Знакомство с вероятностью

- В *часто происходящих* **случайных явлениях** существуют определенные *закономерности.*
- Задача теории вероятностей – **установление и математическое исследование** *закономерностей массовых случайных явлений.*

Методы.

- Эксперимент.
- Математические расчеты.

Эксперимент.

- Подбрасывание монеты.

N – число подбрасываний

F – число выпадений «орла» (частота события)

F/N – относительная частота события.

При увеличении N относительная частота F/N стремится к ½.

½ называют вероятностью рассматриваемого события.

Элементарные события (исходы) обозначаются А,В,С…

Бросаем игральный кубик.

- 1,2,3,4,5,6 – **случайные события**
- Одно из чисел - **достоверное событие**
- 7 – **невозможное событие**
- 1и2 одновременно – **несовместные события**
- Выпадение одного из 1,2,3,4,5,6 - **единственно возможное событие**
- Выпадение 1или 2 – **равновозможные события**

Соотнеси событие с его определением

- **Достоверное**
- **невозможное**
- **несовместные события**
- **единственно возможное событие**
- **равновозможные события**
- **случайное**

- **Сталь в жидком состоянии в комнате при нормальном давлении**
- **Поступление по результатам ЕГЭ**
- **Вынутая из кошелька наугад монета – пятирублевая**
- **«2»по русскому и математике на ЕГЭ и получение аттестата**
- **Наугад названное натуральное число больше нуля**
- **Выпадет «орел» или «решка»**

Приведите по одному примеру на каждое определение

Бросаем игральный кубик.

- А – выпадение четного числа очков при одном бросании
- Событие наступит, если выпадет 2, 4 или 6
- Три элементарных события являются ***благоприятствующими*** для события А

Какое событие более вероятно:

- ***появление четного числа очков***
- ***появление нечетного числа очков***
- ***появление единицы***
- ***появление натурального числа очков***
- ***появление нуля***

Вероятность события – количественная характеристика его наступления.

Определение:

Пусть n – число всех элементарных исходов события А,

m– число благоприятствующих для А исходов.

Р(А) – вероятность события определяется по формуле:

$$P(A)=m/n$$

Следствия:

Вероятность достоверного события равна 1 (m=n)

Вероятность невозможного события равна о (m=о)

Задачи.

- **Какова вероятность выпадения четного числа очков при одном бросании кубика?**

А - выпадение четного числа очков

m=3 - число благоприятствующих для А исходов.

n=6 - число всех элементарных исходов события А

P(A)=m/n=3/6=1/2

- Какова вероятность выпадения числа, кратного 3, в результате бросания кубика?

m= n= P(A)=m/n=

- Какова вероятность того, что на открытом наугад листе нового отрывного календаря на високосный год окажется 5ое число?

m= n= P(A)=m/n=

- Вы забыли последнюю цифру номера телефона и набрали ее наугад. Какова вероятность того, что вы ее правильно набрали?

m= n= P(A)=m/n=

В коробке находятся 3 черных, 4 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимается 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар:

- Черный
- Белый
- Красный
- Черный или красный
- Красный или белый
- Черный, или белый, или красный
- Зеленый?

- m= n= P(A)=m/n=
- m= n= P(A)=m/n=
- m= n= P(A)=m/n=
- m= n= P(A)=m/n=
- m= n= P(A)=m/n=
- m= n= P(A)=m/n=
- m= n= P(A)=m/n=

- Найти вероятность того, что при бросании кубика выпадет «5» или «6»

A - выпадение «5» или «6»

m=2 - число благоприятствующих для A исходов.

n=6 - число всех элементарных исходов события A

$P(A)=m/n=2/6=1/3$

Брошены 2 кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 6.

- А - сумма выпавших очков равна 6.
- m=5 - число благоприятствующих для А исходов.(1и5, 2и4, 3и3,4и2, 5и1)
- n=6*6=36(правило умножения) - число всех элементарных исходов события А

P(A)=m/n=5/36

Брошены 3 кубика.

Какова вероятность того, что

- на всех трех кубиках выпало одинаковое количество очков.

m= n= P(A)=m/n=

- Сумма очков на всех кубиках равна 4

m= n= P(A)=m/n=

- Сумма очков на всех кубиках равна 5

m= n= P(A)=m/n=

В лотерее участвуют 15 билетов, 3 из которых выигрышные. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что оба они выигрышные?

A - оба билета выигрышные

m=3*2=6   n= 15*14=210   P(A)=m/n=1/35

В лотерее участвуют 15 билетов, 3 из которых выигрышные. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что только один выигрышный?

А – только один выигрышный

m=3*12*2=72   n= 15*14=210   P (A)=m/n=72/210=12/35

В лотерее участвуют 15 билетов, 3 из которых выигрышные. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что выигрышного билета не оказалось?

А – нет выигрыша

m=12*11=132   n= 15*14=210   P(A)=m/n=132/210=22/35

Сложение вероятностей

- Определение: Суммой событий А и В называют событие А+В, состоящее в появлении либо только события А, либо только события В, либо и события А и события В одновременно.
- Например: стрелок сделал 2 выстрела. А – попадание при 1ом выстреле, В – попадание при 2ом выстреле. А+В – попадание хотя бы при одном выстреле.

- Если А и В – несовместные события, то А+В – наступление одного из событий.
- Например. Бросаем кубик один раз. А – выпадение 1, В – выпадение 2 (несовместные события). Тогда Р (А+В)=2/6=1/3

Теорема:

- $P(A+B)=P(A)+P(B)$
- Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Задача.

- В ящике лежат 10 шаров: 3 красных, 2 синих и 5 белых. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность, что этот шар цветной?
- A – появление красного шара, P(A)=3/10
- B - появление синего шара, P(B)=2/10
- A+B - появление красного или синего шара, P(A+B)=1/2

Выяснить, являются ли события А и В несовместными, если:

- А – появление туза, В – появление дамы при одном изъятии карты из колоды
- А – появление туза, В – появление карты бубновой масти при одном изъятии карты из колоды
- А – выпадение 4 очков, В – выпадение четного числа очков при одном бросании кубика
- А – выпадение 4 очков, В – выпадение нечетного числа очков при одном бросании кубика

Задача

- В пачке находится 12 билетов денежно-вещевой лотереи, 16 билетов спортивной лотереи и 20 билетов художественной лотереи. Какова вероятность того, что на удачу вынутый билет будет билетом не спортивной лотереи?

Решение

А – вынут билет денежно-вещевой лотереи

В - вынут билет художественной лотереи

А и В – несовместные события

$P(A+B)=P(A)+P(B)=12/48+20/48=32/48=2/3$

Задача

- В колоде 36 карт. Наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что это либо туз, либо дама?

Решение

- A – вынимается туз
- B – вынимается дама
- A и B – несовместные события
- $P(A+B)=P(A)+P(B)=4/36+4/36=8/36=2/9$

Вероятность противоположного события.

- Определение:

  Событие $\bar{A}$ называется событием, противоположным событию А, если оно происходит, когда не происходит событие А.

Противоположные события.

1. Выпадение **«орла»**
2. Изъятие из **партии деталей** стандартной детали
3. **Выпадение 6** очков при бросании кубика
4. Сегодня первый урок - **физика**
5. Экзамен **сдан** на «5»
6. На кубике выпало **меньше 5** очков
7. **Хотя бы одна** пуля при 3х выстрелах попала в цель

1. Выпадение **«решки»**
2. Изъятие из партии деталей **нестандартной** детали
3. **Выпадение не** 6 очков при бросании кубика (1,2,3,4 или 5)
4. Сегодня первый урок - **не физика**
5. Экзамен не сдан на «5»
6. На кубике выпало **не меньше** 5 очков (т.е.больше 4: 5 или 6)
7. **Ни одна** пуля при 3х выстрелах не попала в цель

Свойство.

Если A – событие

n – количество элементарных исходов,

m- количество благоприятствующих для A событий,

k- количество благоприятствующих для $\bar{A}$ событий,

то m+k= n

Пример.

- Бросаем кубик.

Если событие А – «выпало 6 очков»

n=6– количество элементарных исходов,

m=1 количество благоприятствующих для А событий,

K=5 количество благоприятствующих для $\bar{A}$ событий,

то m+k= 1+5=6

Теорема.

- ***Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.***

пример:

Вероятность попадания стрелком по мишени равна 0,6. Какова вероятность того, что стрелок промахнется?

Попадание в мишень и промах – противоположные события.

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,6=0,4$$

Задача.

- **В роте из 100 солдат 2ое имеют высшее образование. Какова вероятность того, что в случайно сформированном взводе из 30 солдат будет хотя бы один человек с высшим образованием?**

- A – «во взводе хотя бы один человек имеет высшее образование»
- $\overline{A}$ - «во взводе ни один солдат не имеет высшее образование»
- Проще вычислить P($\overline{A}$), чем P(A)
- P($\overline{A}$)=m/n, где - количество благоприятствующих для $\overline{A}$ исходов (из 98 солдат выбраны 30 необразованных), n – количество всех исходов(из 100 солдат выбраны 30)
- n=C100 30
- m= C98 30
- P($\overline{A}$)= C98 30 / C100 30 =(98!/(30!68!))/(100!/(30!70!))=161/330
- P(A)=1-161/330= 169/330 =0,512

Задачи.

1. **Вероятность выигрыша главного приза равна 0,00000001. Какова вероятность не выиграть главный приз?**
2. **Найти вероятность того, что вынутая наугад одна из 28 костей домино не будет дублем?**
3. **В ящике лежат 5 белых, 10 черных и 15 красных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар не будет белым?**
4. **В студенческой группе 22 человека, среди которых 4 девушки. Какова вероятность того, что среди троих случайно выбранных студентов этой группы окажется по крайней мере одна девушка.**

- Воспользуйтесь теоремой
- Проверьте ответ:

Ответы:

- 0,999999999
- 3/4
- 5/6
- 181/385

Условная вероятность

- Определение: **Произведением событий А и В называется событие АВ, состоящее в появлении <u>и</u> события А <u>и</u> события В.**
- Напомню, что Суммой событий А и В называется событие А+В, состоящее в появлении **<u>или</u>** события А **<u>или</u>** события В.

Пример.

- A – попадание в мишень первым выстрелом
- B - попадание в мишень вторым выстрелом
- AB - попадание в мишень при обоих выстрелах

- A – наудачу вынута карта красной масти
- B - наудачу вынут туз
- AB – наудачу вынут красный туз

При совместном наступлении двух случайных событий возникает вопрос о <u>влиянии наступления одного события на появлении другого.</u>

Пример.

- Один раз бросается кубик.
- А – выпадение нечетного числа очков(1,3,5)
- В – выпадение числа очков, меньшего 4 (1,2,3)
- Если считать, что наступило событие В, то в нем событию А благоприятствует 2 исхода. Тогда Р(А) при условии наступления В равна 2/3.
- Если бы не было известно о наступлении события В, то Р(А)=1/2
- ½ меньше 2/3, **наступление события В увеличивает вероятность наступления А**

Для количественной характеристики зависимости одного события от другого вводится понятие ***<u>условной вероятности.</u>***

Определение:

- А и В – два случайных события, которые могут произойти в одном испытании.
- **Р(АВ)/Р(А) – называют условной вероятностью наступления события А при условии наступления события В, или просто условной вероятностью .**
- **Обозначение: Р(А/В)= Р(АВ)/Р(А)**

Задача.

- Какова вероятность того, что наугад вынутая из полного набора кость домино окажется дублем, если известно, что сумма очков на этой кости меньше 5?

- В наборе домино 28 костей, из них 7 дублей:0-0,1-1,2-2,3-3, 4-4,5-5,6-6
- На 9 костях сумма очков меньше 5:0-0,0-1,0-2,0-3,0-4,1-1,1-2,1-3,2-2
- В – сумма очков меньше 5
- А - дубль
- АВ – на дубле очков меньше 5(0-0,1-1,2-2)
- Р(А/В)=Р(АВ)/Р(А)=

(3/28)/(9/28)=1/3

<u>2 способ:</u>
Р(А)=n/m=1/3, где
n – количество всех исходов,
m – количество благоприятных исходов

Задача.

- ***В ящике лежат 3 белых и 2 черных шара. Из ящика 2 раза вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что первым был извлечен белый шар, а вторым – черный.***

- **А – первым извлечен белый шар**
- **В – вторым вынут черный шар**
- **АВ – последовательно вынут белый, затем черный шар**
- **Число всех возможных вариантов n=5*4=20**
- **Благоприятствующие для АВ события: упорядоченные пары б-ч из 3 белых и 2 черных шаров m=3*2=6**
- **P(AB)=m/n=6/20=3/10**

Задача.

- ***В ящике лежат 3 белых и 2 черных шара. Из ящика 2 раза вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что вторым был вынут черный шар при условии, что первым был извлечен белый шар.***

- **А – первым извлечен белый шар**
- **В – вторым вынут черный шар**
- **АВ – последовательно вынут белый, затем черный шар**
- **В/А – вторым вынут черный шар при условии, что первым вынут белый.**
- **После того, как произошло событие А, там останутся 2б и 2ч шара. Событию В благоприятствуют m=2события из n=4 возможных.**
- **P(B/A)= m/n=2/4=1/2**

- *Или : P(A/B)=P(AB)/P(A)=(3/10)/(3/5)=1/2 т.к. для события А n=5(в ящике первоначально находилось 5 шаров) и m=3 (белых шаров 3)*

Теорема умножения.

- $P(AB)=P(A/B)*P(B)=$

  $=P(B/A)*P(A)$

Задача.

- В лаборатории 7 женщин и 3 мужчин. Случайным образом для участии в конференции выбираются один докладчик и один содокладчик. Какова вероятность того, что докладчиком выберут женщину, а содокладчиком мужчину?

Решение двумя способами.

- A – д-ж
- B – с-м
- P(A)=7/10 (n=10, m=7)
- P(B/A)= 3/9 =1/3(n=9, m=3)
- P(AB)=P(B/A)*P(A)=

1/3* 7/10=7/30

- P(B)= 3/10
- P(A/B)=7/9
- P(BA)=P(A/B)*P(B)=

7/9*3/10=21/90=7/30

Сравнивая результаты двух способов убеждаемся в справедливости теоремы умножения.

Задача.

- На столе лежат 4 синих и 3 красных карандаша. Редактор дважды наугад берет по одному карандашу и обратно не кладет. Найти вероятность того, что вторым был взят красный карандаш при условии, что первым взят синий?

- A – 1-с
- B/A – 2-к
- P(A)= 4/7
- P(B/A)= 3/6=1/2

- Если порядок появления карандашей не важен, то вероятность появления карандашей разного цвета
- P(AB)=P(B/A)*P(A)= 1/2*4/7=4/14=2/7

Задача.

- На столе лежат 4 синих и 3 красных карандаша. Редактор дважды наугад берет по одному карандашу и обратно не кладет. Найти вероятность того, что вторым был взят синий карандаш при условии, что первым оказался синий?

- A – 1-с
- B/A – 2-с
- P(A)= 4/7
- P(B/A)= 3/6=1/2

- Если порядок появления карандашей не важен, то вероятность появления карандашей одного цвета

- P(AB)=P(B/A)*P(A)= 1/2*4/7=4/14=2/7

Задача.

- На столе лежат 4 синих и 3 красных карандаша. Редактор дважды наугад берет по одному карандашу и обратно не кладет. Найти вероятность того, что вторым был взят синий карандаш при условии, что первым оказался красный?

- A - 1-к
- B/A – 2-с
- P(A)= 3/7
- P(B/A)= 4/6=2/3

- Если порядок появления карандашей не важен, то вероятность появления карандашей разного цвета

- P(AB)=P(B/A)*P(A)= 3/7*2/3=6/21=2/7

Задача.

- На столе лежат 4 синих и 3 красных карандаша. Редактор дважды наугад берет по одному карандашу и обратно не кладет. Найти вероятность того, что вторым был взят красный карандаш при условии, что первым оказался красный?

- A - 1-к
- B/A – 2-к
- P(A)= 3/7
- P(B/A)= 2/6=1/3

- Если порядок появления карандашей не важен, то вероятность появления карандашей одного цвета

- P(AB)=P(B/A)*P(A)= 1/3*3/7=3/21=1/7

Решить самостоятельно:

- В барабане находится 10лотерейных билетов, из них 2 выигрышных. Из барабана вынимают 2 раза по одному билету, не возвращая их обратно. Какова вероятность, что

1. Один из билетов будет выигрышным?
2. второй раз был извлечен билет без выигрыша, при условии, что первый оказался выигрышный?
3. один из билетов выигрышный, а другой без выигрыша?

Проверить.

Решение.

- А - 1-выигрышный

В/А – 2-без выигрыша при условии, что 1-выигрышный

1. Р(А)= 2/10
2. Р(В/А)= 8/9
3. Если порядок появления билетов не важен, то вероятность появления выигрышного и невыигрышного Р(АВ)=Р(В/А)*Р(А)= 8/9*2/10=16/90=8/45

Вероятность произведения независимых событий.

- Событие А не зависит от события В, если Р(А/В)=Р(А)
- Иначе говоря, А не зависит от В, если наступление события А не влияет на вероятность события В.
- Если А и В – независимые события, то Р (АВ)=Р(А)*Р(В) (следует из формулы)
- Обычно независимость событий А и В понимают как выполнение этой формулы.

Примеры.

Являются ли события независимыми?

- Игральный кубик бросается дважды. А – при первом бросании выпало 2 очка, В – при втором бросании выпало 5 очков.
- Брошены 2 кубика. А - при бросании первого кубика выпало 6 очков, В - при бросании второго – тоже 6 очков.
- Из колоды карт дважды вынимают по одной карте, возвращая вынутую карту в колоду. А – первой вынута дама пик, В – второй тоже вынута дама пик.
- Из колоды карт дважды вынимают по одной карте, не возвращая вынутую карту в колоду. А – первой вынута шестерка треф, В – вторым вынут король пик.

Задача.

- Найти вероятность того, что при первом бросании кубика выпадет 6 очков, а при втором – нечетное количество очков.

- А – появление 6 очков при первом бросании
- В - появление нечетного числа очков при втором бросании
- А и В – независимые события.
- P(A)=1/6, P(B)=3/6=1/2
- P(AB)=P(A)*P(B)=1/6*1/2=1/12

Задача.

- **В изготовлении партии детских мячей вероятность появления бракованного мяча равна 0,004. в красный цвет окрашены ¾ всех мячей, а остальные - в синий. Какова вероятность того, что наугад выбранный мяч будет небракованным и красным?**

- **А – появление бракованного мяча**
- **$P(A)=0,004$ по условию**
- **$\overline{A}$ – появление небракованного мяча**
- **$P(\overline{A})=1-0,004=0,996$ по [формуле.]**
- **В – появление красного мяча**
- **$P(B)=3/4$ по условию**
- **$\overline{A}$ и В – независимые события**
- **$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})*P(B)=0,996*3/4$ $=0,747$**

Решите самостоятельно.

1. ***Брошены 2 кубика. Какова вероятность того, что на обоих кубиках появится по 2 очка?***
2. ***Брошены 2 кубика. Какова вероятность того, что на одном выпадет четное число очков, на другом – нечетное?***
3. ***Вероятность попадания в мишень равна 0,6. какова вероятность того, что стрелок попадет по мишени дважды при двух последовательных выстрелах?***
4. ***Вероятность поражения цели из первого орудия равна 0,7, из второго – 0,6. найти вероятность поражения цели из обоих орудий, выстреливших одновременно?***
5. ***В ящике лежат 2 белых, 3 красных, 5 черных шариков. Дважды вынимают по одному шару и возвращают их обратно. Какова вероятность, что***

- ***первым вынут красный шар, вторым – черный?***
- ***первым вынут черный шар, вторым – белый?***

Решение.

События во всех задачах – независимые

- P(AB)=P(A)*P(B)=1/6*1/6=1/36
- P(AB)=P(A)*P(B)=3/6*3/6=9/36=1/4
- P(AB)=P(A)*P(B)=0,6*0,6=0,36
- P(AB)=P(A)*P(B)=0,7*0,6=0,42
- P(AB)=P(A)*P(B)=3/10*5/10=0,15
- P(AB)=P(A)*P(B)=1/2*2/10=0,1

Итак:

- Общая формула вероятности.
- Вероятность несовместных событий.
- Вероятность противоположных событий.
- Условная вероятность.
- Вероятность независимых событий.

Историческая справка.

- Теория вероятностей зародилась в 17 веке из потребностей страхового дела, демографии и азартных игр.
- «азарт» - hazard (фр.)- «случай, риск»
- Год рождения теории вероятностей 1654, Б.Паскаль и П.Ферма по переписке решали задачу, возникающую при игре в кости.
- 1657 г. Х.Гюйгенс (голландец) написал книгу «О расчетах в азартной игре»

  …при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он занимается не только игрой, а что здесь даются основы теории вероятностей глубокой и весьма интересной…

- 1713г. Я.Бернулли «Искусство предположений»
- Изложил основы комбинаторики и теории вероятностей, доказал теорему Бернулли (20 лет жизни и 12 страниц текста)
- Теорема Бернулли – частный случай «закона больших чисел» (П.Л.Чебышев, середина 19 века)
- «закон больших чисел» связан с определением вероятности событий, для которых рассчитать точное значение вероятности невозможно.

- П.Лаплас (1749-1827) – французский математик и астроном
- К.Гаусс - немецкий математик
- А.А.Марков (1856-1920)
- А.М.Ляпунов (1857-1918)
- А.Н.Колмогоров (1903-1987)
- А.Я.Хинчин (1894-1959)
- Б.В.Гнеденко (1912=1996)
- В настоящее время теория вероятностей продолжает развиваться и находит широкое применение в ***естествознании***, ***экономике***, ***производстве и гуманитарных науках.***