Дискретная математика.

Теория множеств

Теория множеств

- Множества
- Операции над множествами
- Упорядоченные множества
- Соответствия
- Отображения и функции
- Отношения

Множества. Основные понятия

- ***Множество*** - совокупность определенных, вполне различаемых объектов, рассматриваемых как целое.
- ***Элемент множества*** - отдельный объект множества.
- ***Пустое множество*** $\varnothing$ - множество не содержащее элементов.
- ***Универсальное множество*** (*универсум*) **U** - множество содержащее все возможные элементы в рамках заданного рассмотрения
- ***Мощность множества*** $|M|$ - количество элементов множества.

Способы задания множеств

- Перечисление элементов

  $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$

  $M_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- Выделение определяющего свойства

  $M = \{x \mid P(x)\}$

  $M_9 = \{n \mid n \in N \;\&\; n < 10\}$

- Определение порождающей процедуры

  $M = \{x \mid x = f\}$

  $M_9 = \{n \mid \textbf{for } n \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 9 \textbf{ write } n\}$

Сравнение множеств

- Два множества ***равны*** между собой, если они состоят из одних и тех же элементов
  - Свойства: для любых трех множеств X, Y, Z верно
    - рефлексивность $X = X$; (идемпотентность)
    - коммутативность $X = Y \Rightarrow Y = X$;
    - транзитивность $(X = Y) \& (Y = Z) \Rightarrow X = Z$.
- Множество X является ***подмножеством*** множества Y, если любой элемент множества X принадлежит и множеству Y.

  $X \subseteq Y$, если $x \in X$ и $x \in Y$; $X \subset Y$, если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$
  - Свойства:
    - рефлексивность $X \subseteq X$
    - транзитивность $X \subseteq Y \& Y \subseteq Z, X \subseteq Z$
    - свойства 0 и 1 $\varnothing \subseteq Y \subseteq \mathbf{U}$

Границы множества

- Если множество конечно и состоит из элементов, сравнимых между собой, то существуют *наибольший* и *наименьший* элементы такого множества.
- Если множество бесконечно и состоит из элементов, сравнимых между собой, то существуют *границы* этого множества: *верхняя* и *нижняя*.

  $S = \{x \in R \mid a<x<b\}$ $S =]a,b[$

  $a = \inf S$ ('инфинум)

  $b = \sup S$ (супр'емум)

Теорема о границах

- Если $B \subseteq A$, то $\inf B \geq \inf A$; $\sup B \leq \sup A$.

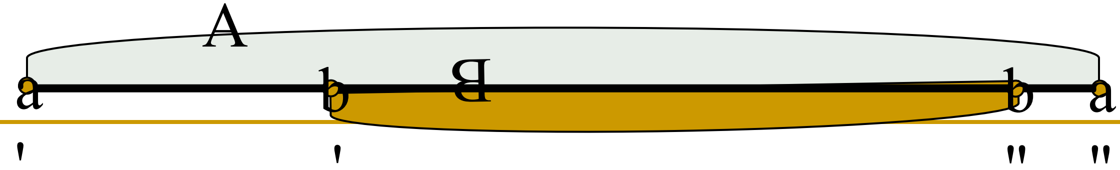
<u>Доказательство</u>:

Пусть $b' \in B$ и $b' = \inf B$; т.к. $B \subseteq A \Rightarrow b' \in A$.

Пусть $a' \in A$ и $a' = \inf A$; при этом если $a' = b'$, то $b' = a' = \inf A$; а если $a' \neq b'$, то $b' = \inf B > a' = \inf A$.

Пусть $b'' \in B$ и $b'' = \sup B$; т.к. $B \subseteq A \Rightarrow b'' \in A$.

Пусть $a'' \in A$ и $a'' = \sup A$; при этом если $b'' = a''$, то $a'' = \sup A = b'' = \sup B$; а если $b'' \neq a''$, то $a'' = \sup A > b''$.



Операции над множествами

- Объединение $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$
- Пересечение $A \cap B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \in B\}$
- Разность $A \setminus B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \notin B\}$
- Симметрическая разность

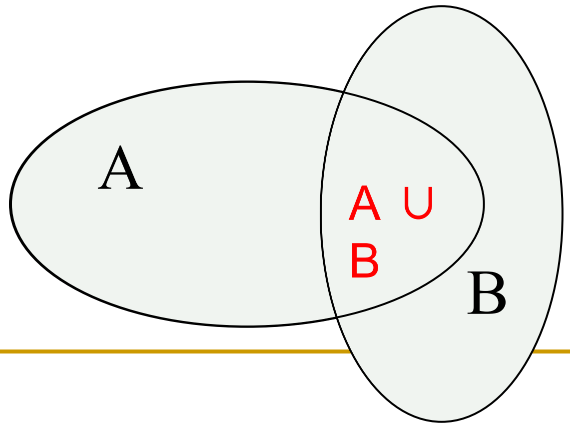
$A/B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x \mid (x \in A \,\&\, x \notin B) \lor (x \notin A \,\&\, x \in B)\}$

- Дополнение $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$, где

  U - некоторый универсум.

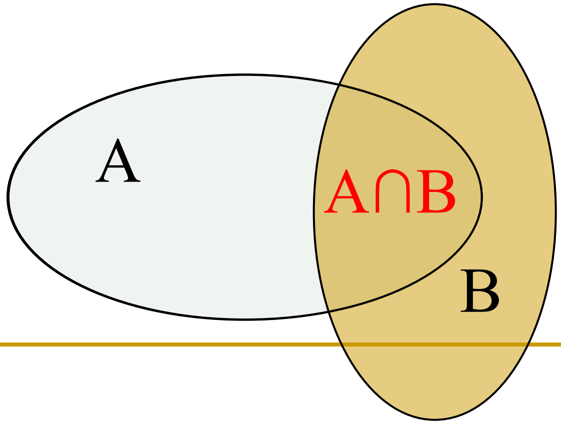
Объединение

- *Объединением* множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.
  - Свойства
    - рефлексивность $A \cup A = A$
    - коммутативность $A \cup B = B \cup A$
    - ассоциативность $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
    - свойство 0 $A \cup \varnothing = A$
    - свойство 1 $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$



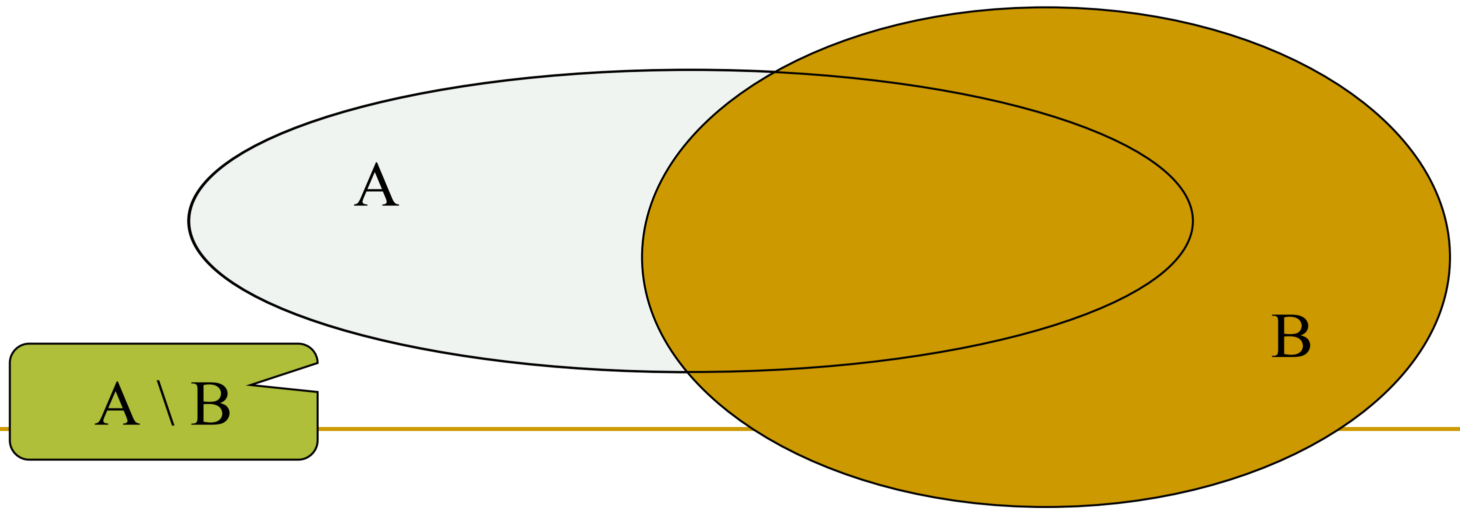
Пересечение

- *Пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.
  - Свойства
    - рефлексивность $A \cap A = A$
    - коммутативность $A \cap B = B \cap A$
    - ассоциативность $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
    - свойство 0 $A \cap \varnothing = \varnothing$
    - свойство 1 $A \cap \mathbf{U} = A$



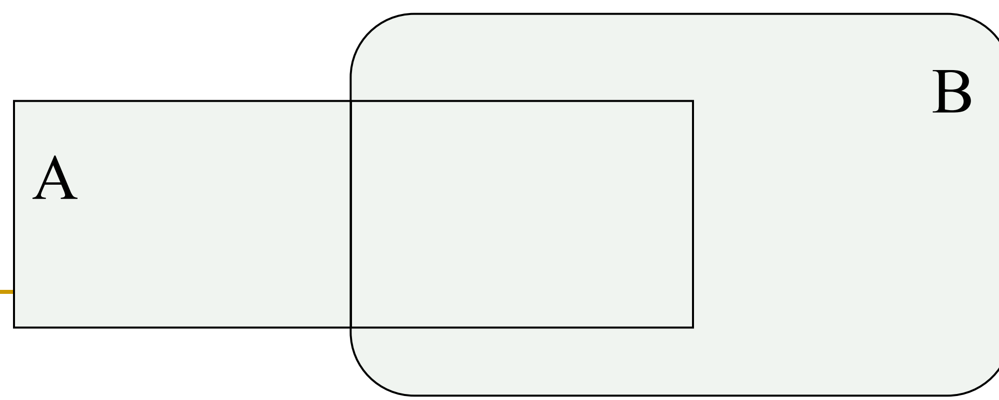
Разность

- *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.
  - Свойства
    - свойство 0 $A \setminus \varnothing = A$ $\varnothing \setminus A = \varnothing$
    - свойство 1 $A \setminus \mathbf{U} = \varnothing$ $\mathbf{U} \setminus A = \overline{A}$



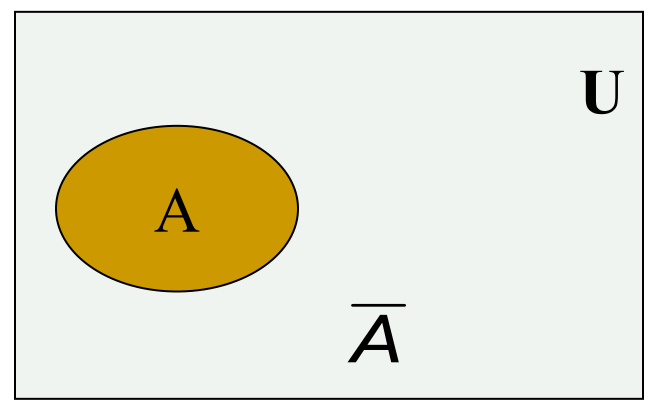
Симметрическая разность

- *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат объединению множеств A и B, и не принадлежат их пересечению.
  - Свойства
    - коммутативность $A / B = B / A$
    - ассоциативность $A / (B/C) = (A/B) / C = A / B / C$
    - свойство 0 $A / \varnothing = A$
    - свойство 1 $A / \mathbf{U} = \overline{A}$



Дополнение

- *Дополнением* множества А до универсального множества называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат универсальному множеству, и не принадлежат множеству А.
  - Свойства
    - $A \cup \overline{A} = \mathbf{U}$ $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing$
    - инволютивность $\quad \overline{\overline{A}} = A$



Разбиения и покрытия

- Система множеств $\mathbf{X}=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ называется ***разбиением*** множества М, если она удовлетворяет условиям:
  - любое множество системы есть подмножество множества М: $X_i \in \mathbf{X} : X_i \subseteq M,\ 1 \le i \le n;$
  - любые два множества системы являются непересекающимися: $X_i \in \mathbf{X},\ X_j \in \mathbf{X} :\ i \ne j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$
  - объединение всех множеств системы дает множество М:

$$\bigcup_{1 \le i \le n} X_i = M$$

Алгебра подмножеств

- Алгебра = <Базовое множество, Операции>

  Результат применения любой операции к элементам базового множества также является элементом базового множества

- Алгебра подмножеств

  $$\boldsymbol{A_M} = <2^{\mathbf{U}}, \{\cup, \cap, \setminus, \neg\}>$$

  Множество всех подмножеств универсума с операциями объединения, пересечения , разности и дополнения образует *алгебру подмножеств* множества **U**.

Законы теории множеств

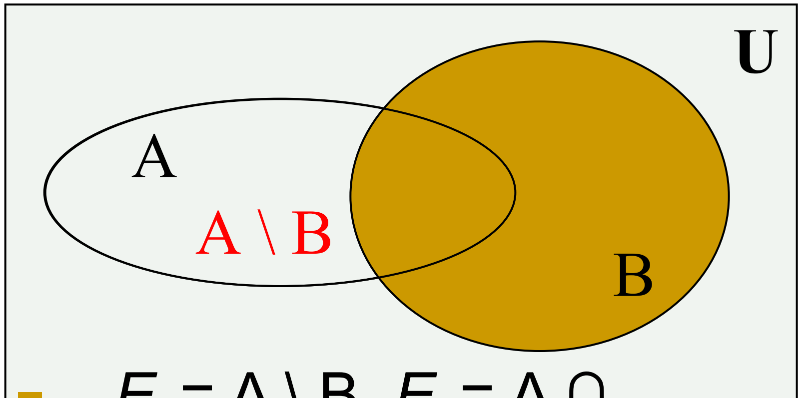
- Дистрибутивный
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Закон поглощения
  - $(A \cap B) \cup A = A$ $(A \cup B) \cap A = A$
- Законы де Моргана
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Выражение для разности
  - $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

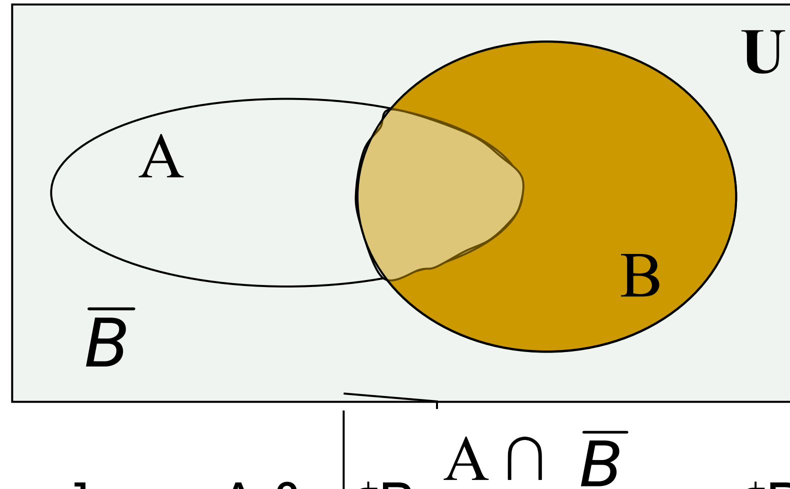
Метод доказательства законов алгебры подмножеств

- Обозначим алгебраическое выражение над множествами A, B, C как E(A,B,C). Результат выполнения операций данного выражения есть некоторое множество E.
- Пусть E_1 и E_2 два выражения над A,B,C.
- Чтобы доказать, что $E_1=E_2$, достаточно показать, что $E_1 \subseteq E_2$ и $E_2 \subseteq E_1$.
- Чтобы доказать, что $E_1 \subseteq E_2$, нужно убедиться, что из $x \in E_1$ следует $x \in E_2$; и, аналогично, для $E_2 \subseteq E_1$ – что из $x \in E_2 \Rightarrow x \in E_1$.

Пример доказательства

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$





- $E_1 = A \setminus B$, $E_2 = A \cap \overline{B}$.

$x \in E_1$ ⇒ [по определению разности] $x \in A$ & $x \notin B$, если $x \notin B$, но $x \in \mathbf{U}$, значит $x \in \overline{B}$, и в то же время $x \in A$, следовательно, $x \in A \cap \overline{B} = E_2$, значит $E_1 \subseteq E_2$.

$x \in E_2$ ⇒ [по определению пересечения] $x \in A$ & $x \in \overline{B}$, если $x \in \overline{B}$, но $x \in \mathbf{U}$, значит $x \notin B$, и в то же время $x \in A$, следовательно, $x \in A \setminus B = E_1$, значит $E_2 \subseteq E_1$.

Так как, было показано, что $E_1 \subseteq E_2$ & $E_2 \subseteq E_1$, ⇒ $E_1 = E_2$.

Тождество доказано. ❐

Структурированное множество

- ***Кортеж*** - последовательность элементов, или совокупность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место.
- Элементы данной совокупности называются *компонентами* кортежа.
- Обозначение:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - кортеж длины *n* с компонентами $a_1, \ldots, a_n$.
  - $( ) = \Lambda$ - пустой кортеж.
- Примеры:
  - множество слов во фразе;
  - (x,y) - координаты точки на плоскости;
  - запись в таблице базы данных.
- Отличие от обычного множества: кортеж может содержать одинаковые по значению компоненты, например, точка с координатой (5,5).

Вектор. Гиперпространство.

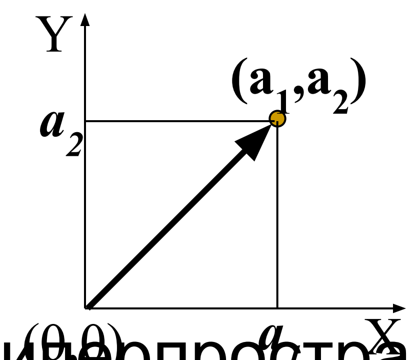
- ***Вектор*** (*точка пространства*) - кортеж, элементами которого являются вещественные числа.
- Пространство, определяемое *n*-мерными векторами, называют *n*-мерным пространством (пространством *n* измерений) или ***гиперпространством***.

Проекция вектора

- Если кортеж (a_1,a_2) рассматривать как вектор, проведенный из начала координат в данную точку (a_1,a_2), то компоненты a_1, a_2 будут *проекциями* вектора на оси координат.

$$\text{Пр}_X(a_1,a_2) = a_{1.}$$

$$\text{Пр}_Y(a_1,a_2) = a_{2.}$$



- Если a = $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - вектор гиперпространства, то $\text{Пр}_i\, a = a_i, \; i = 1, 2, \ldots, n;$

$\text{Пр}_{i,j,\ldots,k}\, a = (a_i, a_j, \ldots, a_k),$ где $i, j, \ldots, k$ номера осей, такие что, $1 \le i < j < \ldots < k \le n;$

$$\text{Пр}_{\varnothing}\, a = \Lambda.$$

Прямое произведение множеств

- ***Прямым*** (*декартовым*) ***произведением*** множеств A и B, называется множество **A×B**, состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, вторая - B.

  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \;\&\; b \in B\}$.

  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\ , i=1, 2, \ldots, n\}$.

- Свойства:
  - декартово произведение не коммутативно:

    $A \times B \neq B \times A$.
  - декартово произведение есть пустое множество, если один из сомножителей - пустое множество:

    $A \times B = \varnothing \;\Leftrightarrow\; A = \varnothing \vee B = \varnothing$.

Степень множества

- ***Степенью*** множества A называется его прямое произведение самого на себя: $A^n = \underbrace{A\times A\times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$. Соответственно,

  $A^0 = \{\Lambda\}$; $A^1 = A$; $A^2 = A\times A$; $A^n = A\times A^{n-1}$.

- Теорема: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

  <u>Доказательство</u>:
  1-й компонент кортежа (a,b) можно выбрать |A| способами,
  2-й компонент - |B| способами.
  Таким образом, имеется всего $|A| \cdot |B|$ различных кортежей (a,b).
  ❒.

- Следствие: $| A^n | = |A|^n$.

Проекция множества

- Пусть A - множество, состоящее из кортежей длины n, тогда ***проекцией множества A*** называют множество проекций кортежей из A.

  (операция проекции может применяться только к таким множествам, элементами которых являются кортежи одинаковой длины).

  - Если $A = X \times Y$, то $Пр_1 A = X$, $Пр_2 A = Y$.
  - Если $A \subseteq X \times Y$, то $Пр_1 A \subseteq X$, $Пр_2 A \subseteq Y$.

Соответствия

- ***Соответствие*** - это множество пар вида (a,b), образующихся при сопоставлении заданным образом элементов множества A элементам множества B,и сами сопоставляемые множества A и B.

$$q = (A, B, Q),\ Q \subseteq A \times B.$$

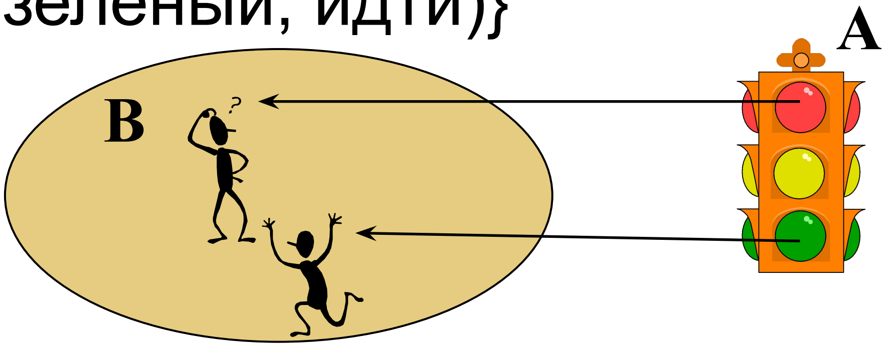
  - $Пр_A Q \subseteq A$ называется ***областью определения*** соответствия, или *источником* соответствия.
  - $Пр_B Q \subseteq B$ называется ***областью значений*** соответствия, или *приемником*.
  - Множество пар Q, определяющих соответствие, называется ***графиком*** соответствия.

Способы задания соответствия

- В виде описания в соответствии с определением

  A={красный, желтый, зеленый}; B={стоять, идти};

  Q={(красный, стоять),(зеленый, идти)}
- Графически



- В виде матрицы

A\B	стоять	идти
красный	1	0
желтый	0	0
зеленый	0	1

Обратное соответствие

- Соответствие, обозначаемое как $\mathbf{q^{-1} = (B, A, Q^{-1})}$, где $Q^{-1} \subseteq B \times A$, является ***обратным*** для соответствия $q=(A,B,Q)$, где $Q \subseteq A \times B$, и получается, если данное соответствие q рассматривать в обратном направлении.
  - Пример:

  A={красный, желтый, зеленый}; B={стоять, идти};

  Q={(красный, стоять),(зеленый, идти)}.

  Q^{-1}={(стоять, красный),(идти, зеленый)}.
  - Свойства:

    $(q^{-1})^{-1} = q$.

Композиция соответствий

- ***Композиция соответствий*** - это операция с 3-мя множествами A, B, C, на которых заданы два соответствия q = (A, B, Q), где $Q \subseteq A \times B$ и p = (B, C, P), где $P \subseteq B \times C$, причем область значений первого соответствия q совпадает с областью определения второго p $Пр_2 Q = Пр_1 P$.
- Обозначение:

$$q(p) = (A, C, Q \circ P), \quad Q \circ P \subseteq A \times C.$$