

Обобщающий урок по теме:

*«Логарифм. Логарифмическая функция.  
Логарифмические уравнения и неравенства.»*

Учитель математики  
Айшаева Фердаус Сулеймановна



## Цель урока:

- обобщение и систематизация знаний, навыков и умений по теме.

## Задачи:

- повторить определение логарифма, основное логарифмическое тождество, простейшие свойства логарифмов, определение и свойства логарифмической функции;

- закрепить способы решения логарифмических уравнений и неравенств;

- развивать вычислительные навыки, навыки самостоятельной работы, самоконтроля, навыки работы с различными источниками информации, а также познавательный интерес к предмету и логическое мышление;

- воспитывать информационную культуру учащихся, аккуратность, дисциплинированность.

**Оборудование:** компьютер, мультимедийный проектор, Интернет-ресурсы.

## Определение логарифма:

Логарифмом положительного числа **b** по положительному и не равному единице основанию **a** называется показатель степени, в которую нужно возвести основание **a**, чтобы получить число **b**:

$$\log_a b = x, \quad a^x = b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1, \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

## Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

## Свойства логарифмов:

1. Логарифм единицы по основанию  $a$  равен нулю:

$$\log_a 1 = 0$$

2. Логарифм  $a$  по основанию  $a$  равен 1:

$$\log_a a = 1$$

3. Сумма логарифмов равна логарифму произведения :

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy), \text{ при } x > 0 \text{ и } y > 0$$

4. Разность логарифмов равна логарифму частного:

$$\log_a x - \log_a y = \log_a (x/y), \text{ } x > 0 \text{ и } y > 0$$

5. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени:

$$\log_a x^p = p \log_a x, \quad x > 0$$

для любого действительного числа  $p$ .

6.

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

для любых действительных  $m$  и  $n$

7. Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (x > 0, a > 0 \text{ и } a \neq 1, b > 0 \text{ и } b \neq 1)$$

8.

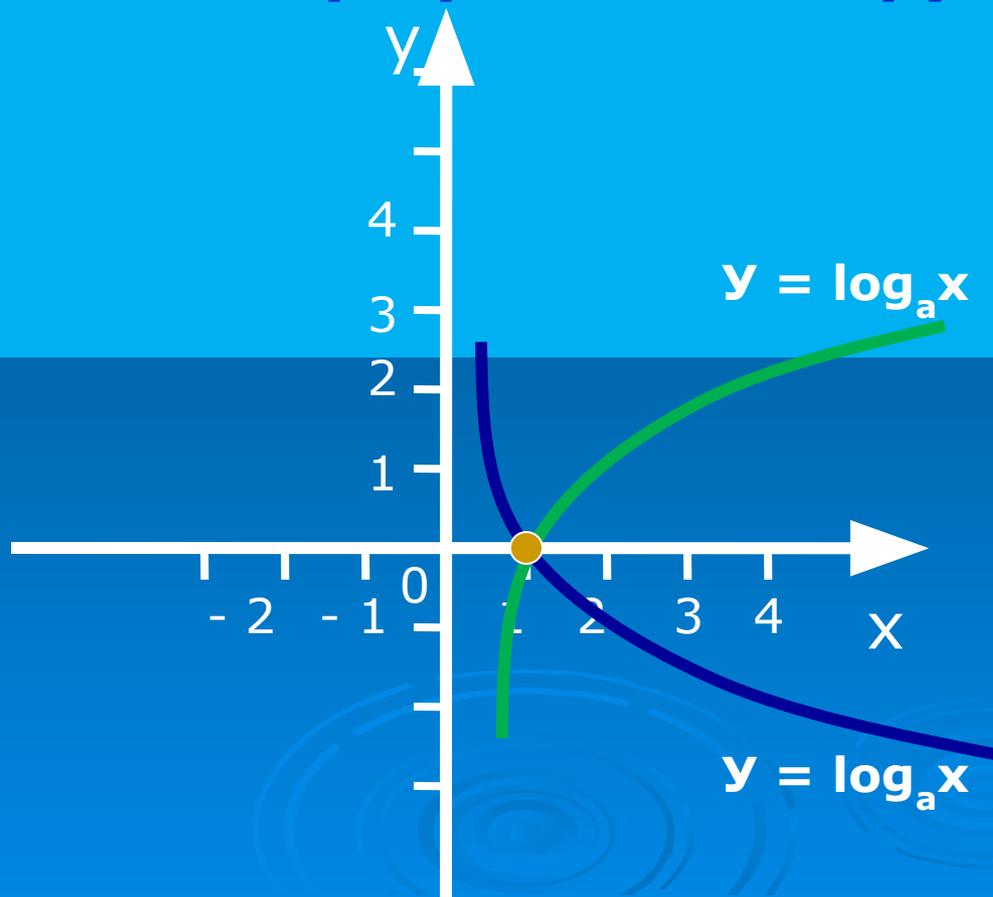
$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, \quad (n \in \mathbb{Z})$$

# Логарифмическая функция



## Определение:

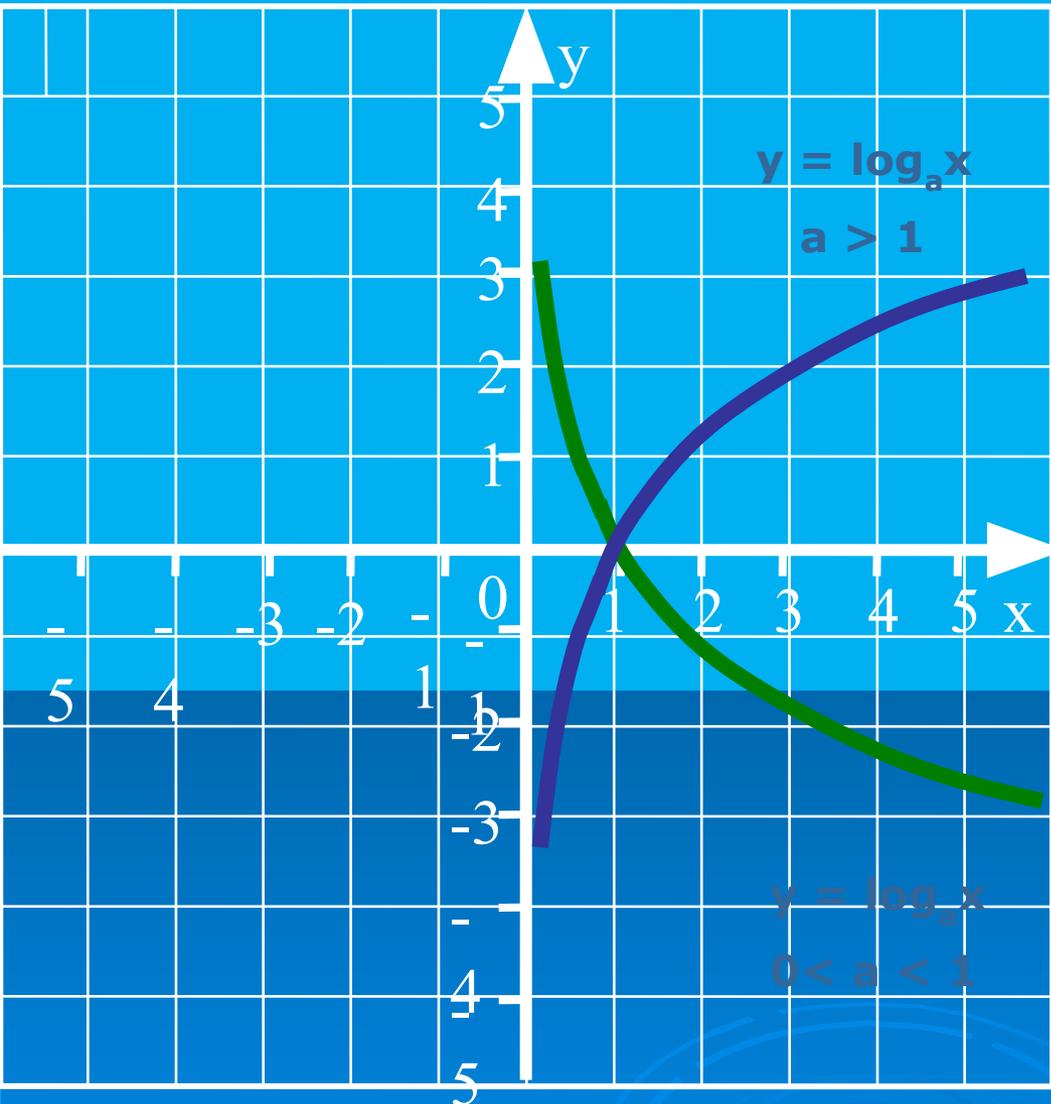
функция, заданная формулой  $y = \log_a x$ ,  
где  $a > 0$  и  $a \neq 1$ ,  
называется логарифмической функцией.



$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

# Свойства логарифмической функции

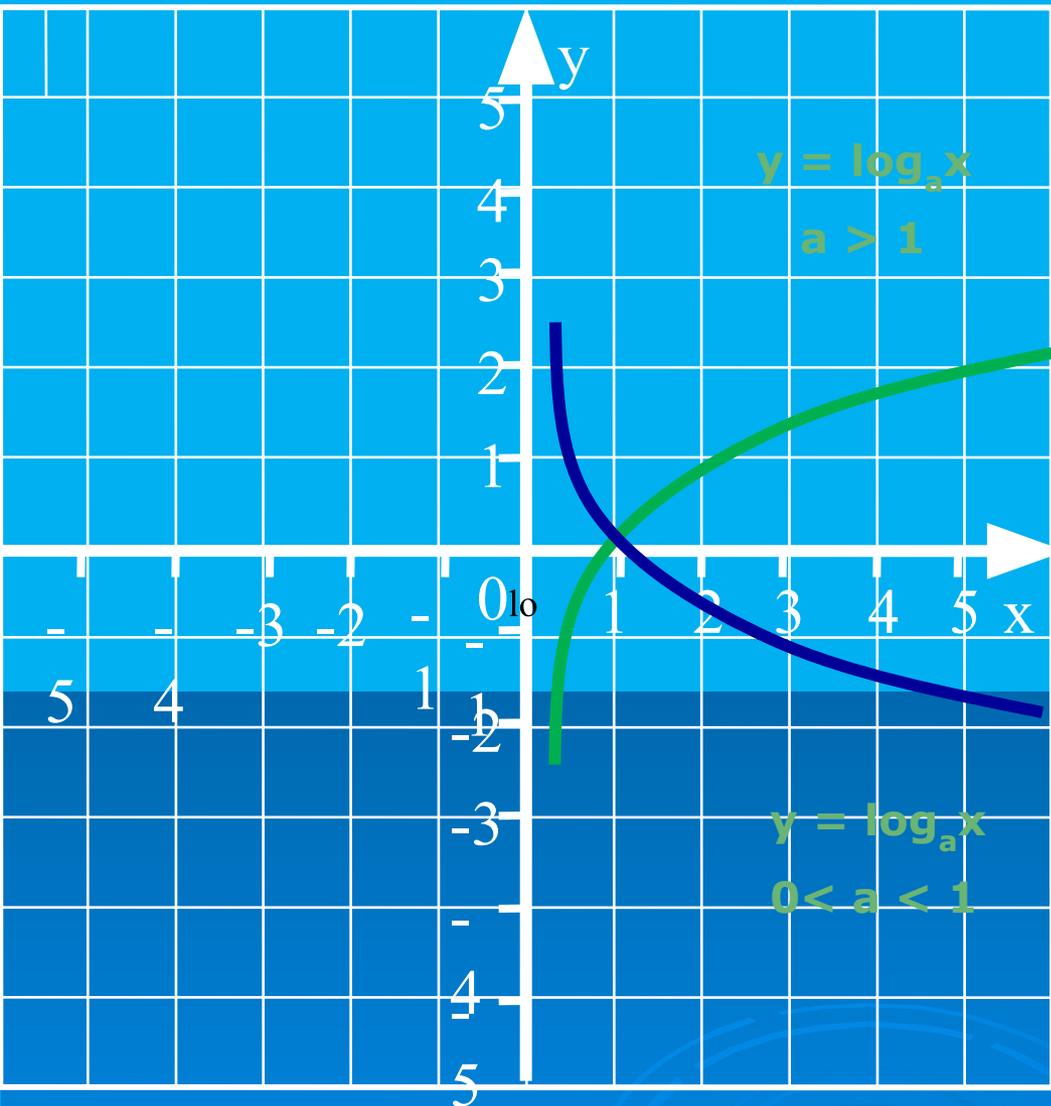


1. Область определения функции:  $D(f) = (0; +\infty)$
2. Область значений функции:  $E(f) = (-\infty; +\infty)$
3. Функция возрастает на всей области определения при  $a > 1$ ; т.е.

$$\log_a x_1 > \log_a x_2, x_1 > x_2$$

3. Функция убывает на всей области определения при  $0 < a < 1$ ; т.е.

$$\log_a x_1 > \log_a x_2, x_1 < x_2$$



4.  $\log_a x_1 = \log_a x_2, x_1 = x_2$

5. Не имеет ни  
наибольшего, ни  
наименьшего значений

6. Непрерывна

7. Не является ни четной,  
ни нечетной

## Алгоритм решения логарифмических уравнений

1. Найти область допустимых значений (ОДЗ) переменной;
2. Решить уравнение выбрав метод;
3. Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение или выяснить удовлетворяют ли эти корни условиям ОДЗ.

$$\log_a f(x) = \log_a F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = F(x), \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

У кошки маленький котеночек подрост.  
— Как дальше быть? — возник вопрос.  
Решила мать, что в пору  
Отдать котенка в школу.

И вот за партой в классе  
Сидит пушистый Вася.

С усердием большим,  
Как приказала мать,

Принялся кот науку постигать.

С терпеньем изучал,  
По пунктам и по темам,  
Строение мышей по графикам и схемам.

Решал он, чуть не плача,

И про бассейн задачу.

Сколь вытечет сметаны,

Когда открыть все краны.

И через 10 лет, науками богат,  
Понес наш кот домой

Из школы аттестат.

И у какой-то горки

Мышонок вылезал из норки.

Но как его схватить?

Нельзя же прыгнуть сразу —

Тут надо применить

Научных знаний базу.

V — скорость, ускоренье — а,

И брызги сыплются с пера.

Затем привел он, глядя в книгу,

К логарифмическому виду.

Потом в системе «це, ге, ес»

Нашел его удельный вес.

Вписал последнюю строку

И приготовился к прыжку.

Пока ученый кот

Над уравнением бился,

Мышонок — неуч

В норке скрылся.

Запомните, друзья, соль истины такой:

Теория мертва без практики живой.

Рассмотрим несколько заданий на применение логарифмов из открытого банка задач ЕГЭ 2013г.

***В задания В3 ЕГЭ включены простейшие логарифмические уравнения***

**АДРЕС САЙТА**

**<http://www.mathege.ru:8080/or/ege/Main>**

**ЗАДАНИЯ В7** включают в себя  
показательно-логарифмические  
выражения.

<http://www.mathege.ru:8080/or/ege/Main>



Решить уравнение  $\log_3(2-x) - \log_3(2+x) - \log_3 x + 1 = 0$

ОДЗ: 
$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 - x > 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\log_3(2-x) + 1 = \log_3(2+x) + \log_3 x$$

$$\log_3(2-x) + \log_3 3 = \log_3(2+x) + \log x$$

$$\log_3(2-x) \cdot 3 = \log_3(2+x) \cdot x$$

$$6 - 3x = 2x + x^2$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x_1 = -6; \quad x_2 = 1$$

$x_1 = -6$  не входит в ОДЗ и является посторонним корнем.

Ответ: 1

### 3) Решить уравнение

$$\log_4(2x - 1) \cdot \log_4 x = 2 \log_4(2x - 1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

Преобразуем данное уравнение

$$\log_4(2x - 1) \cdot \log_4 x - 2 \log_4(2x - 1) = 0$$

$$\log_4(2x - 1) \cdot (\log_4 x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} \log_4(2x - 1) = 0 \\ (\log_4 x - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 4 \\ \log_4 x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 16 \end{cases}$$

Так как корнями уравнения являются значения  $x$  принадлежащие интервалу  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ , то и  $\frac{3}{2}$ , и 16 принадлежат ОДЗ.

Ответ:  $\frac{3}{2}, 16$

## Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ 4y^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x}{y} = \log_2 2 \\ 4y^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ 4y^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 2y - 12 = 0$$

$$D = 4 + 192 = 196$$

$$y_1 = \frac{-2 + 14}{8} = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = \frac{-2 - 14}{8} = -2$$

Так как выражение содержащееся под знаком логарифма должно быть всегда больше нуля, следовательно,  $x > 0$ ,  $y > 0$ , значит  $y_2 = -2$  не является корнем данной системы. Подставим во второе уравнение значение  $y_1 = 3/2$  и решим его.

$$4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + x - 12 = 0$$

$$9 + x - 12 = 0$$

$$x = 3$$

Ответ:  $3/2; 3$

Решить неравенство

$$\log_{1/2}(x^2+2x-8) \geq -4$$

Так как логарифмическая функция с основанием меньшим единицы является убывающей, то для всех

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) < g(x), \\ 0 < a < 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \\ x < -4, x > 2 \end{array} \right.$$

Неравенство можно записать в следующем виде:

$$\log_{1/2}(x^2+2x-8) \geq \log_{1/2} 16$$

Так как логарифмическая функция с основанием  $1/2$  является убывающей, то для всех  $x$  из области определения неравенства получаем  $(x^2+2x-8) \leq 16$

Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ x^2 + 2x - 8 \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ x^2 + 2x - 24 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} (x+4)(x-2) > 0 \\ (x-4)(x+6) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-6; -4) \cup (2; 4]$$

Ответ:  $x \in [-6; 4) \cup (2; 4]$

Решить уравнение типа С3 ЕГЭ

$$(x + 4)\log_4(x + 1) + (4 - x)\log_2(x - 1) - \frac{8}{3}\log(x^2 - 1) = 0$$

$$(x+4)\log_4(x+1) + (4-x)\log_2(x-1) - \frac{8}{3}\log(x-1)(x+1) = 0$$

$$\frac{x+4}{2}\log_2(x+1) + (4-x)\log_2(x-1) - \frac{8}{3}\log_2(x-1) - \frac{8}{3}\log_2(x+1) = 0$$

$$\left(\frac{x+4}{2}\log_2(x+1) - \frac{8}{3}\log_2(x+1)\right) - \left(\frac{8}{3}\log_2(x-1) + (4-x)\log_2(x-1)\right) = 0$$

$$\left(\frac{x+4}{2} - \frac{8}{3}\right)\log_2(x+1) - \left(\frac{8}{3} - (4-x)\right)\log_2(x-1) = 0$$

$$\frac{3x-4}{6}\log_2(x+1) - \frac{3x-4}{3} * \frac{2}{2}\log_2(x-1) = 0$$

$$\frac{3x-4}{6}(\log_2(x+1) - \log_2(x-1)^2) = 0$$

$$\frac{3x-4}{6}\log_2\frac{(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$

**ОДЗ:**  $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

$$\begin{cases} \frac{3x-4}{6} = 0 \\ \log_2\frac{(x+1)}{(x-1)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ \frac{x+1}{(x-1)^2} = 1 \end{cases}$$

$$x+1 = (x-1)^2$$

$$x+1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 3$$

$$x_1 = \frac{4}{3} \in \text{ОДЗ}; x_2 = 0 \notin \text{ОДЗ}; x_3 = 3 \in \text{ОДЗ}$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{3}; 3$$

## Задание типа С4

В треугольнике  $ABC$   $AB=12$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 10$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  так, что  $BD:DC = 2:7$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$ , касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

Докажем сначала утверждение, что если окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его стороны  $CB$  в точке  $F$ , то  $CF = \frac{1}{2}(AC + CB - AB)$

Доказательство. Пусть  $Q$  и  $E$  – точки касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  со сторонами  $AC$  и  $AB$ . Тогда  $QC=CF$ ,  $FB=BE$ ,  $AE=AQ$

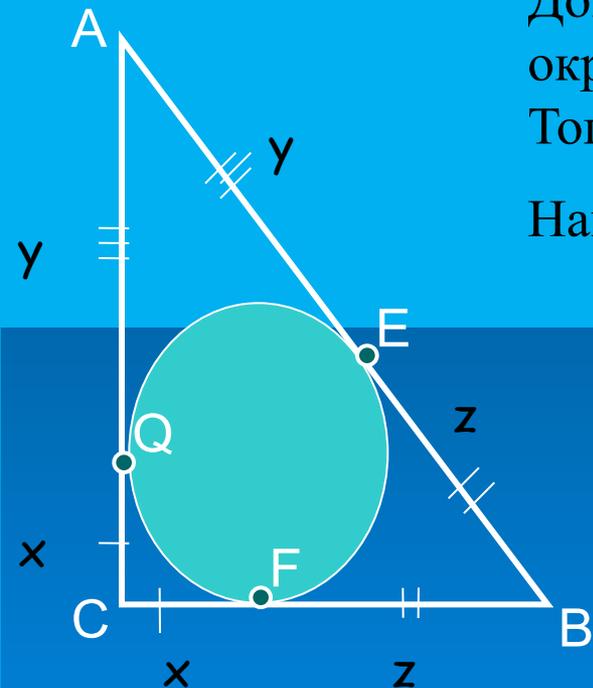
Найдем полупериметр треугольника:

$$p = \frac{2x + 2y + 2z}{2} = x + y + z$$

$$x = p - (y + z)$$

Выразим  $x$  через стороны треугольника, тогда

$$x = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2}$$





# *Из истории.*





Теорию логарифмов  
развил **Дж. Непер**.

Он разработал способы  
вычисления  
арифметических  
выражений с помощью  
логарифмов и составил  
подробные таблицы  
логарифмов.



(1550—1617)



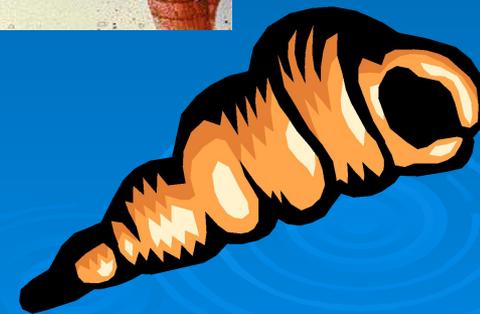
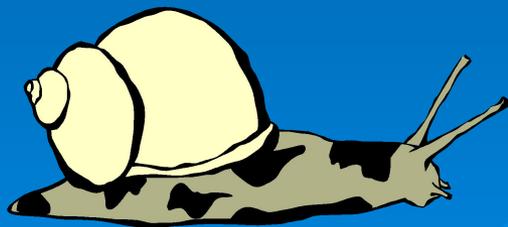
Вот вы когда-нибудь слышали  
О логарифмической спирали?



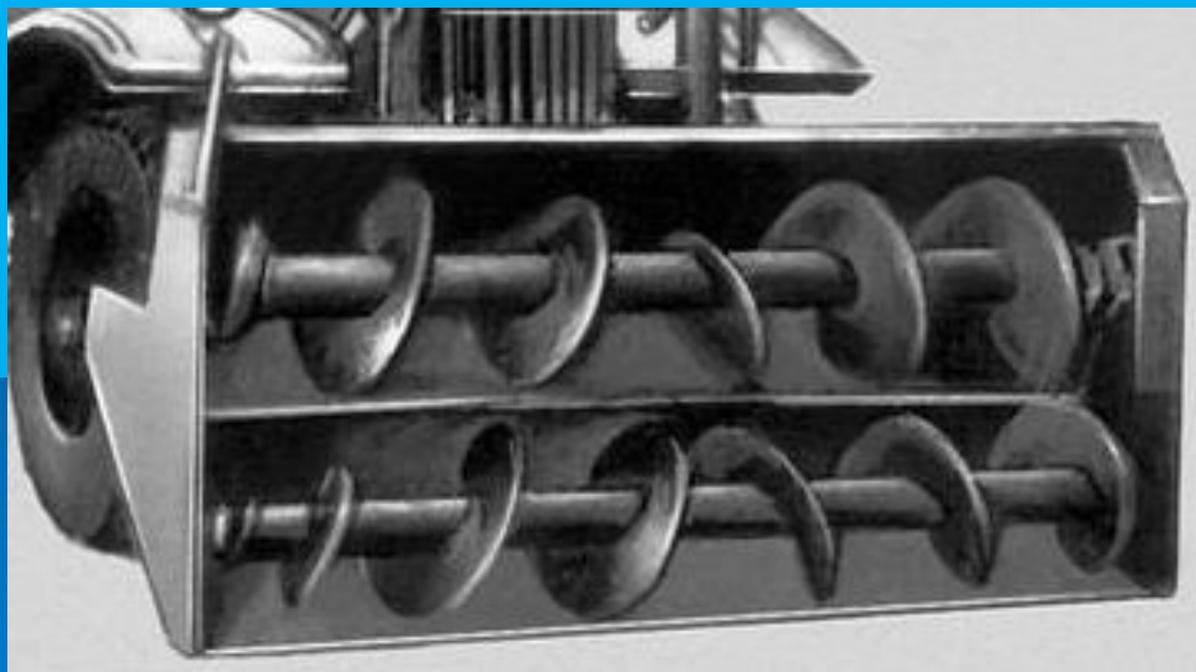
Закручены по ней рога козлов  
И не найдете вы на них нигде узлов.



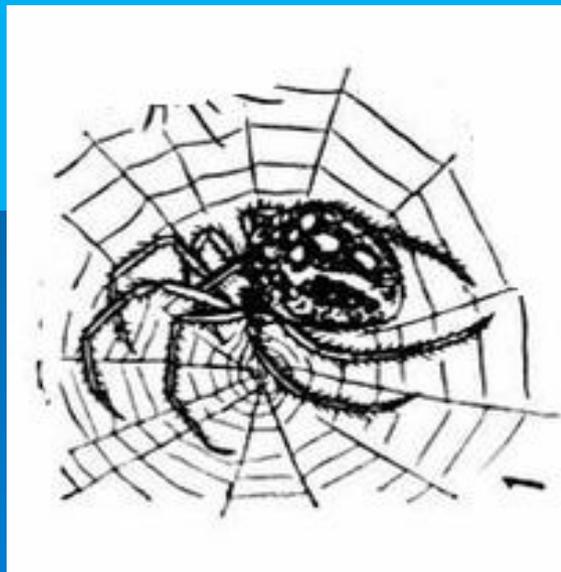
Моллюсков многих и улиток Ракушки тоже все  
завиты.



И эту спираль мы повсюду встречаем:  
К примеру, ножи в механизме вращаем,  
В изгибе трубы мы ее обнаружим,  
Турбины тогда максимально послужат!



В подсолнухе семечки тоже закручены  
И паука все плетенья заучены.  
Наверняка, и о том вы не знали,  
Галактики тоже кружат по спирали!



**Спасибо за урок!**

