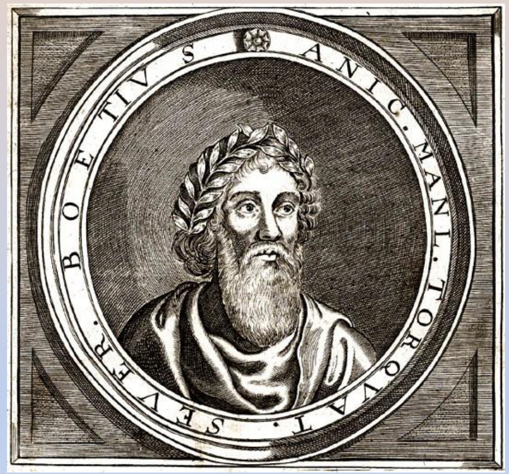
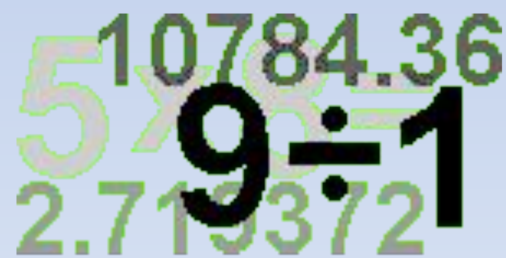
Урок алгебры в 9 классе

Закончился XX век, а вот термин “прогрессия” был введен римским автором Боэцием еще в IV в. н.э. от латинского слова progressio – “движение



Сегодня на уроке лозунг нас зовёт:



«Прогрессио – движение вперёд!»

Федотова Любовь Николаевна

Этим термином в математике прежде именовали всякую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении.

Изучена данная тема,

Пройдена теории схема,

Вы много новых формул узнали,

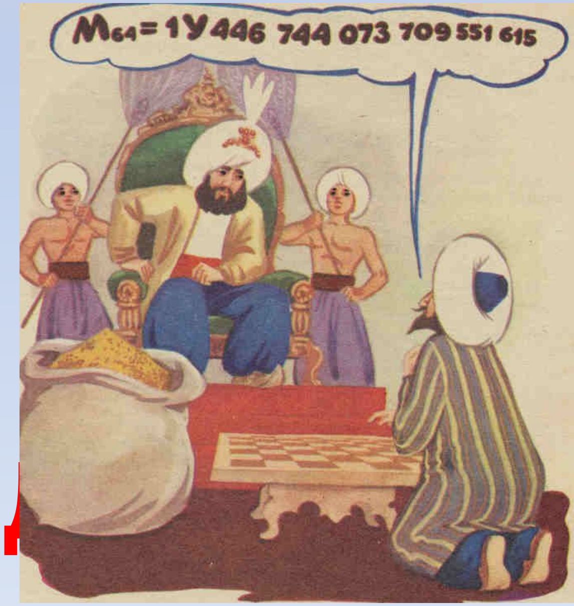
Задачи с прогрессией решали.

И вот в последний урок

Нас поведет

Красивый лозунг

“ПРОГРЕССИО – ВПЕРЕ



АРИФМЕТИЧЕСКА Я И

ГЕОМ ЕСКА

ПРО ИИ

Федотова Любовь Николаевна

Мы начинаем наш урок.
Ваши глубокие познания прогрессии
должны всех нас сегодня удивить.
Все устные задания
вам нужно на одном дыхании решить.
Ведь формулы и определения известны нам теперь.
И в мир задач решения нам широко открыта дверь.
Решишь задачи, берись за тест,
чтоб не осталось пустых мест.
сегодня мы должны убедиться,
что и в 21 веке прогрессия пригодится.

ЦЕЛИ УРОКА:

- систематизировать знания по теме;
- повторить основные формулы по теме;
- рассмотреть исторические задачи, связанные с этой темой;
- рассмотреть задачи по ЕГЭ по данной теме.

Определение

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену,

сложенному с одним и тем же числом,	умноженному на одно и то же число,

называется

арифметической	геометрической

прогрессией

Федотова Любовь Николаевна

ЗАПОЛНИТЕ ТАБЛИЦУ

Название прогрессии	Формула *n*-члена	Характерис-тическое свойство	Формула суммы *n* *первых членов*
Арифме-тическая			
Геомет-рическая			

Является ли конечная последовательность…

10; 8,5; 7; 5,5 арифметической прогрессией?	3; -4,5; 6,75; -10,125 геометрической прогрессией?

Если данная последовательность является

арифметической прогрессией,	геометрической прогрессией,

то должны быть равны

разности	частные

второго и первого, третьего и второго, и т.д. членов:

$8{,}5-10=7-8{,}5=5{,}5-7=-1{,}5=d$	$\frac{-4{,}5}{3}=\frac{6{,}75}{-4{,}5}=\frac{-10{,}125}{6{,}75}=-\frac{3}{2}=q$

Федотова Любовь Николаевна

1. Одна из двух данных последовательностей является арифметической прогрессией, другая – геометрической:

-15; -12; -9; -6; -3; 0;… **d**=3

32; 16; 8; 4; 2; 1;… **q**=1/2

Продолжите каждую из этих прогрессий и назовите следующие три её члена.

2. Укажите формулу n- го члена арифметической прогрессии:

А. $a_n = -3n-15;$

Б. $a_n = 3n-15;$

В. $a_n = 3n-18;$

Г. $a_n = -3n+18;$

3.Является ли число 72 членом данной прогрессии?

72=3n-18

n=30, $n \in N$

4. Укажите формулу n-го члена геометрической прогрессии:

А. $b_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n;$

Б. $b_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};$

В. $b_n = 32 \cdot \frac{1}{2}(n-1);$

Г. $b_n = 32 \cdot 2^{n-1};$

Какие из следующих последовательностей являются:

- **арифметическими прогрессиями**
- **геометрическими прогрессиями**

$$а)\ 3;\ 13;\ 23;\ 33.$$

$$б)\ -13;\ -3;\ 13;\ 23.$$

$$в)\ 3;\ 30;\ 300;\ 3000.$$

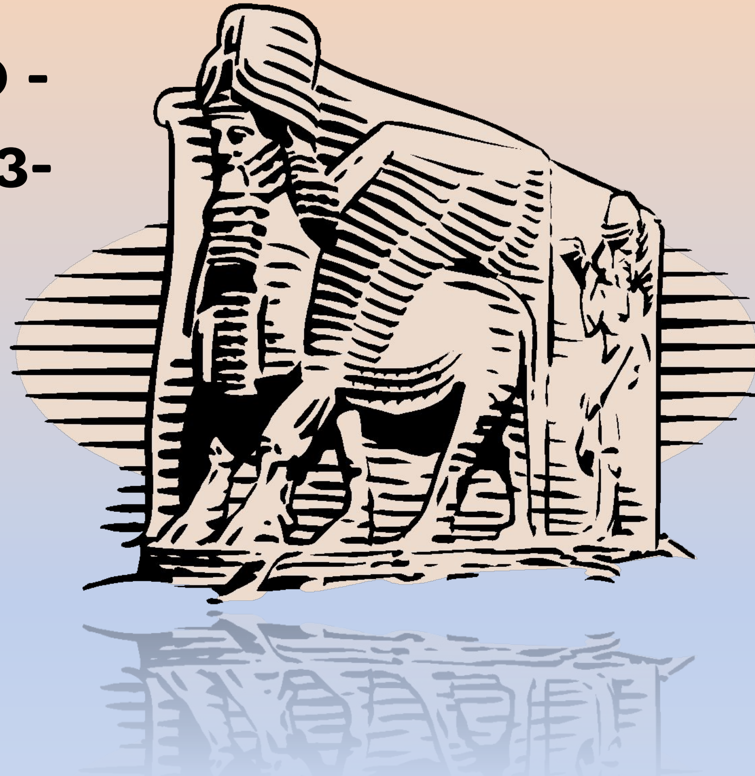
$$г)\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{18};\ \frac{1}{54}.$$

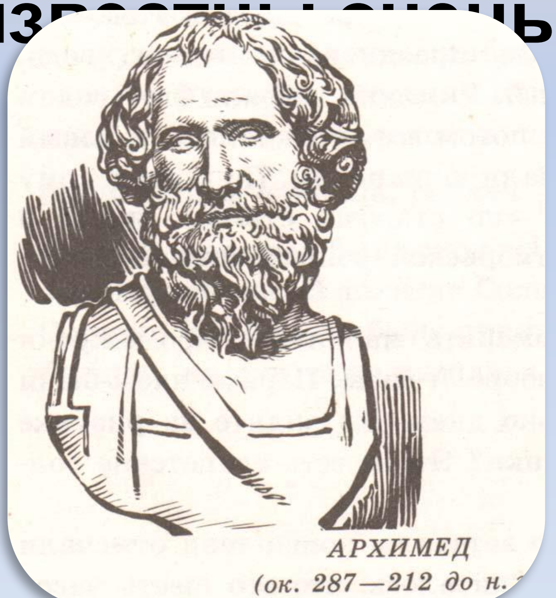
$$д)\ \sqrt{2};\ \sqrt{18};\ \sqrt{50}.$$

Зная эти формулы, которые мы повторили можно решить много интересных задач литературного, исторического и практического содержания.

Федотова Любовь Николаевна

Понятие числовой последо - вательности возникло и раз- вивалось задолго до создания учения о функциях. Прогрессии известны очень давно.





На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий **АРХИМЕД**
(ок. 287–212 гг. до н.э)

Прогрессии в древности

Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и др.

Задача - легенда

Шахматная игра была придумана в Индии, и когда индусский царь Шерам познакомился с нею, он был восхищен её остроумием и разнообразием возможных в ней положений. Узнав, что она изобретена одним из его подданных, царь приказал его позвать, чтобы лично наградить за удачную выдумку. Изобретатель, его звали Сета, явился к трону повелителя. Это был скромно одетый ученый, получавший средства к жизни от своих учеников.

-Я желаю достойно вознаградить тебя, Сета, за прекрасную игру, которую ты придумал, -сказал царь.

Мудрец поклонился.

-Я достаточно богат, чтобы исполнить самое смелое твое пожелание, - продолжал царь. - Назови награду, которая тебя удовлетворит, и ты получишь ее.

Сета молчал.

-Не робей, - ободрил его царь. – Выскажи свое желание. Я не пожалею ничего, чтобы исполнить его.

-Велика доброта твоя, повелитель. Но дай срок обдумать ответ. Завтра я сообщу тебе мою просьбу.

Когда на другой день Сета снова явился к ступеням трона, он удивил царя беспримерной скромностью своей просьбы.

-Повелитель, - сказал Сета, - прикажи выдать мне за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно.

-Простое пшеничное зерно? – изумился царь.

-Да, повелитель. За вторую клетку прикажи выдать 2 зерна, за третью - 4, за четвертую - 8, за пятую - 16, за шестую -32…

-Довольно, - прервал его царь. – Ты получишь свои зерна за все 64 клетки доски, согласно твоему желанию: за каждую вдвое больше против предыдущей. Но знай, что просьба твоя недостойна моей щедрости. Прося такую ничтожную награду, ты непочтительно пренебрегаешь моей милостью. Ступай. Слуги мои вынесут тебе твой мешок с пшеницей.

Царь очень обрадовался этому

Сета улыбнулся хитро, покинул дворец и стал ожидаться у ворот дворца.

Стоит ли царю радоваться?

Дано:

$(в_n)-$ **геометрическая прогрессия**

$в_1 = 1;$

$q = 2;$

$S_{64} - ?$

Решение

$$S = \frac{в_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 =$$

$$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Федотова Любовь Николаевна

Наградой за 64-ю клетку должно было быть

18 446 744 073 709 551 615

восемнадцать квинтиллионов четыреста сорок шесть квадриллионов семьсот сорок четыре триллиона семьдесят три миллиарда семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча шестьсот пятнадцать зёрен.

Если всё это зерно засыпать в амбар высотой 4 метра и шириной 10 метров, то длина амбара была бы вдвое больше, чем расстояние от Земли до Солнца...

Вывод

Если бы царю удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая моря, и океаны, и горы, и пустыню, и Арктику с Антарктикой, и получить удовлетворительный урожай, то, пожалуй, лет за 5 он смог бы рассчитаться.

Такое количество зёрен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли. Это превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Федотова Любовь Николаевна

Петя, довольный, пришел из школы
и предложил папе заключить сделку:
в учебном году 34 недели;
за 1 неделю Петя получит 1 копейку,
за вторую - 2 копейки,
за третью - 4 копейки и т.д.

Как вы думаете, в каком классе учится Петя и что нового он узнал?

«Покупка лошади»

В старинной арифметике Магницкого есть следующая забавная задача.

Некто продал лошадь за 156 руб. Но покупатель, приобретя лошадь, раздумал её покупать и возвратил продавцу говоря:

-Нет мне расчёта покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит.

Тогда продавец предложил другие условия:

-Если по-твоему цена лошади высока, то купи только её подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу беспла

Гвоздей в каждой подкове 6 шт. За первый гвоздь дай мне всего 1/4 коп., за второй 1/2 коп., за третий – 1 коп. и т. д.

Покупатель принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придётся уплатить не более 10 руб.

На сколько покупатель проторговался?

Решение:

$$\frac{1}{4};\frac{1}{2};1;2;4;8;16;...$$

Эти числа составляют геометрическую прогрессию $в_1=\frac{1}{4}$, *q*=2, *n*=24.

$$s_{24}=\frac{в_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2^{24}-1}{2-1}=4194303\frac{3}{4}\left(коп.\right)\approx 41943\,руб.$$

То есть 41943 рубля.

За такую цену и лошадь продать не жалко!

ЗАДАНИЕ ИЗ ЕГЭ (2 БАЛЛА)

Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия (a_n) : -18; -17,3; …?

Решение

ЗАДАНИЕ ИЗ ЕГЭ (2 БАЛЛА)

Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия (a_n) : -18; -17,3; …?

Решение

$$d = a_2 - a_1 = -17{,}3 - (-18) = 0{,}7$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$-18 + 0{,}7(n-1) < 0,$$

$$-18{,}7 + 0{,}7n < 0,$$

$$0{,}7n < 187,$$

$$n < 26\frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow n = 26.$$

Проверка

$$a_{26} = -18 + 0{,}7(26-1) = -18 + 17{,}5 = -0{,}5;$$

$$a_{27} = -18 + 0{,}7(27-1) = -18 + 18{,}2 = 0{,}2.$$

Ответ: 26.

Занимательное свойство арифметической прогрессии.

А теперь, рассмотрим еще одно свойство членов арифметической прогрессии. Оно, скорее всего, занимательное. Нам дана “стайка девяти чисел”

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,17, 19.

Она представляет собой арифметическую прогрессию. Кроме того, данная стайка чисел привлекательна способностью разместиться в девяти клетках квадрата так, что образуется магический квадрат с константой, равной 33.

Знаете ли вы, что такое магический квадрат?

Квадрат, состоящий из 9 клеток, в него вписывают числа, так чтобы сумма чисел по вертикали, горизонтали диагонали была одним и тем же числом – constanta.

9	19	5
7	11	15
17	3	13

Замечание об арифметической прогрессии само по себе очень интересно. Дело в том, что из каждых девяти последовательных членов любой арифметической прогрессии натуральных чисел можно составить магический квадрат.

Пусть дана арифметическая прогрессия: a, a+d, a+2d, a+3d, …, a+8d, где a и d натуральные числа. Расположим её члены в таблицу.

a+3d	a+8d	a+d
a+2d	a+4d	a+6d
a+7d	a	a+5d

Нетрудно видеть, что получился магический квадрат, константа С которого равна 3a+12d. Действительно, сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и по каждой диагонали квадрата равна 3a+12d.

ЗАДАНИЕ ИЗ ЕГЭ (6 БАЛЛОВ)

Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если из этих чисел вычесть соответственно 1; 2; 11; 44, то получим четыре числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие арифметическую прогрессию.

Решение

Члены геометрической прогрессии имеют вид $в_1, в_1q, в_1q^2, в_1q^3$.

По условию задания числа $в_1 - 1, в_1q - 2, в_1q^2 - 11, в_1q^3 - 44$ **являются последовательными членами арифметической прогрессии.**

Применим характеристическое свойство арифметической прогрессии, связывающее каждый член прогрессии (кроме первого) с двумя «соседними» членами и объединим полученные уравнения в систему.

$$
\begin{cases}
в_1 - 2 = \dfrac{в_1 - 1 + в_1 q^2 - 11}{2}, \\
в_1 q^2 - 11 = \dfrac{в_1 q - 2 + в_1 q^3 - 44}{2};
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} в_1 - 2 = \dfrac{в_1 - 1 + в_1 q^2 - 11}{2}, \\ в_1 q^2 - 11 = \dfrac{в_1 q - 2 + в_1 q^3 - 44}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2в_1 q - 4 = в_1 - 1 + в_1 q^2 - 11, \\ 2в_1 q^2 - 22 = в_1 q - 2 + в_1 q^3 - 44; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} в_1 q^2 - 2в_1 q + в_1 = 8, \\ в_1 q^3 - 2в_1 q^2 + в_1 q = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} в_1 \left(q^2 - 2q + 1\right) = 8, \\ в_1 q \left(q^2 - 2q + 1\right) = 24; \end{cases}$$

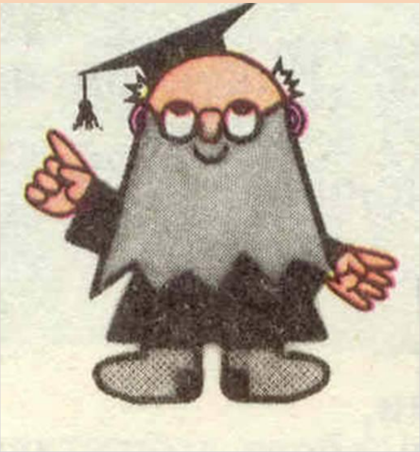
$$\Leftrightarrow \begin{cases} в_1 (q-1)^2 = 8, \\ в_1 q (q-1)^2 = 24; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 3, \\ в_1 (3-1)^2 = 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 3, \\ в_1 = 2. \end{cases}$$

Таким образом, 2; 6; 18; 54 – геометрическая прогрессия,

1; 4; 7; 10 – арифметическая прогрессия.

Ответ: 1; 4; 7; 10.

Итоги урока



Повторили …

Закрепили …

Познакомились …

Урок сегодня завершен

Но каждый должен знать:

Познание, упорство,

труд

Федотова Любовь Николаевна

К прогрессу в жизни приведут!

Письмо из прошлого

О том, как давно была известна геометрическая прогрессия, свидетельствуют папирусы Ахмеса. Некоторые задачи имеют отвлеченный характер. Например: **В доме было 7 кошек.**

Каждая кошка съела 7 мышей.

Каждая мышь съедает 7 колосьев.

Каждый колос дает 7 растений.

На каждом растении вырастает 7 мер зерна.

Сколько всех вместе?

Автора задачи не интересует о каких вещах идет речь, важно только их количество. И на Руси решались похожие задачи. Еще в XIX веке в деревнях загадывали: **« Шли 7 старцев. У каждого по 7 костылей. На каждом костыле по 7 сучьев. На каждом сучке по 7 кошелей. В каждом кошеле по 7 пирогов. Сколько всего?»** А ведь эта та же самая задача Ахмеса, прожившая тысячелетия она сохранилась почти неизмененной. **Домашнее задание - решить эту задачу.**

Федотова Любовь Николаевна

Петя, довольный, пришел из школы
и предложил папе заключить сделку:
в учебном году 34 недели;
за 1 неделю Петя получит 1 копейку,
за вторую - 2 копейки,
за третью - 4 копейки и т.д.

Домашнее задание - решить эти задачи.

Спасибо за внимание!

Федотова Любовь Николаевна