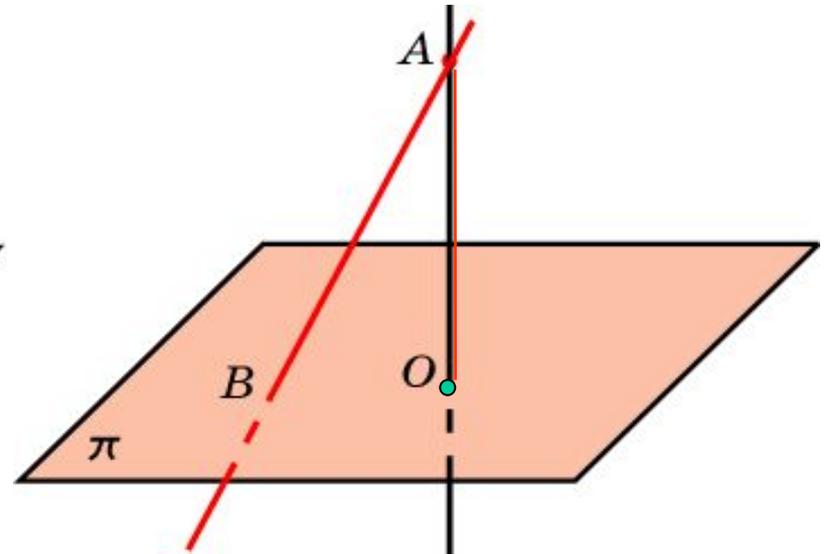
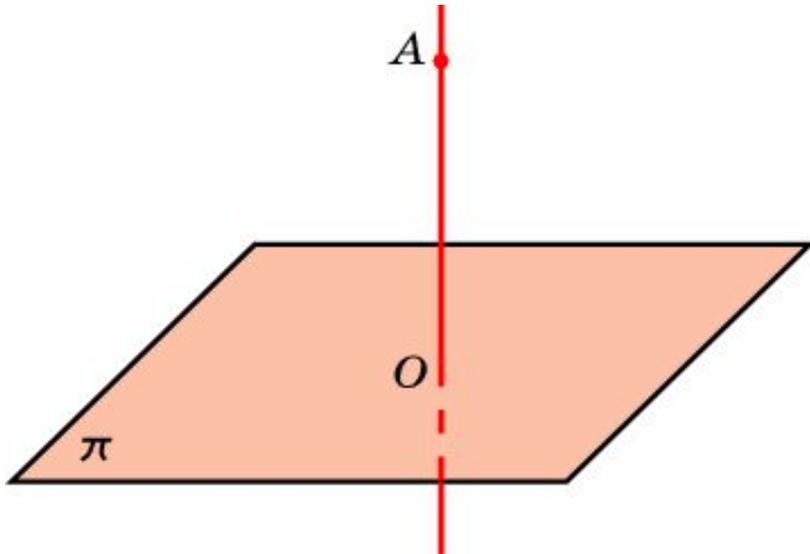


## ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

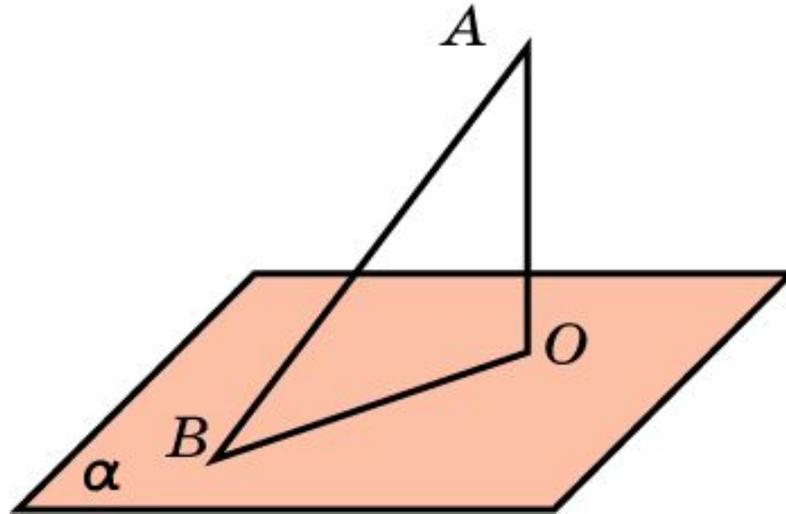
Пусть точка  $A$  не принадлежит плоскости  $\pi$ . Проведем прямую  $a$ , проходящую через эту точку и перпендикулярную  $\pi$ . Точку пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\pi$  обозначим  $O$ . Отрезок  $AO$  называется **перпендикуляром**, опущенным из точки  $A$  на плоскость  $\pi$ .



**Наклонной** к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

## Теорема о перпендикуляре и наклонной

**Теорема.** Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.

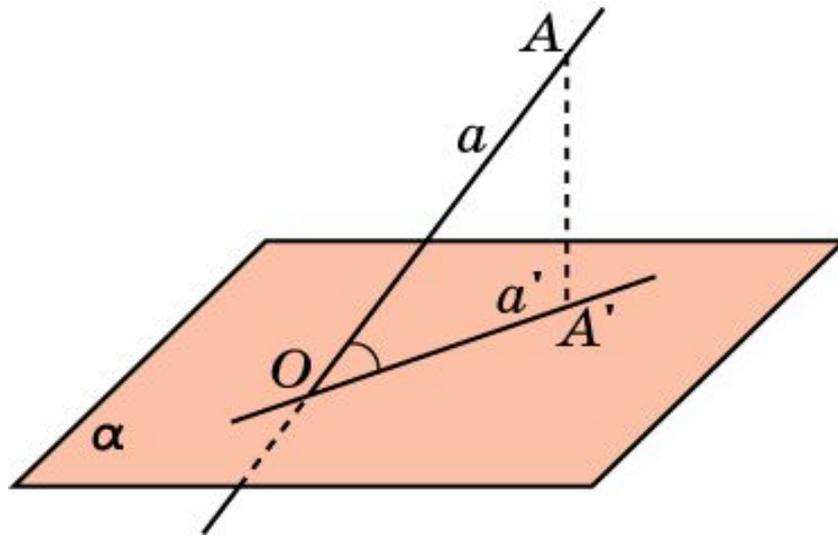


**Доказательство.** Пусть  $AB$  – наклонная к плоскости  $\alpha$ ,  $AO$  – перпендикуляр, опущенный на эту плоскость,  $OB$  – ортогональная проекция. Треугольник  $AOB$  прямоугольный,  $AB$  – гипотенуза,  $AO$  – катет. Следовательно,  $AO < AB$ .

# УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

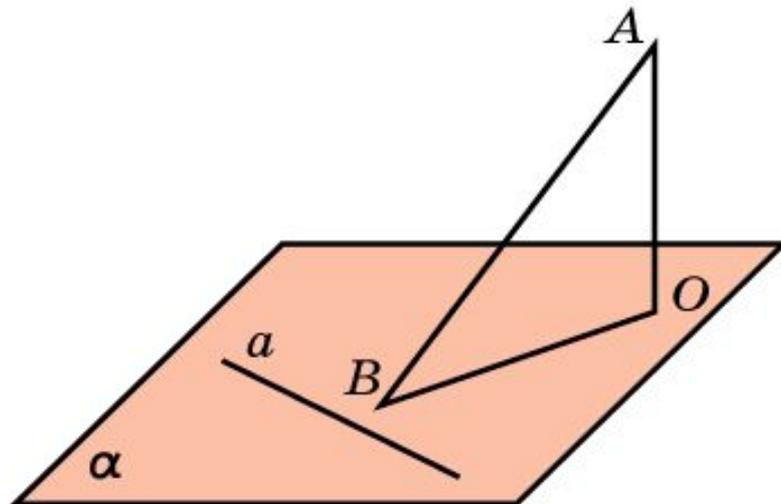
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.

Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.



# Теорема о трех перпендикулярах

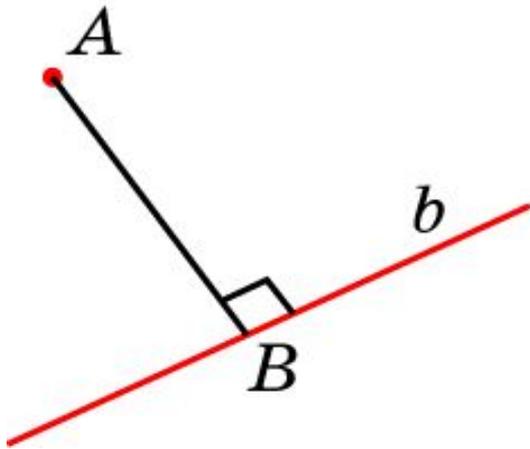
**Теорема.** Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.



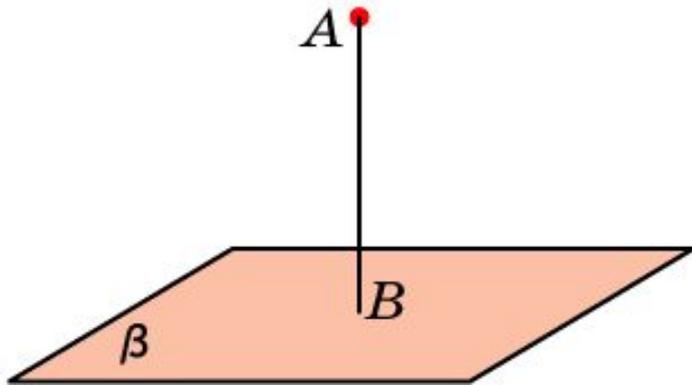
Дано:  
 $AO \perp \alpha$ ,  
 $a \in \alpha, a \perp OB$   
Д-ть:  $a \perp AB$

**Доказательство.** Т.к.  $AO$  - перпендикуляр к плоскости  $\alpha$ , то  $AO$  перпендикулярна прямой  $a$  плоскости  $\alpha$ . Прямая  $a$  плоскости  $\alpha$  перпендикулярна проекции  $OB$  наклонной  $AB$ . Тогда она будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $OB$  и  $AO$ . По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $AOB$  и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной  $AB$ , принадлежащей этой плоскости.

# РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



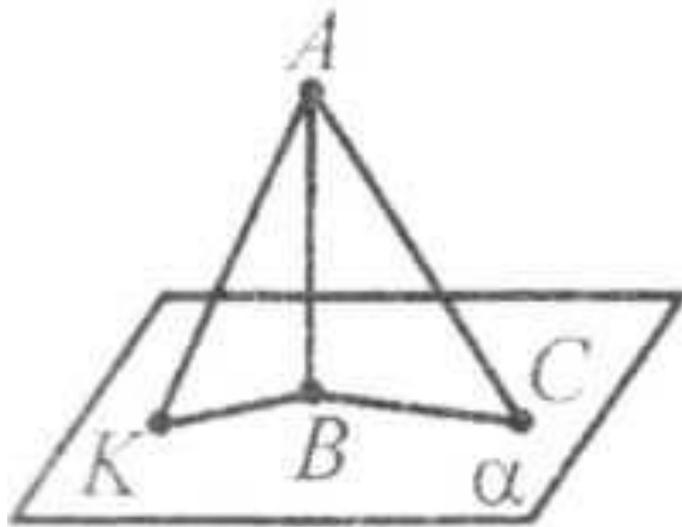
Расстоянием от точки до прямой в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.



Расстоянием от точки до плоскости в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

## Упражнение 1

**Верно ли утверждение:** «Если из одной точки, не принадлежащей плоскости, проведены к ней две равные наклонные, то их проекции тоже равны»?



*Дано :*

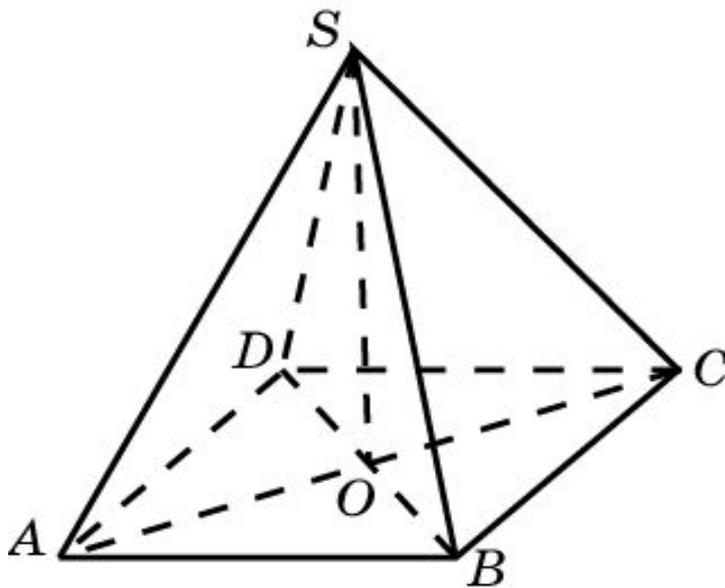
$$AB \perp \alpha, AK = AC$$

$$\text{Д - ть : } KB = BC$$

**Ответ:** Да.

## Упражнение 2

К плоскости прямоугольника  $ABCD$  в точке пересечения диагоналей восстановлен перпендикуляр. Верно ли утверждение о том, что произвольная точка  $S$  этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника?



Дано :

$SO \perp ABCD$ ,

$ABCD$  – прямоугольник

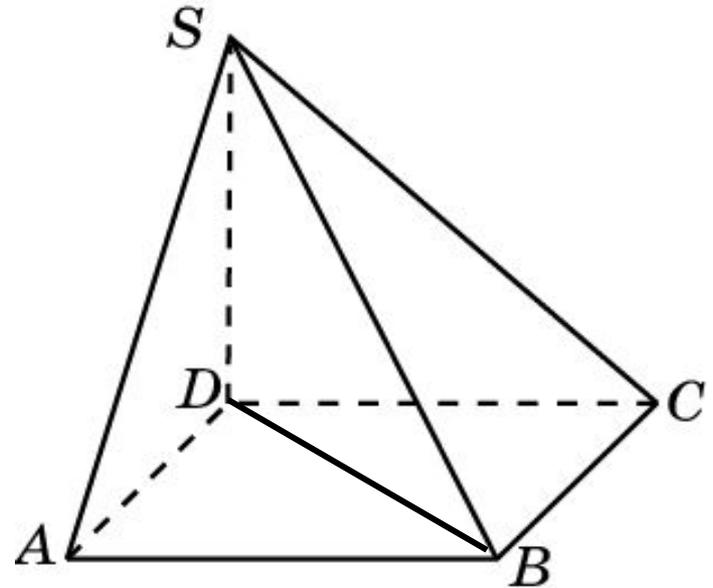
Д - ть :  $AS = BS = CS = DS$

Ответ: Да.

№45.13

Основание  $ABCD$  пирамиды  $SABCD$  – прямоугольник,  $AB < BC$ . Ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  укажите наименьший и наибольший.

Укажите все прямые углы.



**Ответ:**  $SD$  – наименьший;  $SB$  – наибольший.

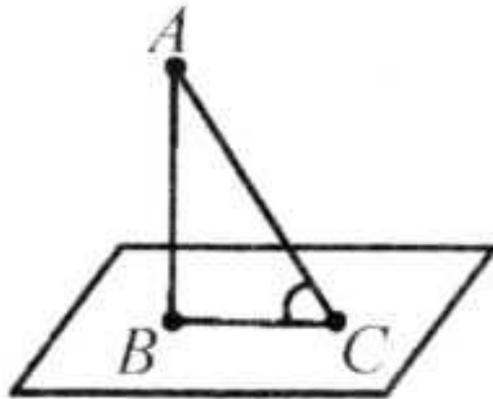
$\angle SDC, \angle SDA, \angle ADC, \angle SDB,$

$\angle DAB, \angle SAB,$

$\angle DCB, \angle SCB, \angle ABC$

## Упражнение 3

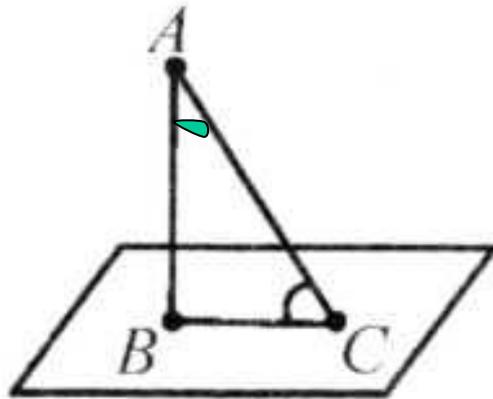
Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите проекцию отрезка  $AC$ , если  $AC = 37$  см,  $AB = 35$  см.



**Ответ:** 12 см.

## №45.15 – из д/з

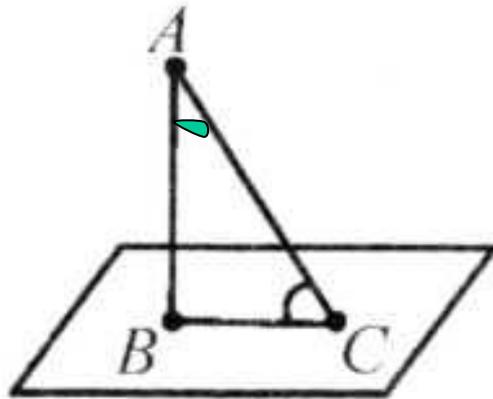
Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите отрезок  $AC$ , если  $AB = 6$  см,  $\angle BAC = 60^\circ$ .



**Ответ:** 12 см.

## №45.16 –д/з

Из точки  $A$  к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках  $B$  и  $C$ . Найдите отрезок  $AB$ , если  $AC = 2\sqrt{10}$  см,  $BC = 3AB$ .



Комментарий:

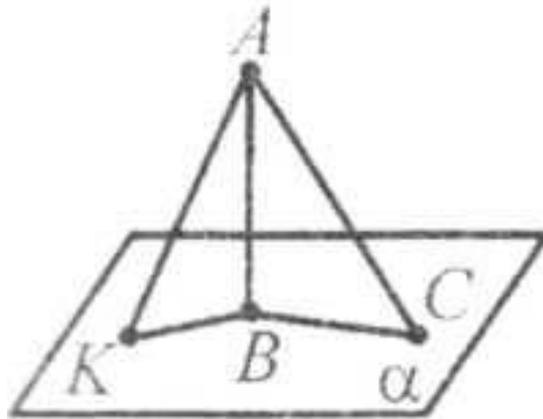
$$AB^2 = AC^2 - BC^2,$$

$$AB^2 = (2\sqrt{10})^2 - (3AB)^2.$$

**Ответ:** 2 см.

## №45.17

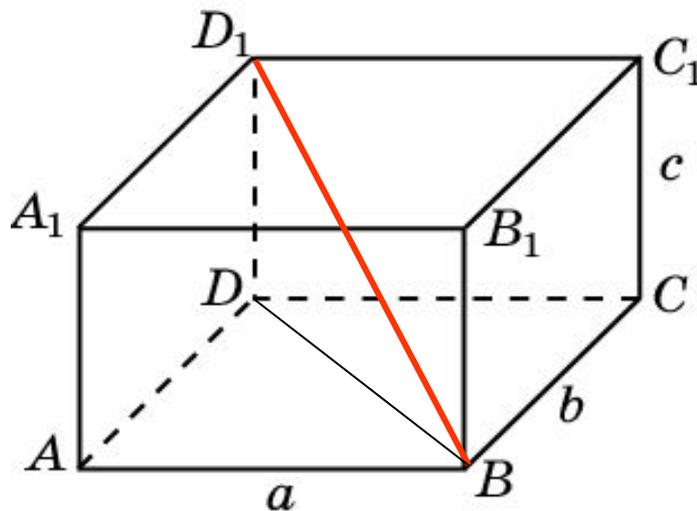
Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.



**Ответ:** 9 см.

## Упражнение 5

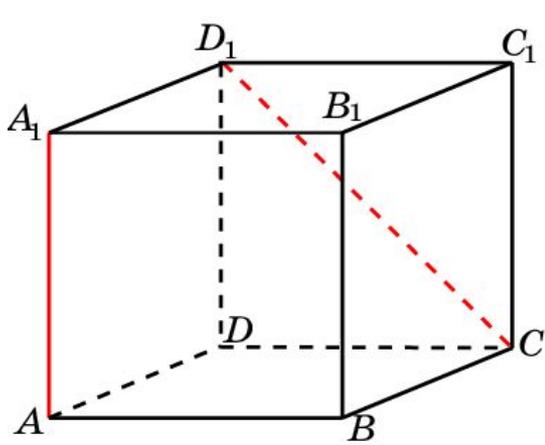
Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .



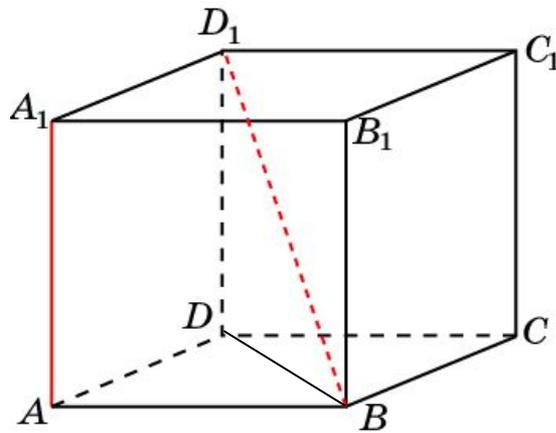
Ответ:  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

## Упражнение 6

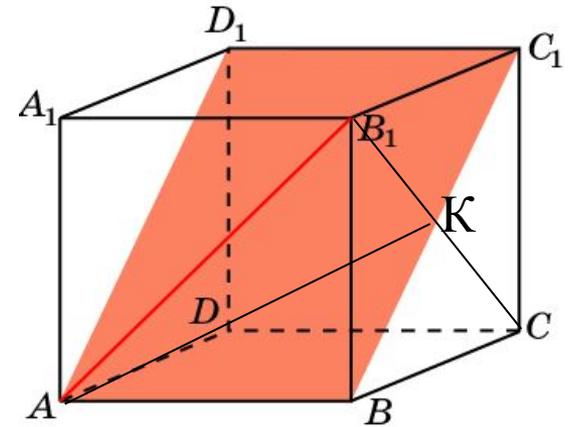
В кубе найдите угол между: а) диагональю боковой грани и плоскостью основания; б) диагональю куба и плоскостью основания; в) диагональю боковой грани и диагональным сечением.



а)



б)

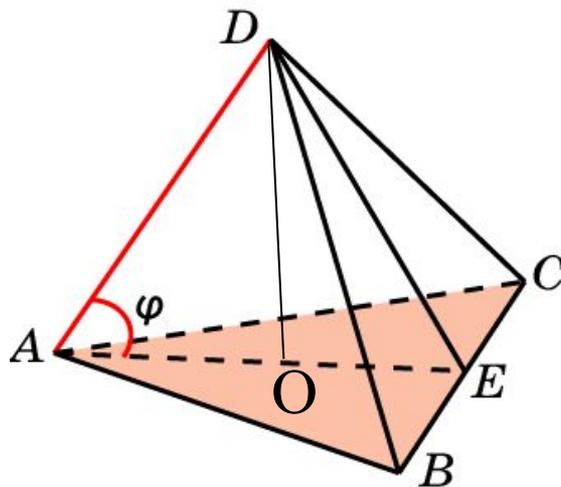


в)

Ответ: а)  $45^\circ$ ; б)  $\sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $30^\circ$ .

## Упражнение 4 (Пример 2. с. 362)

В правильном тетраэдре  $ABCD$  найдите угол между прямой  $AD$  и плоскостью  $ABC$ .



**Решение.** Пусть  $E$  – середина ребра  $BC$ . Искомый угол  $\varphi$  равен углу  $DAE$ . В треугольнике  $DAE$  имеем:  $AD = a$ ,  $AE = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

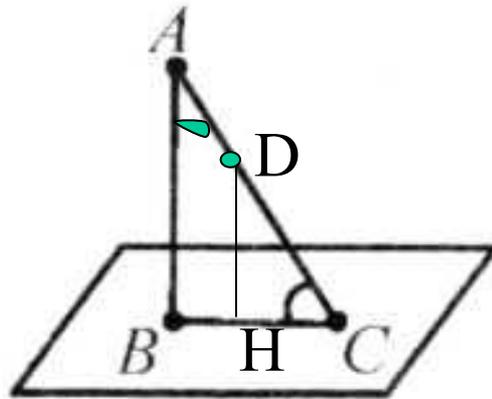
Используя теорему косинусов, получим  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**2 способ**  $DO \perp ABC$ ,  $AO = \frac{2}{3}AE$ ,  $\cos \varphi = \frac{AO}{AD} = \frac{2a\sqrt{3}}{2 \cdot 3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Ответ:**  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

## Упражнение 7 (Пример 3. с. 362)

Отрезок  $BC$  длиной 12 см является проекцией отрезка  $AC$  на плоскость  $\alpha$ . Точка  $D$  принадлежит отрезку  $AC$  и  $AD:DC = 2:3$ . Найдите отрезок  $AD$  и его проекцию на плоскость  $\alpha$ , если известно, что  $AB = 9$  см.



**Ответ:** 6 см; 4,8 см.

## Упражнение 8

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна  $a$ , а боковое ребро  $b$ . Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Ответ:  $\cos \phi = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$ .

## Упражнение 9

Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол  $30^\circ$ . Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

Ответ:  $45^\circ$ .

## №45.18

Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ , катеты которого  $AC$  и  $BC$  равны соответственно 20 и 15 см. Через вершину  $A$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BC$ . Проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

Ответ:  $3\sqrt{41}$  см.

## №45.19

Сторона ромба равна  $a$ , острый угол  $60^\circ$ . Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Проекция другой стороны на эту плоскость равна  $b$ . Найдите проекции диагоналей ромба.

Ответ:  $b$  и  $\sqrt{2a^2 + b^2}$  .