

# Вычисление площади криволинейной трапеции



# Материалы к урокам и факультативным занятиям для 11 класса

Учитель ГБОУ гимназии № 49 Приморского района Санкт-Петербурга  
Алексеевой Людмилы Васильевны

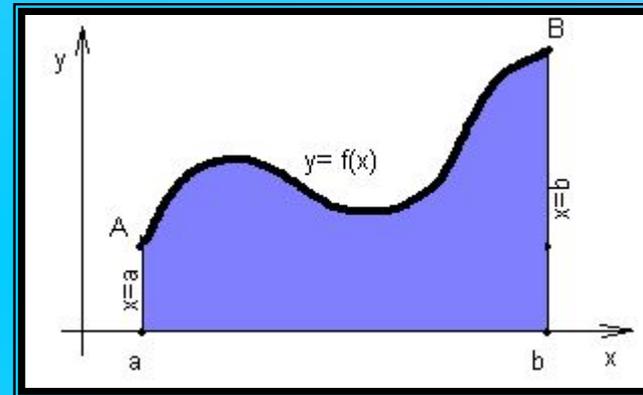
«Если имеются две неравные площади,  
то, постоянно прибавляя к самому себе  
избыток, на который большая площадь  
превосходит меньшую, можно получить  
площадь, которая была бы больше  
любой заданной ограниченной площади.»

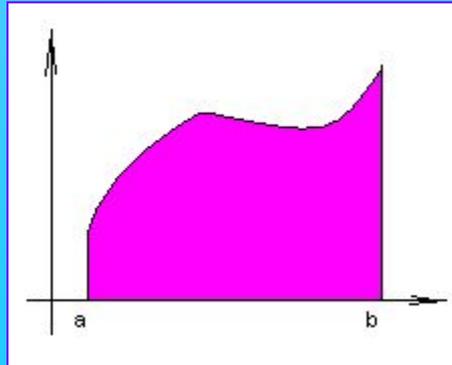
*Архимед*

# Определение.

## Криволинейной трапецией

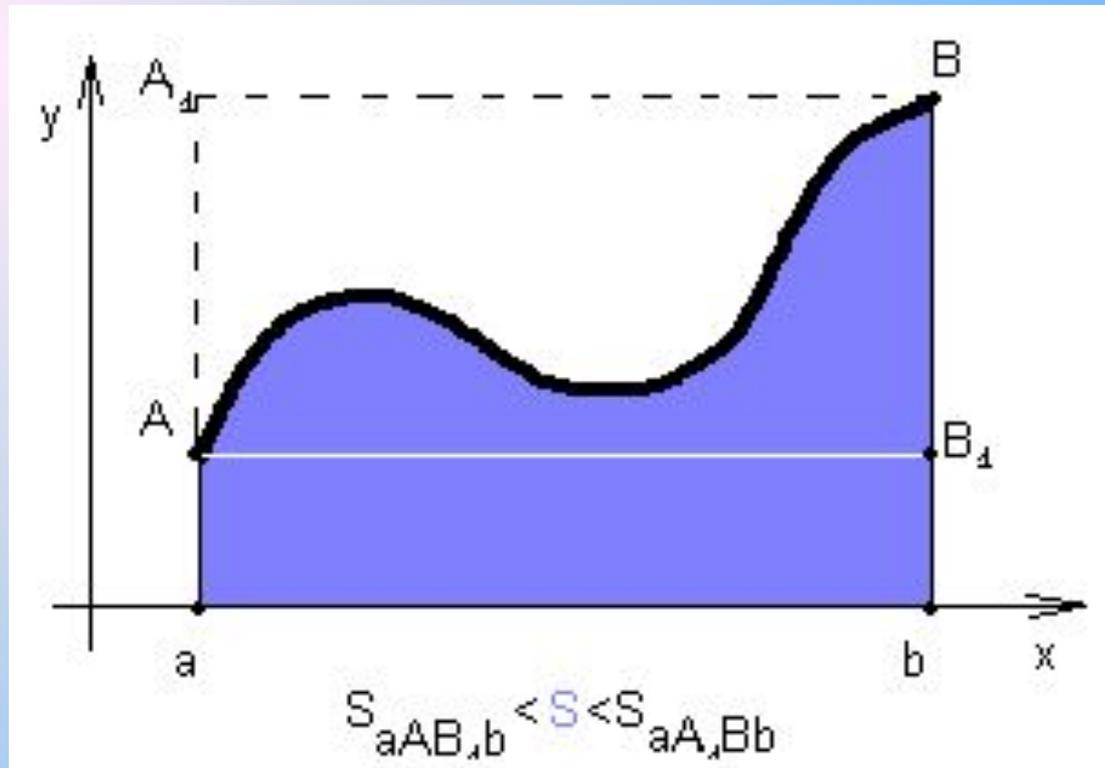
называют фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции, заданной на отрезке  $[a;b]$  и принимающей на нем положительные значения, отрезками прямых  $x=a$  и  $x=b$  и отрезком  $[a;b]$  оси абсцисс.





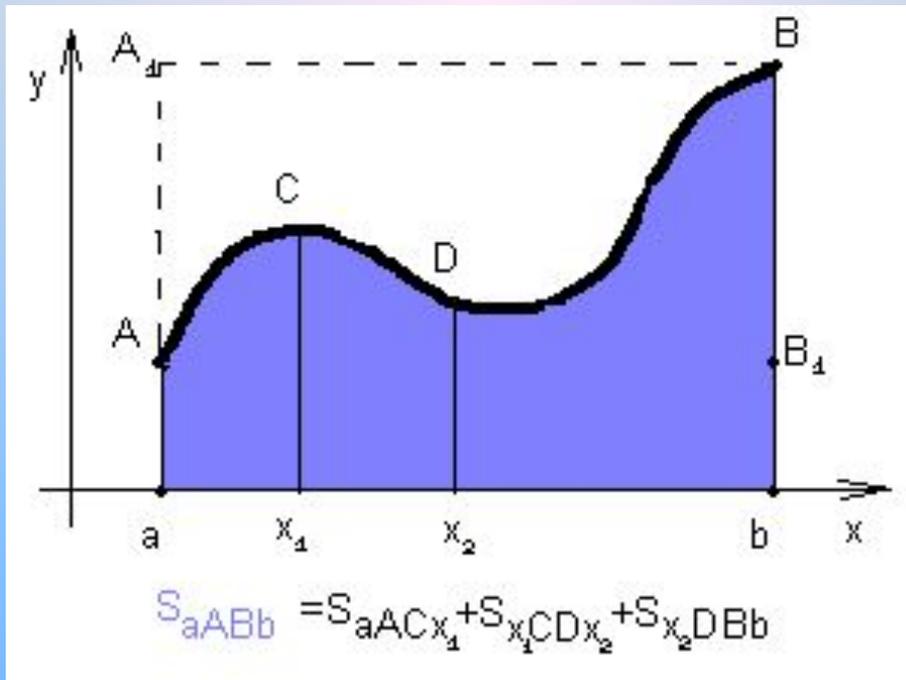
## Найти площадь криволинейной трапеции можно

- способом последовательных приближений
- способом составления интегральных сумм
- используя определенный интеграл

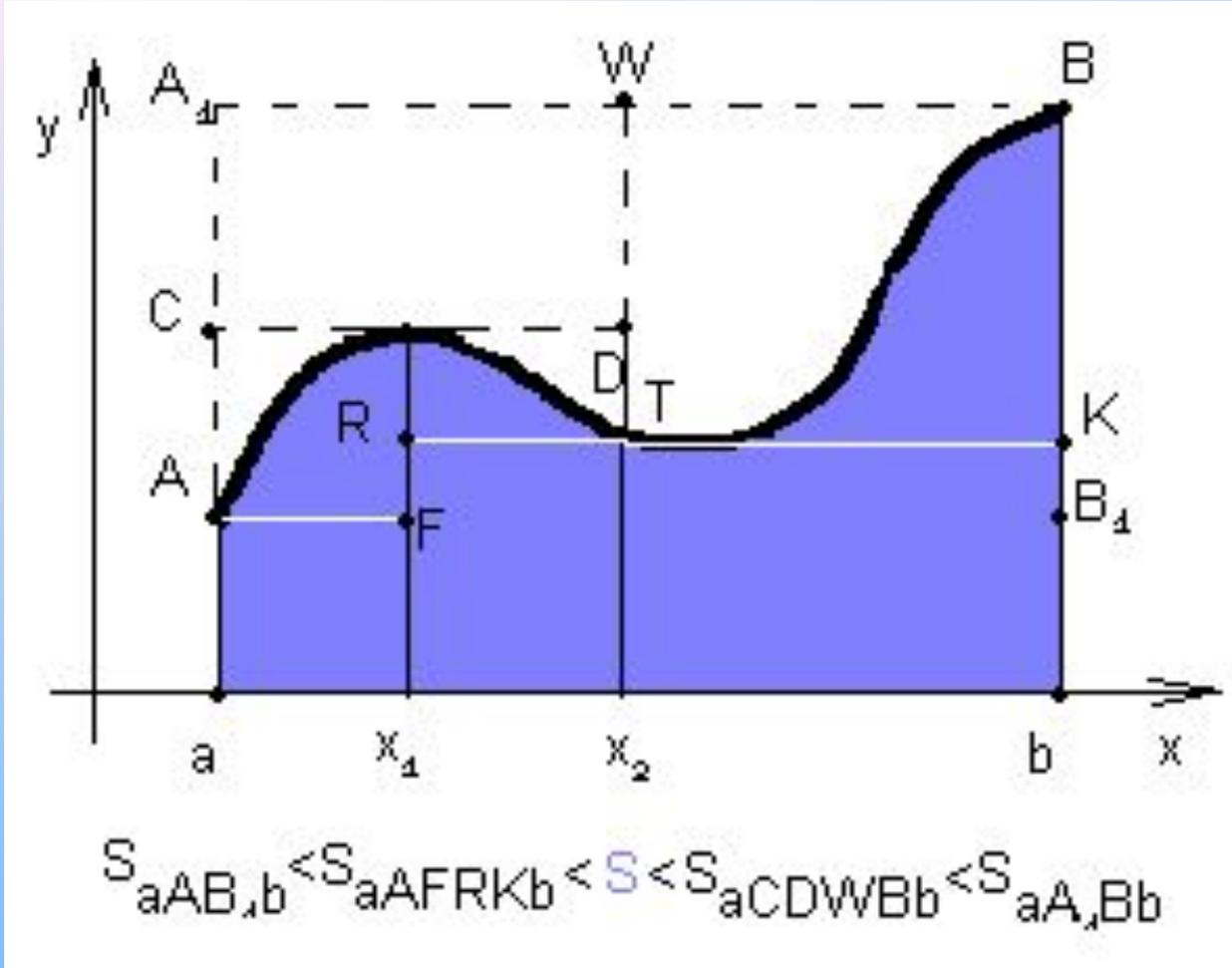


Очевидно, площадь заштрихованной фигуры больше, чем площадь прямоугольника  $aAB_1b$  и меньше, чем  $aA_1Bb$ .

Однако, такая оценка имеет очень большую погрешность.

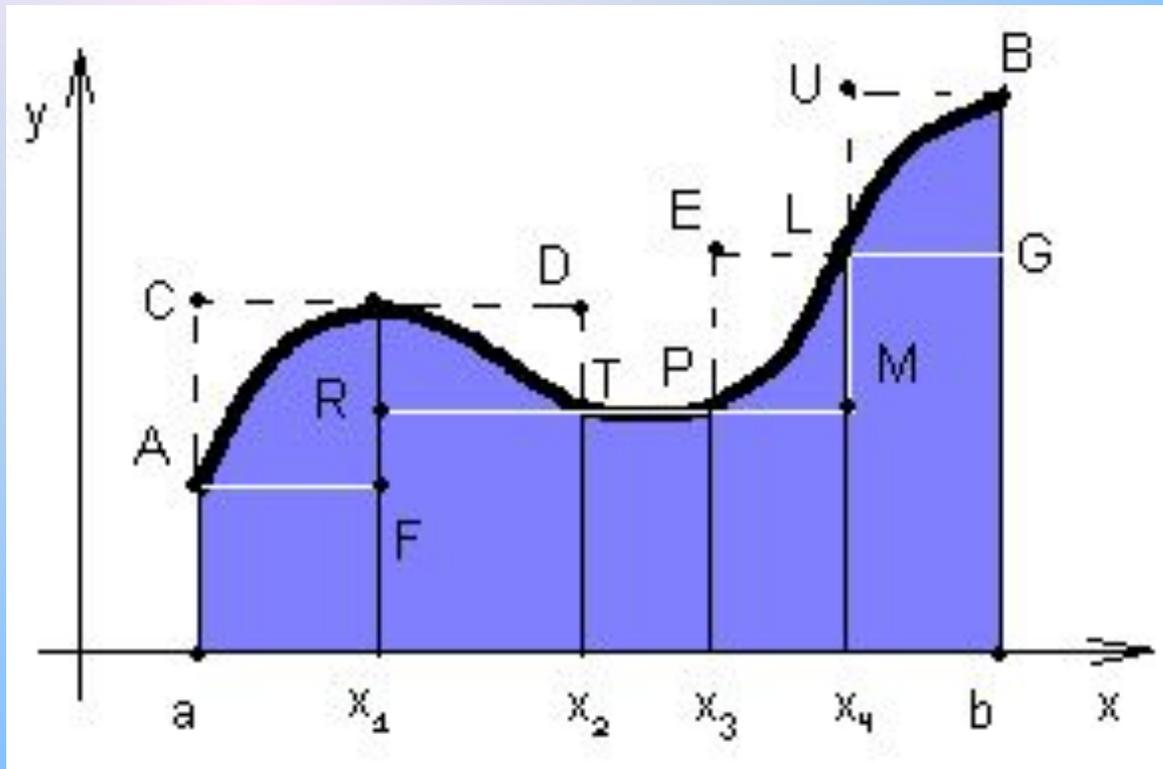


Попробуем уточнить  
оценку величины, для этого  
помним известный из  
геометрии прием нахождения  
площади, разобьем  
рассматриваемую фигуру на  
части: проведем несколько  
вертикальных прямых  $x=x_1$ ,  
 $x=x_2$ .



Теперь наша трапеция разбита на три трапеции.

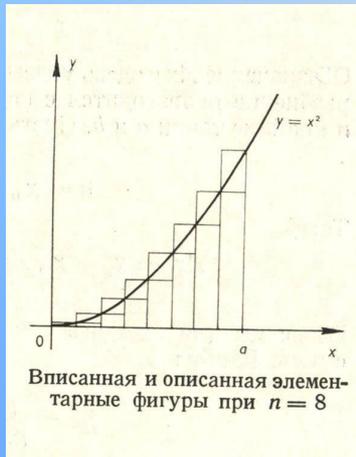
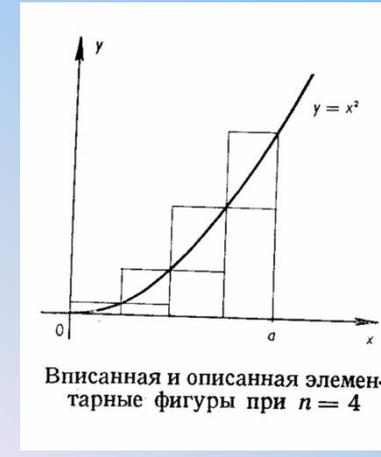
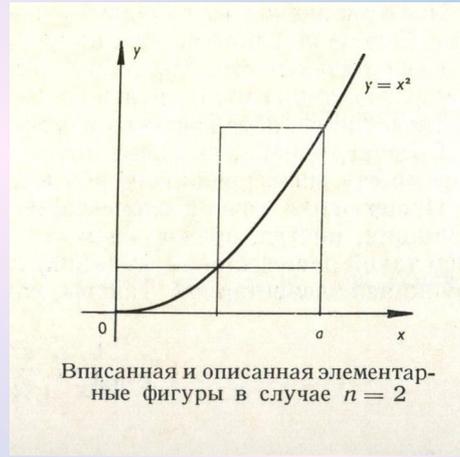
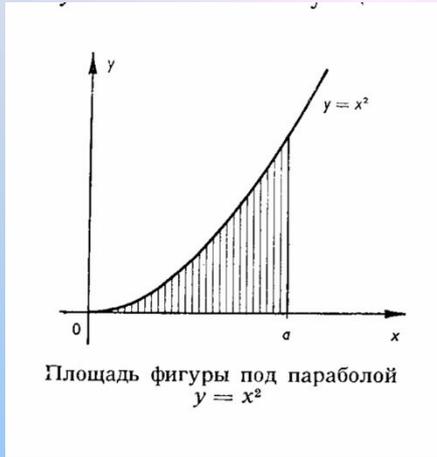
Еще больше уточним площадь трапеции ...



...и так далее

Рассмотрим пример:

Найти площадь под кривой, заданной графиком функции  $y=x^2$



площадь прямоугольников над параболой  $a^3 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$

площадь прямоугольников под параболой  $a^3 \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3}$

Отсюда, если  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$S = \frac{a^3}{3}$$

[примечание](#)

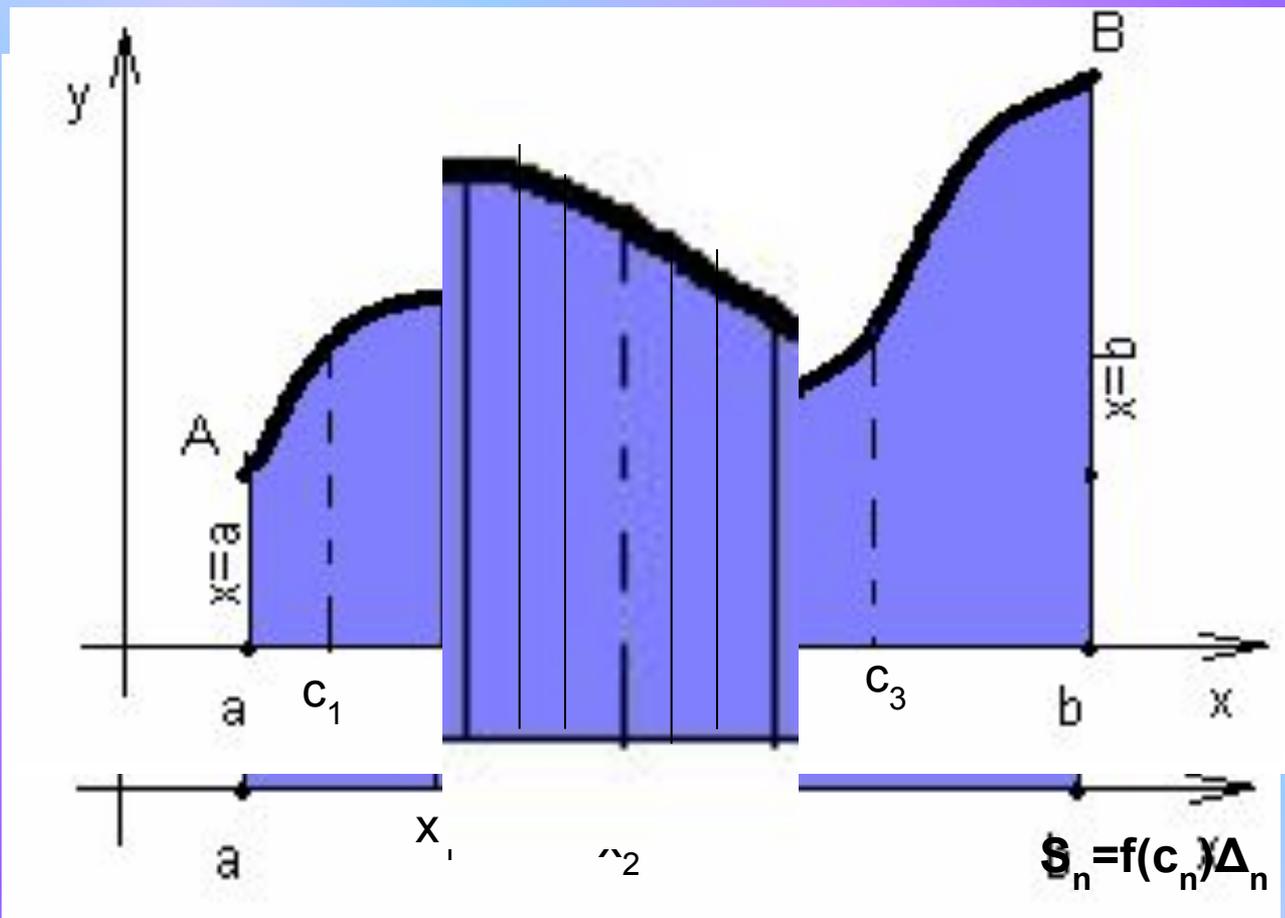
# Нахождение суммы последовательности квадратов натуральных чисел

*справедлива формула*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

*доказательство можно провести по индукции*

## Составление интегральной суммы



Уменьшая шаг разбиения  $\Delta_n$ , приближаем значение суммы  $S_1+S_2+\dots$  к значению  $S$  (исконной площади трапеции).

Разобьем основание трапеции точками  $x_1$  и  $x_2$

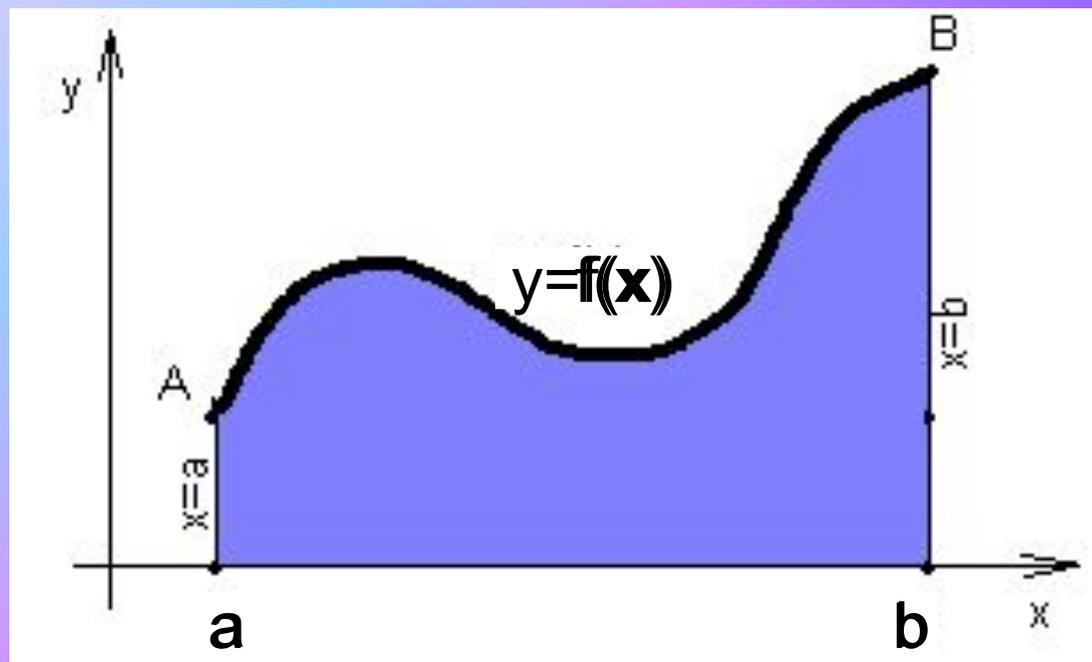
Приблизненно найдем площадь каждой части

При  $n \rightarrow \infty$   $\Delta_n \rightarrow 0$   $S_1+S_2+\dots+S_n \rightarrow S$ . Это можно записать математически

# Вычисление площади криволинейной трапеции

с помощью определенного интеграла

$$S = \int dx$$



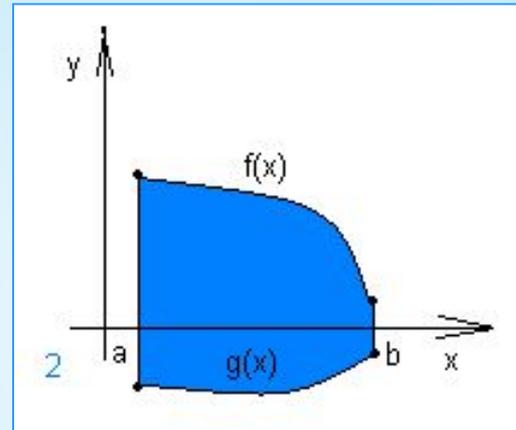
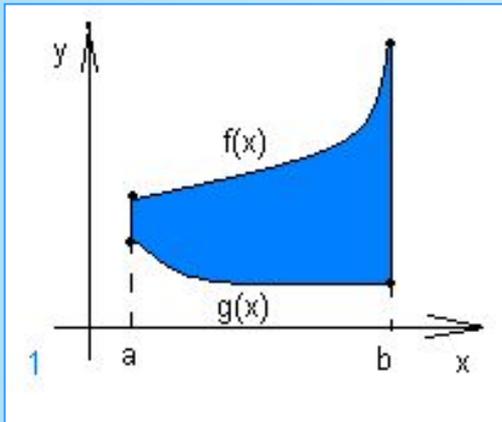
Вычисление определенного интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

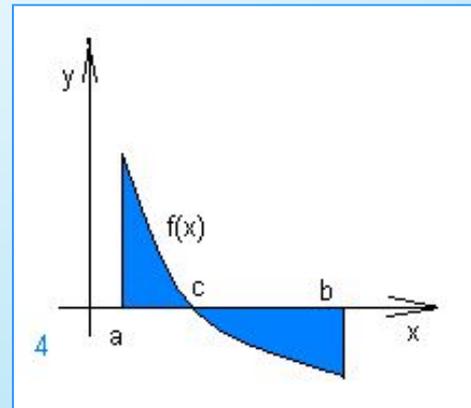
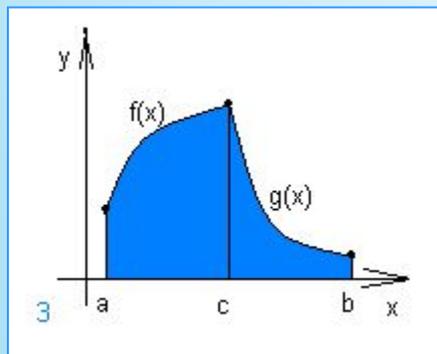
Формула Ньютона – Лейбница

# Попробуйте сами

Сконструировать формулу для вычисления площади фигур

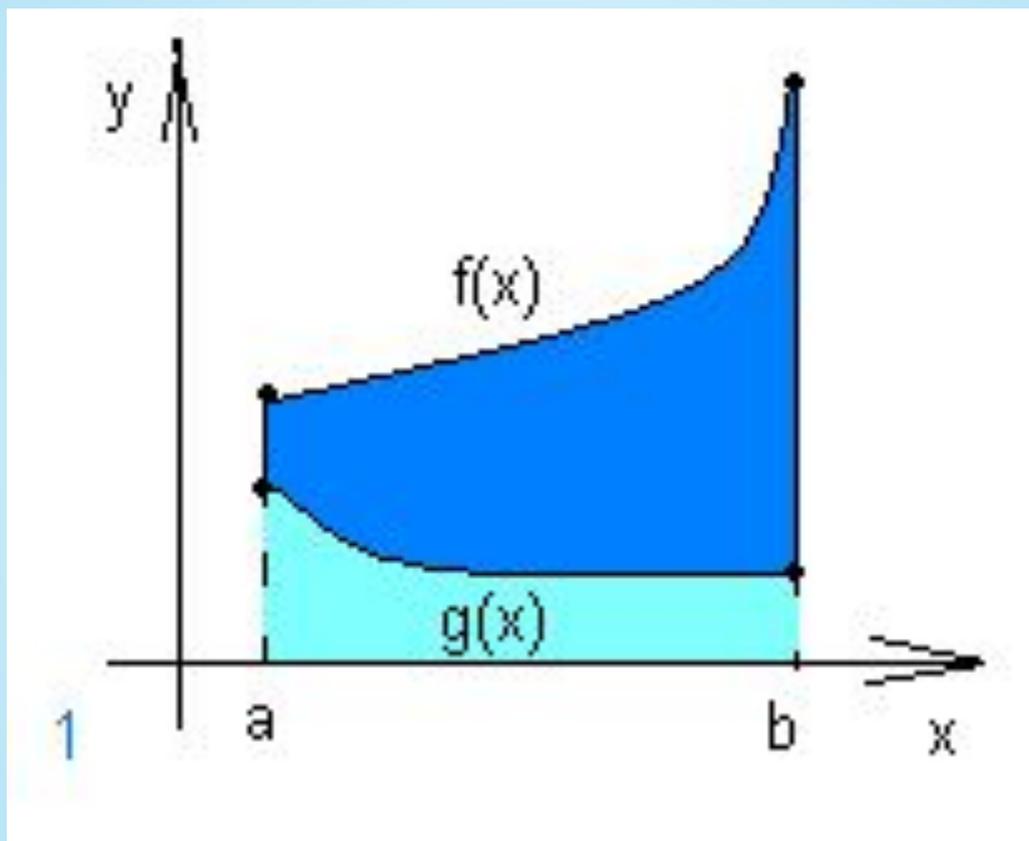


Если  
затрудняетесь,  
воспользуйтесь  
подсказкой

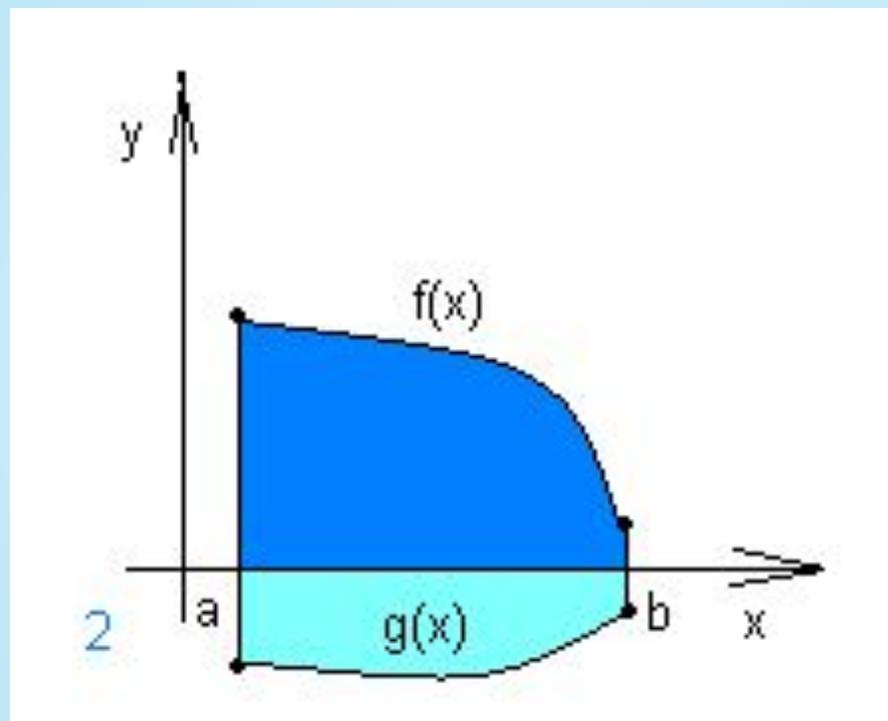


Проверьте  
себя по  
[ответам](#)

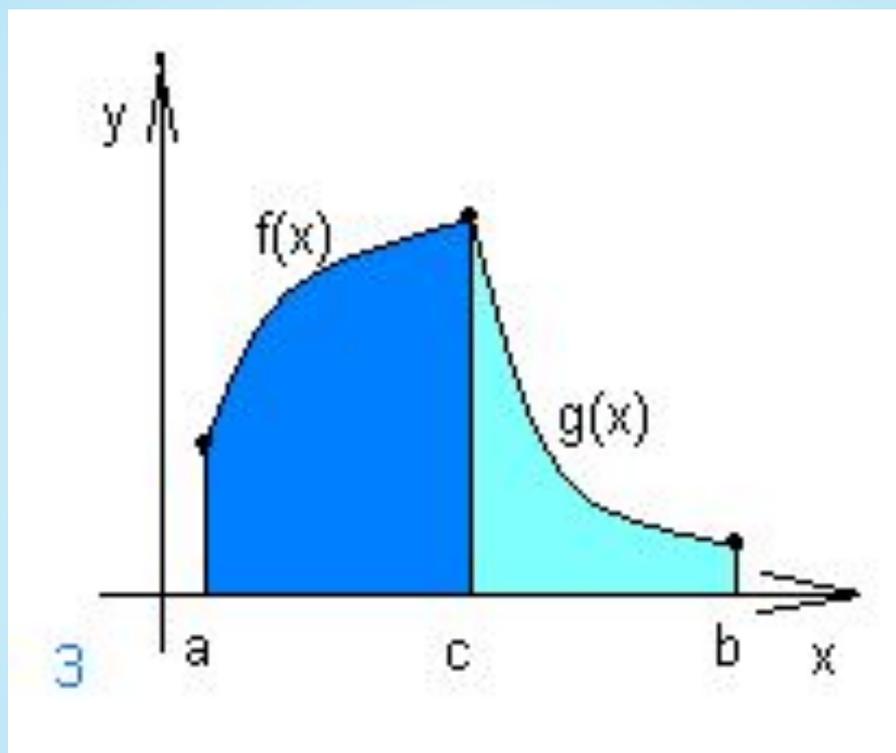
# Подсказка 1



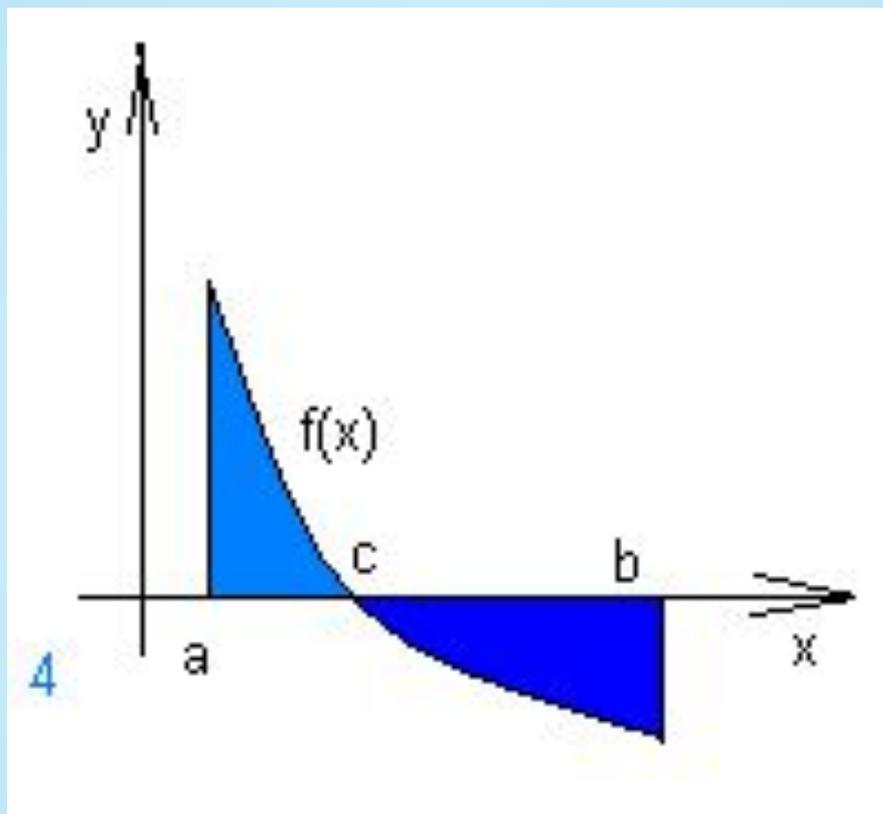
## Подсказка 2



### Подсказка 3



# Подсказка 4



## Проверь себя

$$1. S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$$2. S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \quad 3. S = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$4. S = \int_a^b f(x)dx$$

**Ура! Получилось!**

**М о л о д е ц !!!**