Математик а

ГБОУ СПО Пожарно-спасательный колледж «Санкт-Петербургские центр подготовки спасателей»

Методы решения показательных уравнений

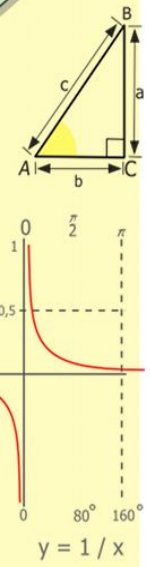
Преподаватель математики:

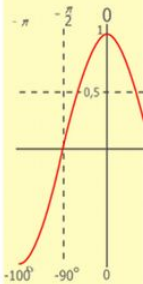
Мисяр Наталья Николаевна

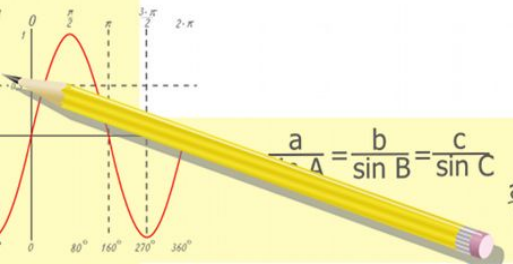
Санкт-Петербург

Показательные уравнения

- Определение
- Способы решения сложных уравнений
- Простейшие уравнения







Определение

Уравнение, в котором переменная содержится в показателе степени, называется ***показательным.***

Примеры:

$5^x=1$

$49^{x+0,5} \cdot 7^{x-2} =1$

$2^{-x}=3^{0,5x}$

$3^x + 3^{3-x} = 12$

Простейшим показательным уравнением является уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием [свойств степени .]

$$a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$$

1) $a^0 = 1$

2) $a^1 = a$

3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

4) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; где $a \neq 0$

5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

6) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; где $b \neq 0$

8) $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$; где $a \neq 0$

9) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n} = \dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$; где $a \neq 0$

10) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$; где $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Решить уравнения:

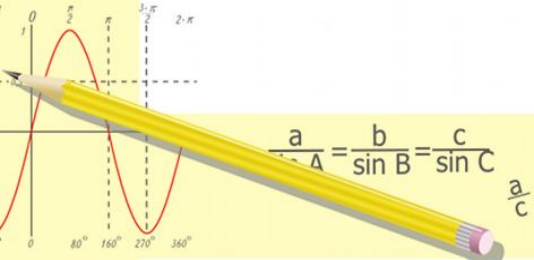
1. $9^{3x} = 27$
2. $5^{7x-9} = 5^{11-3x}$
3. $25 \cdot 5^{x} = 1$
4. $5^{x+2} = 125$
5. $4^{x} = \frac{1}{256}$

$$9^{2x} = \frac{1}{27}$$

$$9^{2x} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{4x} = \frac{3^0}{3^3} \Rightarrow 3^{4x} = 3^{0-3} \Rightarrow 3^{4x} = 3^{-3}$$

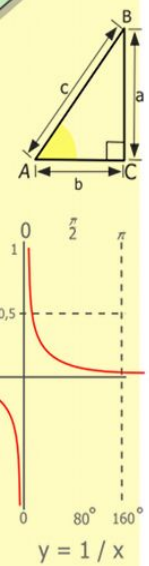
$4x = -3 \Rightarrow x = -3/4 = -0{,}75$

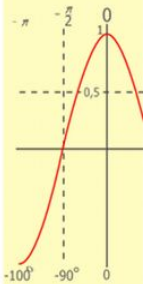
Ответ: -0,75

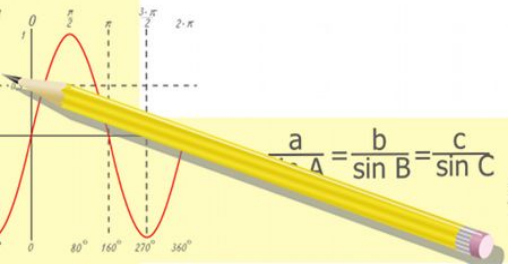


СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

- Деление на показательную функцию
- Графический метод
- Замена переменной
- Вынесение за скобки наименьшего общего множителя







Метод замены переменной

Показательное уравнение сводится к решению квадратного.

Способы замены используют, если:

a) основания степеней одинаковы;

b) показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем другой. Например: $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$;

c) коэффициенты перед переменной противоположны. Например: $2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$.

Решим уравнения

$9^x - 8 \cdot 3^x = 9$

$3^{2x} - 8 \bullet 3^x - 9 = 0$

$3^x = t, (t \boxtimes 0)$

$t^2 - 8 \bullet t - 9 = 0$

$D = 64 + 36 = 100$

$t_1 = \frac{8+10}{2} = 9$

$t_2 = \frac{8-10}{2} = -1,$

$3^u = 9$

$3^u = 3^2$

$x = 2$

$Ответ: x = 2$

$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$

$2^2 \bullet 2^{-x} - 2^x \bullet 2^{-1} = 1$

$\frac{4}{2^x} - \frac{2^x}{2} - 1 = 0$

$2^x = t, (t \boxtimes 0)$

$\frac{4}{t} - \frac{t}{2} - 1 = 0 / \bullet (-2t)$

$t^2 + 2t - 8 = 0$

$D = 4 + 32 = 36$

$t_1 \frac{-2+6}{2} = 2$

$t_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$

$2^x = 2$

$x = 1$

$Ответ: x = 1$

Решить самостоятельно:

$$3^{2x} - 24 \cdot 3^{x} - 81 = 0$$

$$4^{2x} - 3 \cdot 4^{x} - 4 = 0$$

$$2^{2x} - 14 \cdot 2^{x} - 32 = 0$$

$$6^{2x} - 35 \cdot 6^{x} - 36 = 0$$

A) x=2; B) x=3; C) x=1; D)x=3; E) x=4.

Метод вынесения наименьшего общего множителя за скобки.

Этот метод используется, если соблюдаются два условия:

- *основания степеней одинаковые;*
- *коэффициенты перед переменной одинаковые.*

Например: $2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$

Решим уравнения:

$$2^{x+1} - 2^{x+3} = -12$$

$$2^{x+1} \bullet \left(1 - 2^2\right) = -12$$

$$2^{x+1} \bullet (-3) = -12$$

$$2^{x+1} = 4$$

$$2^{x+1} = 2^2$$

$$x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

$$Ответ: x = 1$$

$$3 \cdot 5^{x-2} + 5^{x-1} = 200$$

$$5^{x-2} \bullet (3 + 5) = 200$$

$$5^{x-2} \bullet 8 = 200$$

$$5^{x-2} = 25$$

$$5^{x-2} = 5^2$$

$$x - 2 = 2$$

$$x = 4$$

$$Ответ: x = 4$$

Примеры:

$$4^{x+2} - 4^{x+5} = -252$$

$$2^{3x+2} - 2^{3x-2} - 2^{3x-1} = 208$$

$$2^{3x+2} + 3 \cdot 2^{3x-2} - 5 \cdot 2^{3x+1} = -336$$

$$3^{x+1} + 2^{2x+1} = -20 \cdot 2^{2x} + 3^{x+2}$$

$$5^{x-1} - 3 \cdot 5^{x+1} = -370$$

Деление на показательную функцию

Этот способ используется, если основания степеней разные:

a) в уравнении вида $a^x = b^x$ делим на b^x

Например: $4^x = 7^x \mid : 7^x$

b) в уравнении A a^{2x} + B $(ab)^x$ + C $b^{2x} = 0$ делим на b^{2x}.

Например:

$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$

Решим уравнения:

$$3\cdot 25^x - 8\cdot 15^x + 5\cdot 9^x = 0 : 9^x$$

$$\frac{3\cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - \frac{8\cdot 5^x\cdot 3^x}{3^{2x}} + 5 = 0$$

$$3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x} + 5 = 0$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^{x} \quad (t > 0)$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4\cdot 3\cdot 5 = 4 = 2^2$$

$$t_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \qquad t_2 = \frac{8-2}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \frac{5}{3}$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{0}$$

$$x = 0$$

Ответ: 0; 1

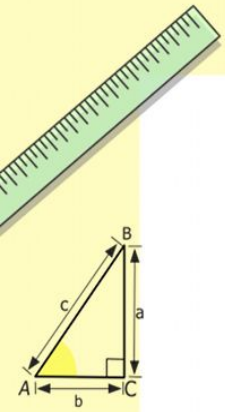
Примеры:

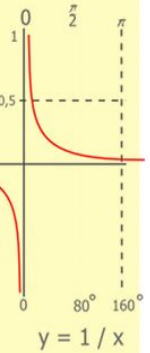
$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$$

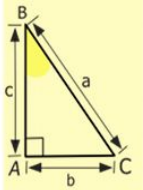
$$7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$$

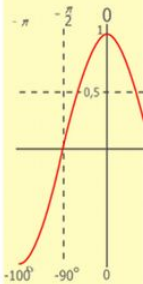
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x.$$

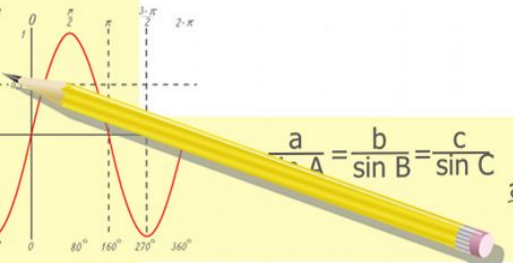
$$3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x.$$











Графический метод

Метод основан на использовании графических иллюстраций, или каких-либо свойств функций.

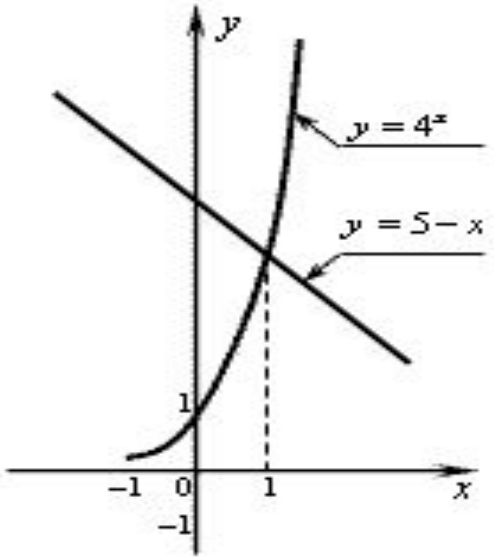
- Решите уравнение $4^x = 5 - x$

Построим в одной системе координат графики функций

$y = 4^x$ и $y = 5 - x$.

x	-2	-1	0	1	2
y	1/16	1/4	1	4	16

x	0	1
y	5	4



Они пересекаются в одной точке (1; 4).

Ответ: 1.

Домашнее задание

Вариант I

Решите уравнение: $4^{x-4} = 0,5$

Найти корень уравнения: $\left(\frac{6}{5}\right)^{x^2+27(x-1)} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-9x^2}$

Решите уравнение $5^x - 5^{3-x} = 20$

Решите уравнение: $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x+3} + 49^{x-1} + 7^{2x-1} = 399$

Решите уравнение $4 \cdot 9^x + 12^x - 3 \cdot 16^x = 0$

Вариант II

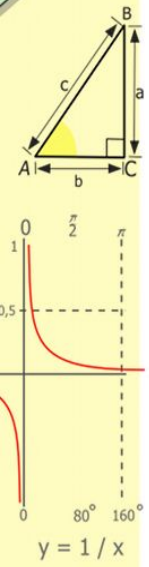
Решите уравнение $(3,5)^{x-5} = \left(\frac{4}{49}\right)^2$

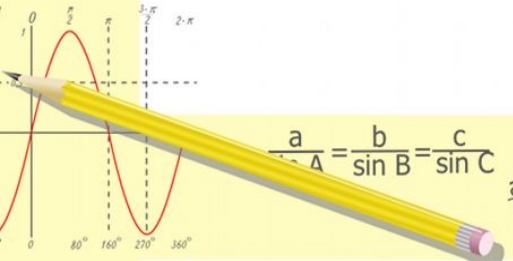
Решите уравнение: $\left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{5}\right)^x = 2\sqrt{2}$

Решите уравнение $5^x - 24 = 5^{2-x}$.

Решите уравнение $6 \cdot 9^{0,5x-2} + 2 \cdot 3^{x-6} = 56$.

Решите уравнение $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$.





Литература:

1. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов Ш.А. Алимов и др. — 15-е изд. — М.: Просвещение, 2007

2. Система тренировочных задач и упражнений по математике/А.Я. Симонов, Д.С.Бакаев, А.Г.Эпельман и др.-М.: Просвещение, 1991

3. http://rudocs.exdat.com/docs/index-17520.html - ***Классен Светлана Викторовна***

4. http://www.uztest.ru/ - Ким Наталья Анатольевна