Лекция №1.

История теории вероятностей.

Элементы комбинаторики

Вероятность

Понятие **вероятности** является важным для анализа событий или явлений в природе и обществе, которые связаны со случайностью.

Немного истории

Д. Кардано

Н. Тарталья

Предыстория теории вероятностей.

В этот период, начало которого теряется в веках, ставились и решались элементарные задачи, которые позже будут отнесены к теории вероятностей. Никаких специальных методов в этот период не возникает.

С вероятностными представлениями мы встречаемся еще в античности. У Демокрита, Лукреция Кара и других античных ученых и мыслителей мы находим глубокие предвидения о строении материи с беспорядочным движением мелких частиц (молекул), мы встречаем рассуждения о равновозможных исходах (равновероятных) и т. п.

Этот период кончается работами Кардано, Пачоли, Тарталья и др.

Возникновение теории вероятностей как науки относят к **средним векам** и первым попыткам математического анализа азартных игр (**орлянка, кости, рулетка**).

Самые ранние работы учёных в области теории вероятностей относятся **к XVII веку**.

Слово «азарт» приобрело в русском языке новый смысл. Это перевод французского слова **«hazard»**, что означает «случай».

Так что азартные игры – это игры, построенные на случае, что звучит уже вполне научно и респектабельно.

Основателями теории вероятностей были французские математики Б. Паскаль и П. Ферма, и голландский ученый Х. Гюйгенс

Б. Паскаль

П.Ферма

Х. Гюйгенс

Блез Паскаль и Пьер Ферма открыли первые вероятностные закономерности, возникающие при бросании костей.

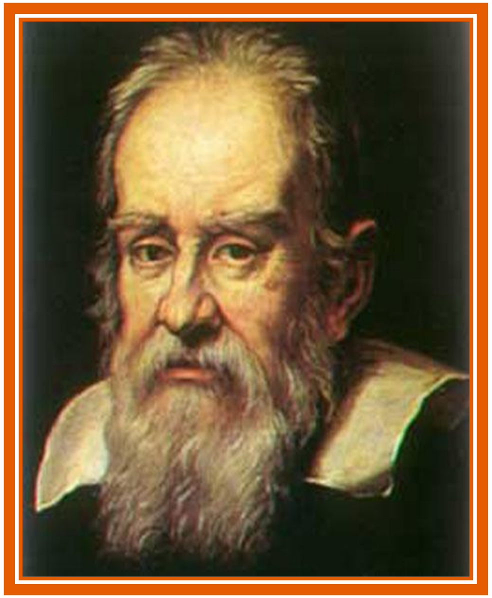
Христиан Гюйгенс – оценка ошибок результатов наблюдения.

В начале XVII века к великому **Галилею** явился приятель, который захотел получить разъяснение по следующему поводу.

Играя в три кости, он заметил, что число 10, как сумма очков на трех костях, появляется чаще, чем число 9.

«Как же так, – спрашивал игрок, – ведь как в случае девятки, так и в случае десятки эти числа набираются одинаковым числом способов, а именно шестью?» Приятель был формально прав.

Разбираясь в этом противоречии, Галилей решил одну **из первых задач комбинаторики – основного инструмента расчетов вероятностей**.



Якоб Бернулли

Якоб Бернулли дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний.

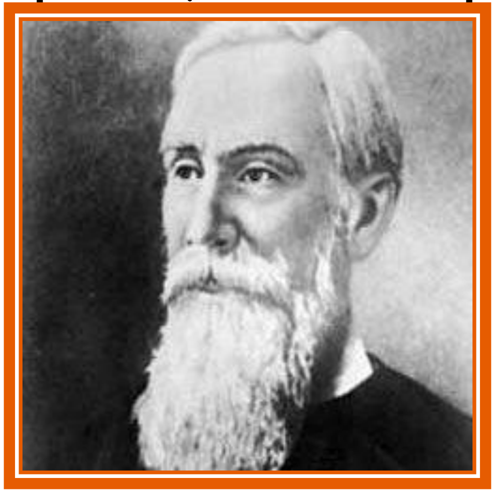
(Общий смысл закона больших чисел — совместное действие большого числа одинаковых и независимых случайных факторов приводит к результату, в пределе не зависящему от случая).

Первая половина XIX века – теория вероятностей в анализе ошибок наблюдений;

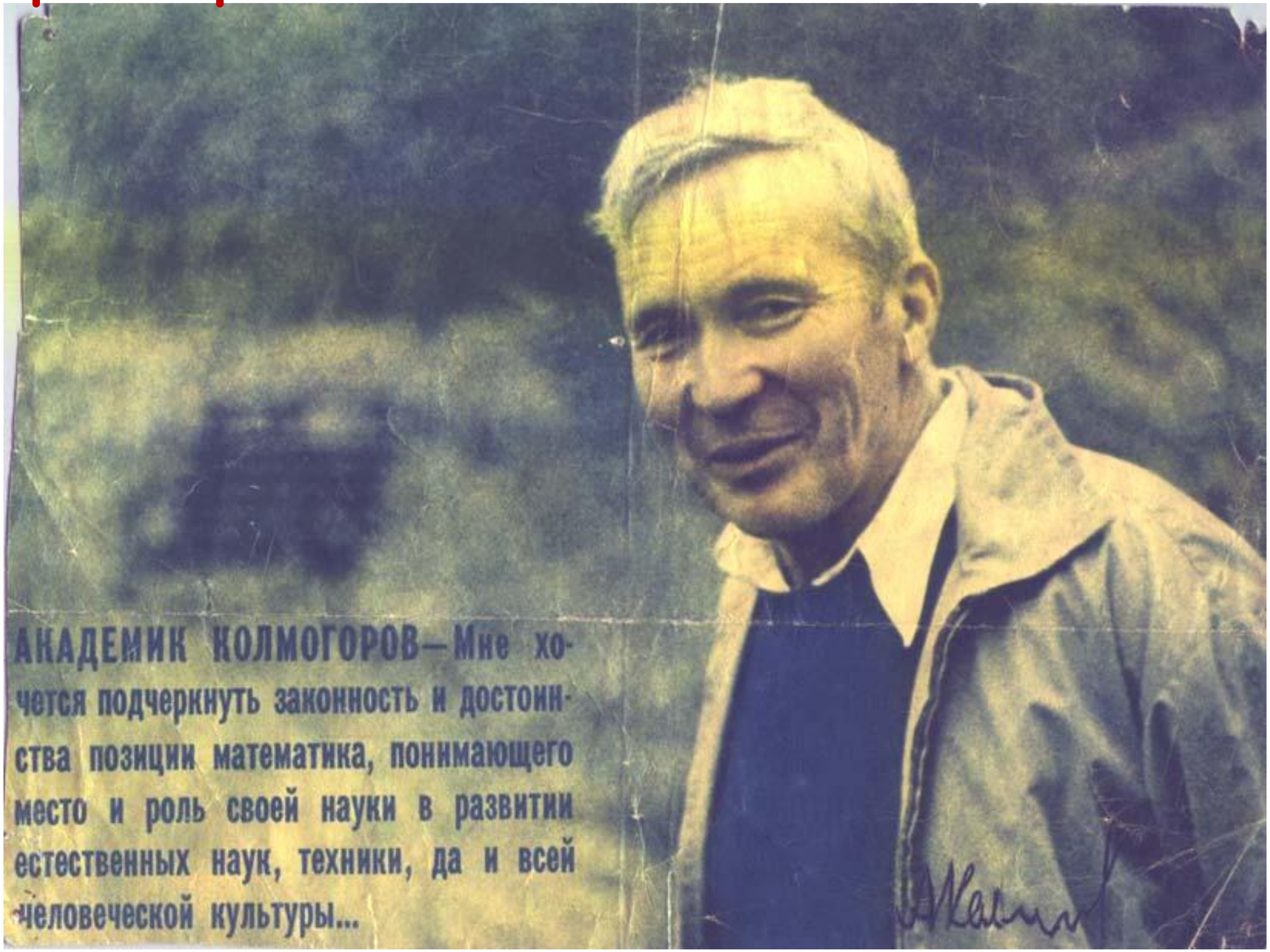
Лаплас и Пуассон доказали первые предельные теоремы.

Во второй половине XIX века основной вклад внесли русские **учёные П. Л. Чебышёв, А. А. Марков и А. М. Ляпунов.**

В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, а также разработана теория цепей Маркова.



В 1933 г. академик А.Н. Колмогоров завершил (общепризнанную теперь) **аксиоматику теории вероятностей.**



Формулы комбинаторики

Принцип суммы и произведения

Размещения

Перестановки

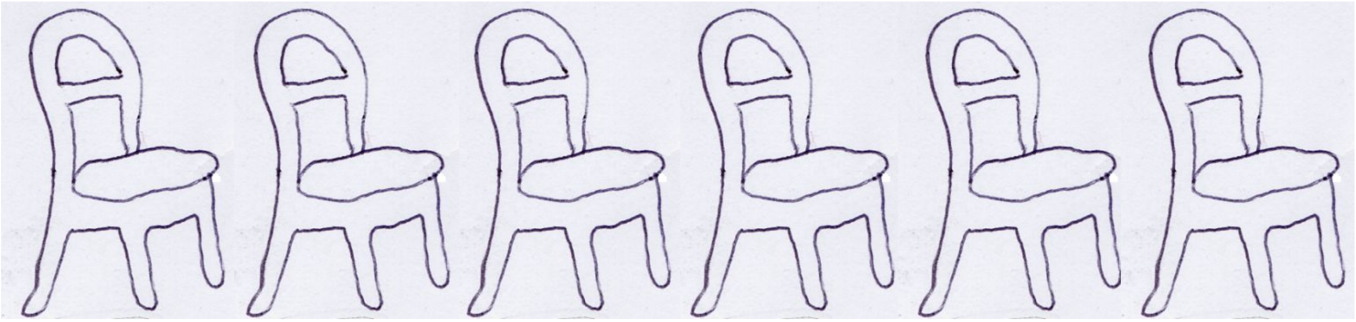
Сочетания

Элементы комбинаторики

Задачи, в которых составляются из конечного числа элементов различные **комбинации** и производится **подсчет числа** всех возможных **комбинаций**, составленных по некоторому правилу, называются **комбинаторными**, а раздел математики , занимающийся их решением, называется **комбинаторикой**.

Вопрос

Сколькими способами 6 человек могут сесть на шесть стульев?



Принцип суммы

Если два действия **взаимо исключают** друг друга, причем одно из них можно выполнить **m** способами, а другое — **n** способами, то выполнить одно любое из этих действий можно **n + m** способами.

Принцип произведения

Если одно множество состоит из $\boldsymbol{n}$ различных элементов, другое из $\boldsymbol{m}$ различных элементов, и эти **множества не пересекаются**, то сколько **различных пар** можно образовать из элементов этих множеств, если первый элемент берется из первого множества, а второй – из второго?

Согласно принципу произведения количество пар будет **равно** $\boldsymbol{n \times m}$**.**

Пример

В гардеробе девушки висят три юбки, пять блузок и четыре шарфика. Сколько различных костюмов может составить девушка, если считать, что цвета одежды хорошо сочетаются друг с другом?

Решение:

По принципу произведения: 3 х 5 х 4 = 60

Ответ:

Всего имеется 60 вариантов костюмов.

Перестановки

Сколькими способами n разных объектов могут быть расположены на одной линии?

$$P_n = n!$$

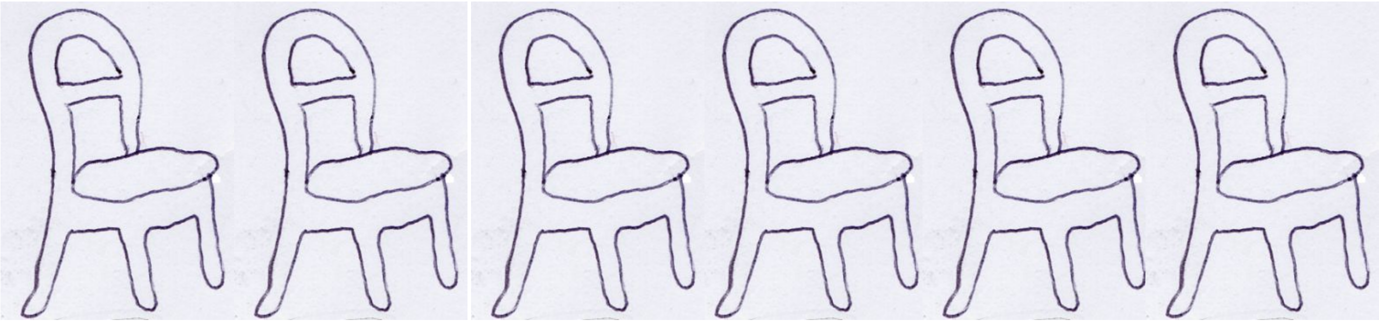
Пример

Сколькими способами 6 человек могут сесть на шесть стульев?

Решение.

Для первого существует 6 возможностей, для второго, после того как первый уже выбрал, останется 5, для следующего – 4 и так далее. Последний, шестой, после пятерых будет иметь только одну возможность. Итак, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Ответ. 720 способов.



Перестановки с повторениями. Пусть имеются n элементов, среди которых k_1 элементов одного типа, k_2 элементов другого типа, k_l элементов l-го типа $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$. Число перестановок из этих n элементов равно числу перестановок с повторениями, обозначается $\overline{P_n}$ и вычисляется по формуле

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}.$$

Пример. Десять приезжих мужчин размещаются в гостинице в двух трехместных и одном четырехместном номерах. Сколько существует способов их размещения?

Решение. $N = \dfrac{10!}{3!\,3!\,4!} = 4200.$

Ответ: Существует 4200 способов.

Размещения

Сколькими способами из ***n*** разных объектов можно выбрать **упорядоченное подмножество** из ***m*** объектов? (порядок важен)

Упорядоченным считается множество, в котором задан порядок элементов.

Объекты после выбора не возвращаются и повторно не могут быть выбраны.

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

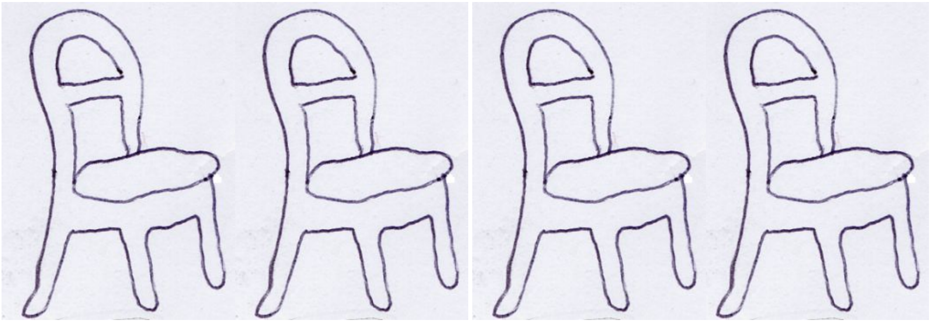
Размещения - это перестановки при n m≠

Пример

Сколькими способами из 6 человек можно выбрать четверых и рассадить на четыре стула?

Решение. На первый стул сядет любой из шести, на следующий – уже из пяти. Всего четыре стула, поэтому: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Ответ. 360 способов.



Размещения с повторениями. Каждое размещение с повторениями из n элементов по m элементов может состоять не только из различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов, взятых из данных n элементов.

Соединения, отличающиеся друг от друга хотя бы порядком расположения элементов, считаются различными размещениями.

Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов обозначается символом $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\boxed{\overline{A}_n^m = n^m.}$$

Пример Для запирания сейфов и автоматических камер хранения применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано некоторое «тайное слово». Пусть на диск нанесено 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

Решение. Общее число возможных комбинаций можно найти по формуле (2)

$$N = \overline{A}_{12}^5 = 12^5 = 248\,832.$$

Число неудачных попыток — 248 832 – 1 = 248 831.

Ответ: 248 831.

Сочетания

Сколькими способами из n разных объектов можно выбрать m объектов? (порядок неважен)

Выбор не упорядочен.

Объекты после выбора не возвращаются.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример

Сколькими способами из шестерых человек можно выбрать четверых?

Решение. Пользуемся формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{6!}{4!(6-4)!} =$$

$$= \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 6}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

Ответ. 15 способов.

Сочетания с повторениями. Сочетание с повторениями из n элементов по m элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до m включительно или не содержать его совсем, т.е. каждое сочетание из n элементов по m элементов может состоять не только из m различных элементов, но из m каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m обозначают символом $\overline{C}_n^m$ и вычисляют по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

В сочетаниях с повторениями m может быть и больше n.

Пример. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Число различных покупок равно числу сочетаний с повторениями из 4 по 7:

$$N = \overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Ответ: Из пирожных 4 сортов 7 пирожных можно выбрать 120 способами.

Какова вероятность того, что орёл не выпадет никогда?

Вероятность того, что орёл не выпадет первым же броском, составляет 1/2.

Вероятность того, что орёл не выпадет ни первым, ни вторым броском – (1/2)/2 или 1/4.

Дальше вероятность уменьшается в геометрической прогрессии. Из трёх бросков – 1/8, из четырёх – 1/16… из десяти – 1/1024.

Задача 1.

Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все 10 цифр?

Решение:

1) $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040$

2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти: $A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$

3) $A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536$

Задача 2.

Пусть имеется множество, содержащие 4 буквы: {А,В,С,Д}. Записать все возможные сочетания из указанных букв по три без повторов.

Решение:

Порядок элементов в сочетании не учитывается:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Задача 3.

Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение:

Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять способами.

$$P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$$

4 определенные книги можно переставлять способами.

$$P_4 = 4! = 1*2*3*4 = 24$$

Тогда всего перестановок по правилу умножения будет

$$P_6 * P_4 = 720 * 24 = 17280.$$

Задача 4.

Нужно выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся книг. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!*6!} = 210.$$

Задача 5.

Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

Решение: $7_{ш} = 3_{ч} + 4_{б}$

Белые шары: $C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!*6!} = 210$

Черные шары: $C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!*2!} = 10$. Тогда $C_{10}^{4} * C_{5}^{3} = 20*10 = 2100$

Теория вероятностей на практике ☺

Можно ли выиграть в рулетку?

Нет ничего невозможного.

Представьте, что вы хотите выиграть в орлянку. Можете ли вы выиграть наверняка?

Ответ: в реальной жизни – да, можете, но при соблюдении двух условий:

1. Если примут ваши правила игры.
2. Если у вас есть значительный капитал, позволяющий играть по определённой системе.

С рулеткой дело обстоит точно так же, если вы ставите на так называемые равные шансы: красное-чёрное, чёт-нечет, больше-меньше.

Разница лишь в том, что вероятность выпадения каждого из этих шансов составляет чуть меньше половины – не 1/2, а 18/37 (за счёт того, что на рулетке есть zero).

Игорное заведение имеет простой способ не допустить превращения игры в скачку со ставками, где игрок был бы практически «обречён» на выигрыш.

Особо популярными были и остаются **игровые автоматы.** Но здесь дело обстоит немного сложнее. Выпадение чисел основано на теории вероятности, но за это отвечает программа.

Ясное дело, что, как бы ни старался игрок, он все равно останется в проигрыше. Однако это вовсе не значит, что автомат нельзя обмануть. Это всего лишь программа. А любую программу можно либо обойти, либо сломать.

Работа любого игрового автомата, вне зависимости от способа реализации игровых услуг, целиком и полностью подчинена определенному алгоритму.

В истории игорного бизнеса надолго остался один из способов ограбления слотов, известный **как «засечка времени активизации диска»**.

Его было трудно обнаружить, так как отсутствовали внешние признаки вмешательства в нормальную работу механизма. Среди умельцев было множество никак не связанных между собой групп, научившихся стабильно выигрывать у «одноруких бандитов».

Суть открытия «темп – бойз» состояла в том, что если дёргать рукоятку слот – машины в **определённое время** (с точностью до секунды), то аппарат **повторяет только что выпавшую комбинацию**. Казино тогда были оснащены исключительно механическими слот – машинами.

Как выиграть в карты? Скорее всего, вопрос поставлен немного те так. Лучше будет задаться вопросом - как не проиграть в карты? Многие считают, что в карты выигрывать постоянно невозможно, в конечном итоге проигрыш все-равно наступит.

И это так, но если систематически выигрывать большие суммы, а потом проиграть одну маленькую, то проигрыш не будет казаться разорительным.

Большую роль играет соперник.

Как выиграть в карты у профессионального шулера, знает только такой же шулер.

А вот, как выиграть в карты у дилера казино? - это уже вопрос другой.

Возьмем, к примеру, карточную игру Блэкджек.

Математические шансы выигрыша игрока немного превышают шансы казино. Но, почему-то казино, практически, всегда выигрывает.

Существенным моментом, который может помешать Вам выиграть в карты, является **размер ставок.**

Для каждой игры он различается. Ставка должна рассчитываться из суммы вашего бюджета.

Если Вы играете в Блэкджек и Ваш бюджет равен 1500$, то оптимальная ставка будет 100$.

Для Семикарточного покера - 50$.

А вот для пятикарточного покера 50$ будет маловато.

РЕКЛАМА

На первый взгляд ничего общего между рекламой и играми, которые разгружают карманы одних и переводят деньги в карманы других, нет.

Если, скажем, вероятность натолкнуться на соответствующую информацию в течение **одного дня равна одной сотой**, то через **сто дней**

37 процентов населения так и не столкнется с этой рекламой,

37 процентов встретятся с упоминанием о рекламируемом предмете 1 раз,

18 процентов – два раза,

6 процентов – три раза и т.д.

Эти числа дает распределение Пуассона.