Теорема Эйлера и правильные многогранники

Автор: **Макарова Татьяна Павловна,**

учитель математики

ГБОУ средней общеобразовательной школы №618

г. Москвы

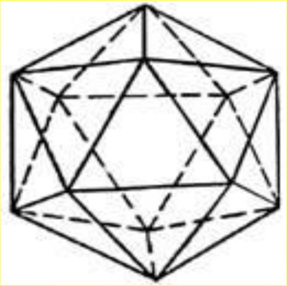
Предмет: геометрия

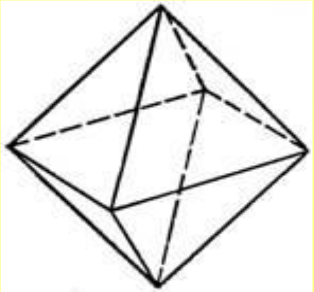
Контингент: 10 класс

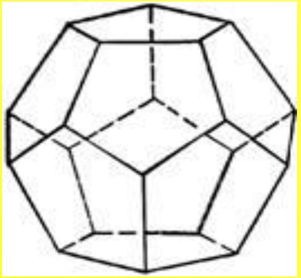
Учебник: Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., С.Б. Кардомцев и др. Геометрия: учебник для 10-11 кл. общеобр. учр.- М.: Просвещение, 2012.

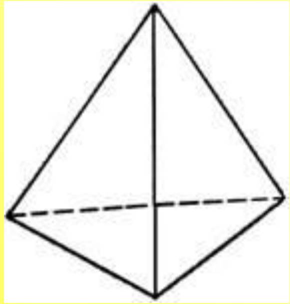
Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук

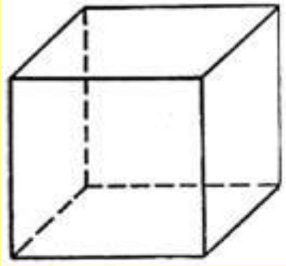
Л. Кэрролл









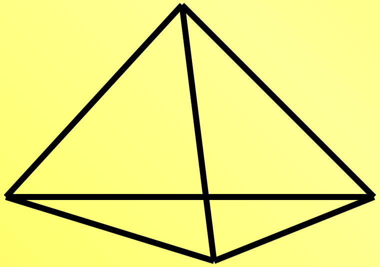


Цель:

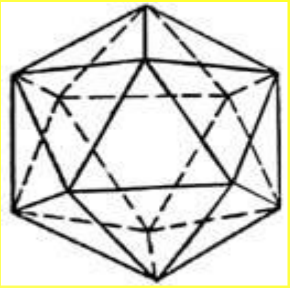
- Изучить классификацию правильных многогранников и их свойства
- Проанализировать связь геометрии, теории чисел и алгебры
- Применять теорему Эйлера к решению задач
- Развить представления о многогранниках и мире

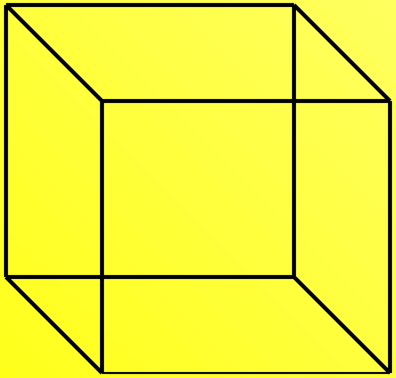
Правильные многогранники

Тетраэдр

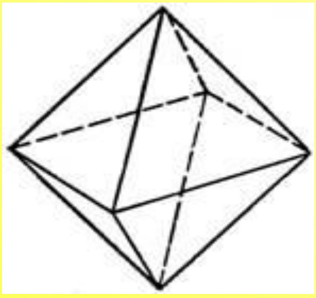


Икосаэдр

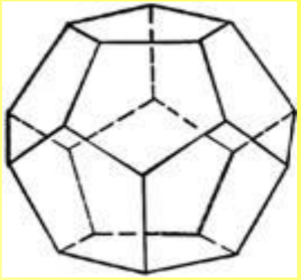




Гексаэдр



Октаэдр

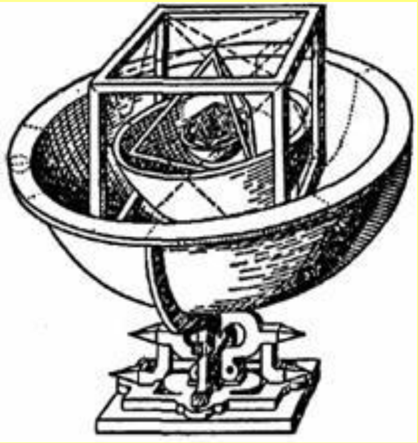


Додекаэдр

Многогранники и научные фантазии ученых

- Правильные многогранники в философской картине мира Платона
- Кубок Кеплера
- Икосаэдро–додекаэдровая структура Земли

Кубок Кеплера



Сфера орбиты Сатурна

Куб

Сфера орбиты Юпитера

Тетраэдр

Сфера орбиты Марса

Додекаэдр

Сфера орбиты Земли

Икосаэдр

Сфера орбиты Венеры

Октаэдр

Сфера орбиты Меркурия

Исследовательская часть

Таблица 1

Правильный многогранник	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Таблица 2

Правильный многогранник	Число	
	граней и вершин (Г + В)	рёбер (Р)
Тетраэдр	4 + 4 = 8	6
Куб	6 + 8 = 14	12
Октаэдр	8 + 6 = 14	12
Додекаэдр	12 + 20 = 32	30
Икосаэдр	20 + 12 = 32	30

Леонард Эйлер

(1701-1783)

Немецкий математик и физик

Формула Эйлера

(для правильных многогранников)

Г+В-Р=2

Выпуклый многогранник называется *комбинаторно правильным*, если все его грани имеют одинаковое число сторон (m) и все его вершины имеют одинаковую степень (n).

Будем считать, что Комбинаторно правильный многогранник имеет тип (m, n), если каждая его грань является m–угольником, а степень каждой вершины равна n.

Зная, что m, n = или 3, или 4, или 5, отсюда следует то, что может существовать девять различных пар (m,n):

(3,3) (3,4) (3,5) (4,3) (4,4) (4,5) (5,3) (5,4) (5,5)

Решая систему уравнений $В - Р + Г = 2$, $2Р = mГ$, $2Р = nВ$ относительно чисел $В$, $Р$ и $Г$, получаем:

$$B = \frac{4m}{2m + 2n - mn}$$

$$P = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}$$

$$\Gamma = \frac{4n}{2m + 2n - mn}$$

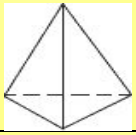
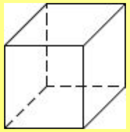
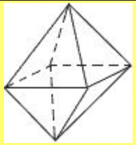
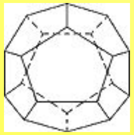
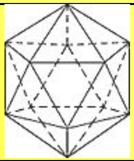
Так как $В, Г, Р > 0$ отсюда следует, что $2m+2n-mn>0$ или :

$$(m-2)(n-2)<4$$

Из всех девяти пар чисел *(m, n)* неравенству удовлетворяют только следующие пять:

(3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5).

Таблица 4

Название многогранника		*m*	*n*	*В*	*Р*	*Г*
Тетраэдр		3	3	4	6	4
Гексаэдр		4	3	8	12	6
Октаэдр		3	4	6	12	8
Додекаэдр		5	3	20	30	12
Икосаэдр		3	5	12	30	20

Применение теоремы Эйлера при решении задач

Задача 1. Футбольный мяч шьется из кусков кожи двух типов: пятиугольных и шестиугольных (которые, кроме формы, отличаются еще и цветом). Можно ли сшить мяч из одних только шестиугольных кусков?

Решение:

Мяч можно рассматривать как сферу, разбитую на сферические грани — многоугольники. При этом выполнены соотношения : $В - Р + Г = 2$; $Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + \ldots$; $В = В_3 + В_4 + \ldots В_m$; $2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots$; $2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots$

и все следствия из них, в частности, неравенство:

$$3Г_3 + 2Г_4 + Г_5 \geq 12.$$

Из него заключаем, что мяч нельзя сшить только из шестиугольных кусков.

Ответ: нет, нельзя.

Задача 2. Если все грани многогранника – треугольники, то число граней четное. Кроме того, в этом случае $Р = 3В – 6$, $Г = 2В – 4$.

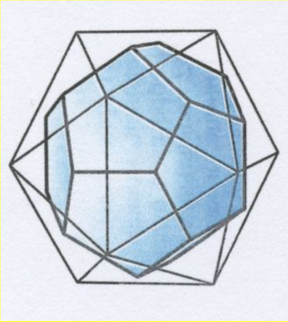
Решение:

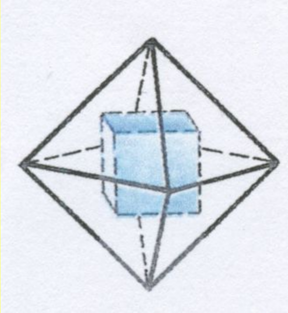
Из условия задачи и из равенства $2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots$ имеем $2Р = 3Г$, откуда следует первое утверждение. Исключая из равенств $В – Р + Г = 2$ и $2Р = 3Г$ сначала $Г$, затем $Р$, получим требуемые равенства:

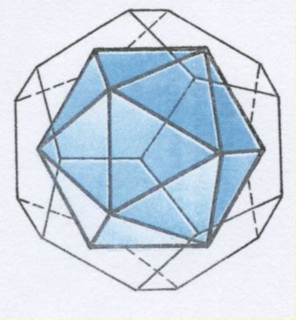
$Р = 3В – 6$, $Г = 2В – 4$.

Основные свойства

- Двойственность
- Наличие 3 сфер: вписанной, описанной и касающейся всех ребер правильного многогранника







Практическая часть

Расчет объема додекаэдра

Объем додекаэдра равен:

$$V = \frac{1}{3} S_{полн} \cdot r = \frac{1}{3} \cdot 12 S_5 \cdot r = 4 \cdot S_5 \cdot r$$

Где S_5 – площадь правильного пятиугольника

$$S_5 = \frac{5a^2}{4tg36^{\circ}}$$

Найдем значение *tg* 36° в радианах:

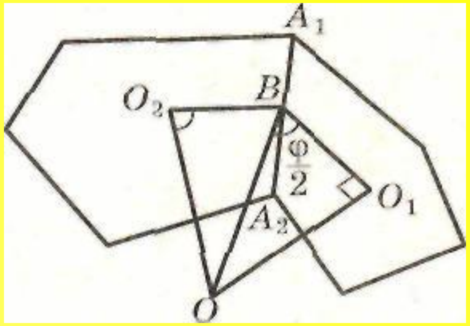
$$tg36^{\circ} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Подставив это значение, получим значение для S_5:

$$S_5 = \frac{5a^2}{4\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$

Найдем r :

Изобразим фрагмент додекаэдра: биссектор угла с ребром A_1A_2 перпендикулярен плоскости (O_1O_2O), $\angle O_1BO_2$ — линейный угол двугранного угла с ребром A_1A_2, BO — его биссектриса.

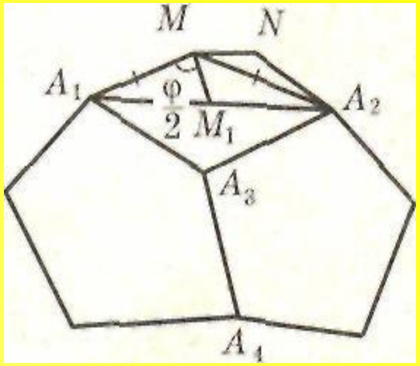


$OO_1 = OO_2 = r$, $BO_1 = BO_2 = r_0$, где r_0 — радиус окружности, вписанной в грань. Тогда

$$r = r_0 tg\frac{\varphi}{2}$$

очевидно (из треугольника O_1OB).

Найдем $\frac{\varphi}{2}$:



A_1A_2 — диагональ грани, $A_1M \perp A_3A_4$, $A_2M \perp A_3A_4$. $\angle A_1MA_2 = \phi$ — искомый, A_1M — расстояние от вершины A_1 до стороны A_3A_4. M_1 — середина A_1A_2 и так как треугольник A_1MA_2 — равнобедренный, то

$$\angle A_1MM_1 = \frac{\varphi}{2}$$

Но $d = 2a \cos 36°$,то есть

$$A_1M_1 = d/2 = a \cos 36° = a(1+\sqrt{5})/4.$$

Из прямоугольного треугольника A_1MA_3 имеем $A_1M = A_1A_3 \sin 72°$.

То есть:

$$A_1M = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{8} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Из прямоугольного треугольника A_1MM_1:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{A_1M_1}{A_1M} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

Найдем $\cos\frac{\varphi}{2}$:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

Осталось найти $tg\frac{\varphi}{2}$:

$$tg\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

В итоге:

$$r = \frac{a}{2tg36^{\circ}} \cdot tg\frac{\varphi}{2} = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

Окончательно:

$$V = \frac{a^{3}\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}.$$

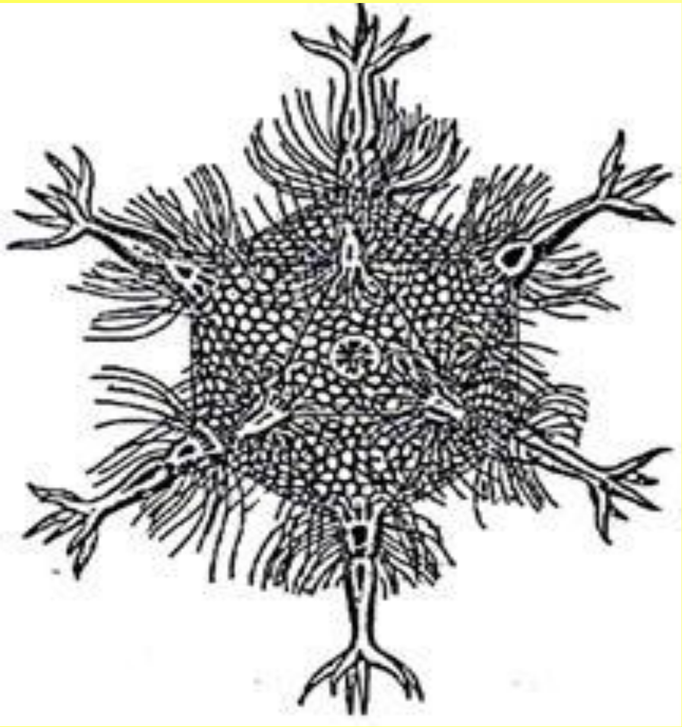
Ответ: $V=a^3(15+7\sqrt{5})/4$

Таблица 5

Многогранник	Объем	Площадь поверхности
Тетраэдр	$V = (a^3\sqrt{2})/12$	$S = a^2\sqrt{3}$
Куб	$V = a^3$	$S = 6a^2$
Октаэдр	$V = (a^3\sqrt{2})/3$	$S = 2a^2\sqrt{3}$
Додекаэдр	$V = a^3(15+7\sqrt{5})/4$	$S = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
Икосаэдр	$V = 5a^3(3+\sqrt{5})/12$	$S = 5a^2\sqrt{3}$

Многогранники и живая природа

Феодария



Скелет этих одноклеточных организмов по форме напоминает икосаэдр. Такая форма помогает феодариям преодолевать давление водной толщи.

Итоги работы

- Невозможность существования иных правильных выпуклых многогранников
- Систематизированы свойства правильных многогранников
- Топология – теорема Эйлера – геометрия
- Применение при решении задач
- Неживая природа – правильные многогранники – живая природа

Используемая литература

- 1. Смирнова И.М. В мире многогранников. -М, 2010.
- 2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., С.Б. Кардомцев и др. Геометрия: учебник для 10-11 кл. общеобр. учр.- М.: Просвещение, 2012.
- 3. http://virlib-old.eunnet/
- 4. http://school.techno.ru
- 5. http://tmn.fio.ru

Спасибо за внимание!