$ , где  $F$  - середина  $CD$ ; если  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $AD =$  ;  $CD = AA_1 = \sqrt{2}$ .

# УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ:

---

- Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
- Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.
- Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$ .
- Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

---

*Задачу можно решить тремя способами:*

1. Поэтапно-вычислительным методом

2. Координатным методом

3. Методом трех косинусов

# ПОЭТАПНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД

---

При нахождении этим методом угла между прямыми  $m$  и  $l$  используют формулу:

$$\cos \varphi = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc}$$

где  $a$  и  $b$  — длины сторон треугольника  $ABC$ , соответственно параллельных этим прямым.

Далее:



# РЕШЕНИЕ:

1) Проведем  $ED \parallel BF$

2) В треугольнике  $C_1ED$  найдем прямую  $ED$ .

Треугольник  $AED$  – прямоугольный;

$AE=EB$ , т.к.  $ED \parallel BF$  и  $F$  – середина  $CD$ .

$AE=\sqrt{2}/2$ ,  $AD=1/\sqrt{2}$ .

По теореме Пифагора:

$$ED^2 = AE^2 + AD^2$$

$$ED^2 = 1/2 + 1/2 = 1$$

$$ED = 1$$

3) В треугольнике  $C_1CD$ .

По теореме Пифагора:

$$C_1D^2 = C_1C^2 + CD^2$$

$$C_1D^2 = 2 + 2 = 4$$

$$C_1D = 2$$

4) Проведем  $EC$ .

$C_1C \perp (ABCD)$ ,

$EC$  принадлежит  $(ABCD)$

Значит,  $EC \perp C_1C$

$EC = ED$  (т.к.  $AED = BCE$  по двум сторонам и углу между ними)

5) В прямоугольном треугольнике  $C_1CE$ :

$$C_1E^2 = EC^2 + C_1C^2$$

$$C_1E^2 = 1 + 2 = 3$$

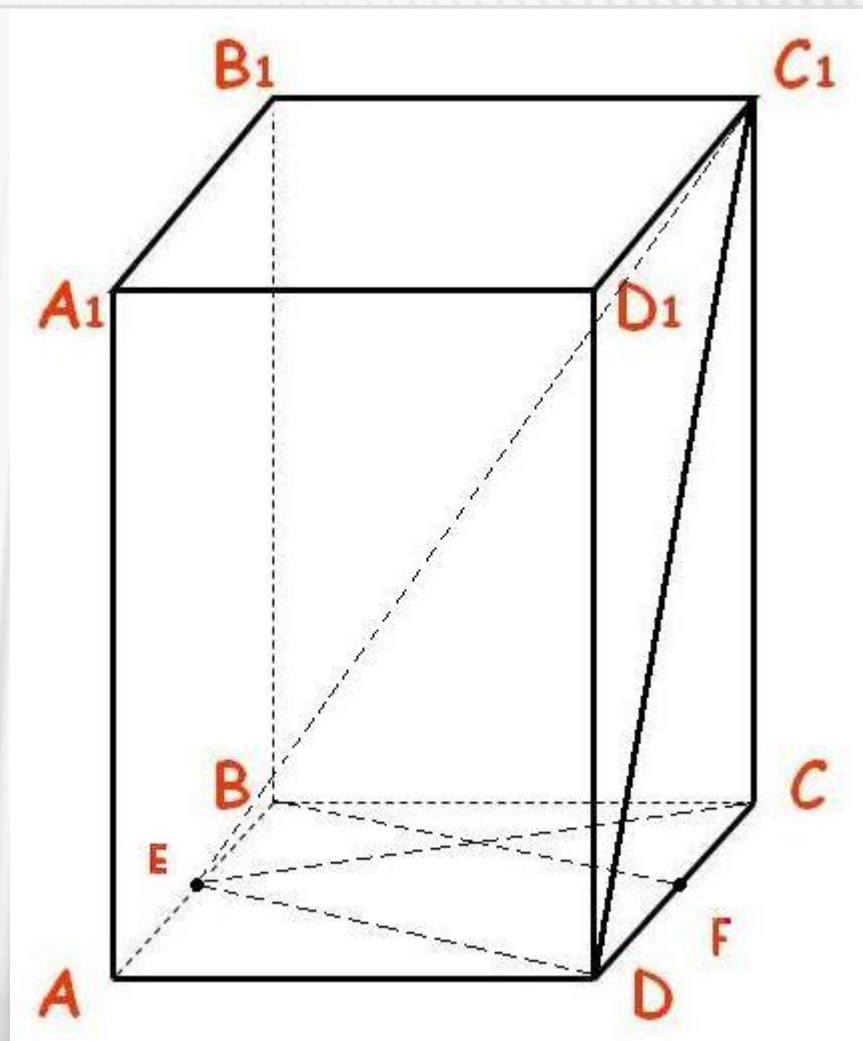
$$C_1E = \sqrt{3}$$

6)  $\angle EDC_1$  – искомый

$$\cos \angle EDC_1 = \frac{ED^2 + C_1D^2 - C_1E^2}{2 \cdot ED \cdot C_1D} = \frac{1}{2}$$

$$\angle EDC_1 = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

**Ответ:  $60^\circ$**



# КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД:

При нахождении угла между прямыми  $m$  и  $l$  используют формулу

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$$

или в координатной форме:

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где  $p$  и  $q$  - векторы, соответственно параллельные этим прямым; в частности, для того чтобы прямые  $m$  и  $l$  были перпендикулярны, необходимо и достаточно чтобы  $p^*q = 0$ .

Далее:

# РЕШЕНИЕ:

1)  $B(0;0;0)$

$F(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0)$

$C_1(0; 1/\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$D(\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0)$

2) вектор  $DC_1\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

$|DC_1| = \sqrt{2+0+2}=2$

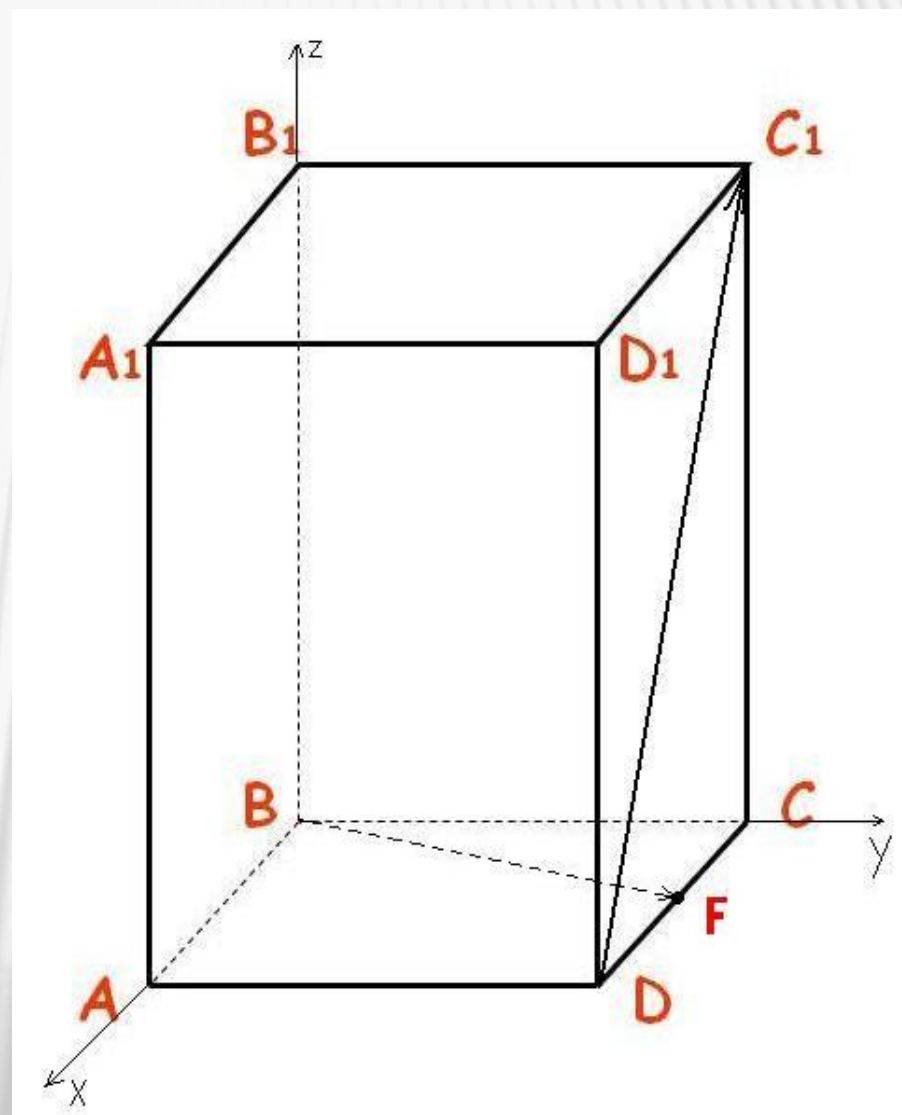
3) вектор  $BF\{1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0\}$

$|BF| = \sqrt{1/2+1/2}=1$

3)  $\cos(\angle CD_1BF) = |-1+0+0|/2*1=1/2$

$\angle CD_1BF = \arccos 1/2 = 60^\circ$

Ответ:  $60^\circ$ .





# МЕТОД ТРЁХ КОСИНУСОВ:

Соотношение  $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$  называют теоремой Пифагора для трёхгранного угла или теоремой о трёх косинусах.

Чтобы найти  $\cos$  угла между скрещивающимися прямыми, нужно перемножить косинусы углов между данными прямыми и проекцией их на плоскость основания.

Далее:

# РЕШЕНИЕ:

1) CD-проекция  $DC_1$  на (ABC).

$$\cos \angle EDC_1 = \cos \angle BFC \cdot \cos \angle CDC_1$$

2)  $\triangle CDC_1$ -равносторонний и прямоугольный.

По теореме Пифагора  $CD=2$

$$\cos \angle CDC_1 = CD/DC_1 = \sqrt{2}/2$$

3)  $\triangle BCF$ .

$$BC=CF=1/\sqrt{2}$$

$\triangle BCF$ -прямоугольный

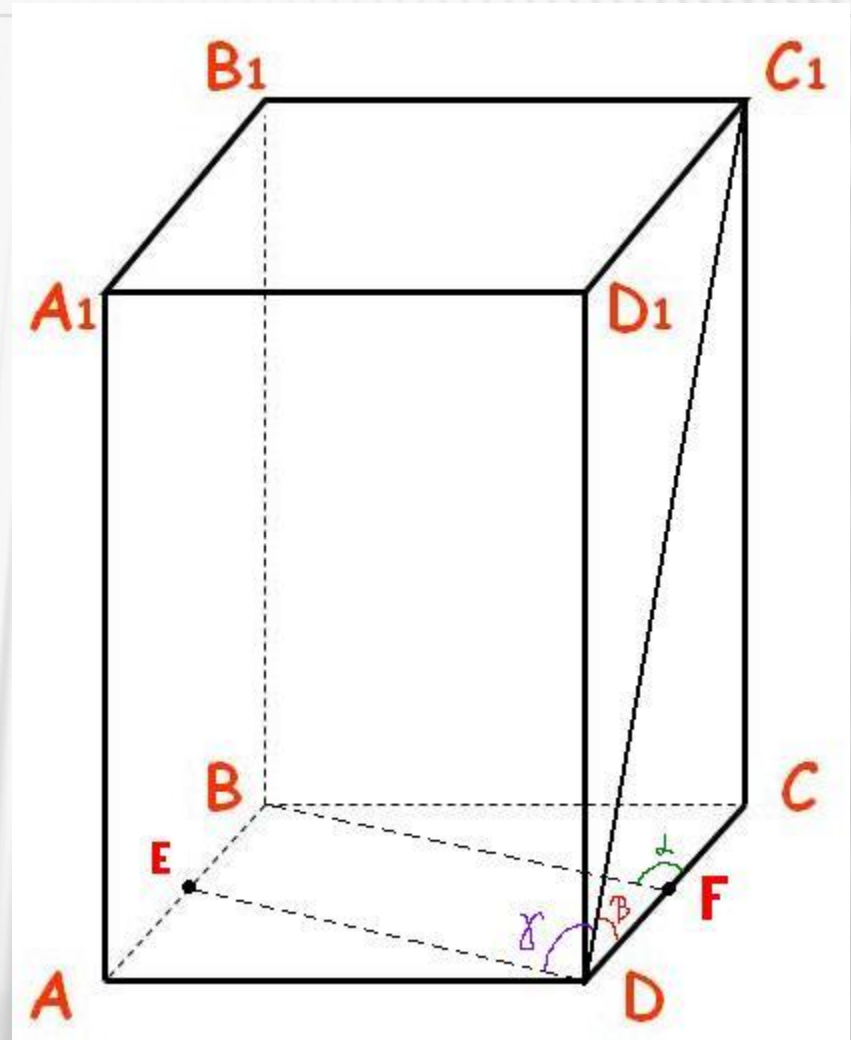
По теореме Пифагора  $BF=1$

$$\cos \angle BFC = CF/BF = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$$

$$4) \cos \angle EDC_1 = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2}/2 = 1/2.$$

$$\angle EDC_1 = \arccos 1/2 = 60^\circ$$

Ответ:  $60^\circ$



---

**КОНЕЦ**