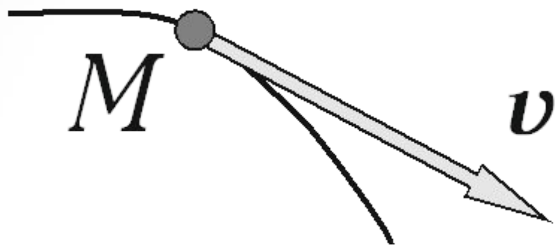
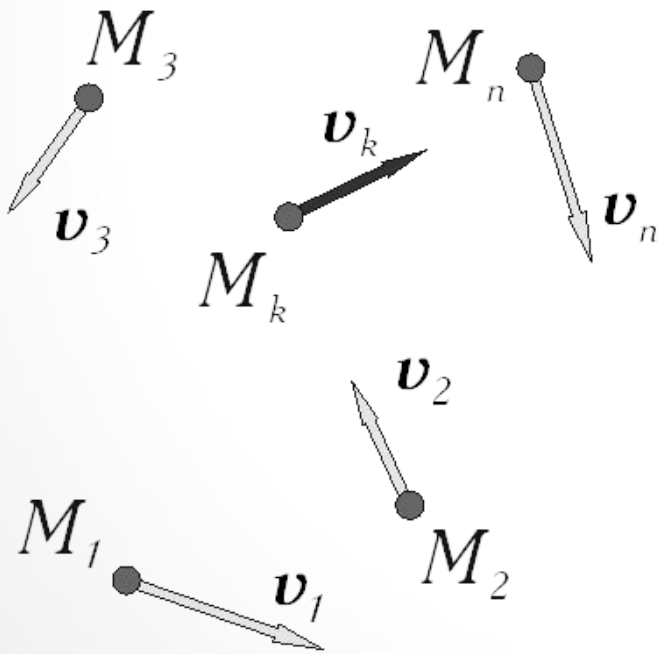
# Лекция 6

# Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

# Кинетическая энергия материальной точки и механической системы



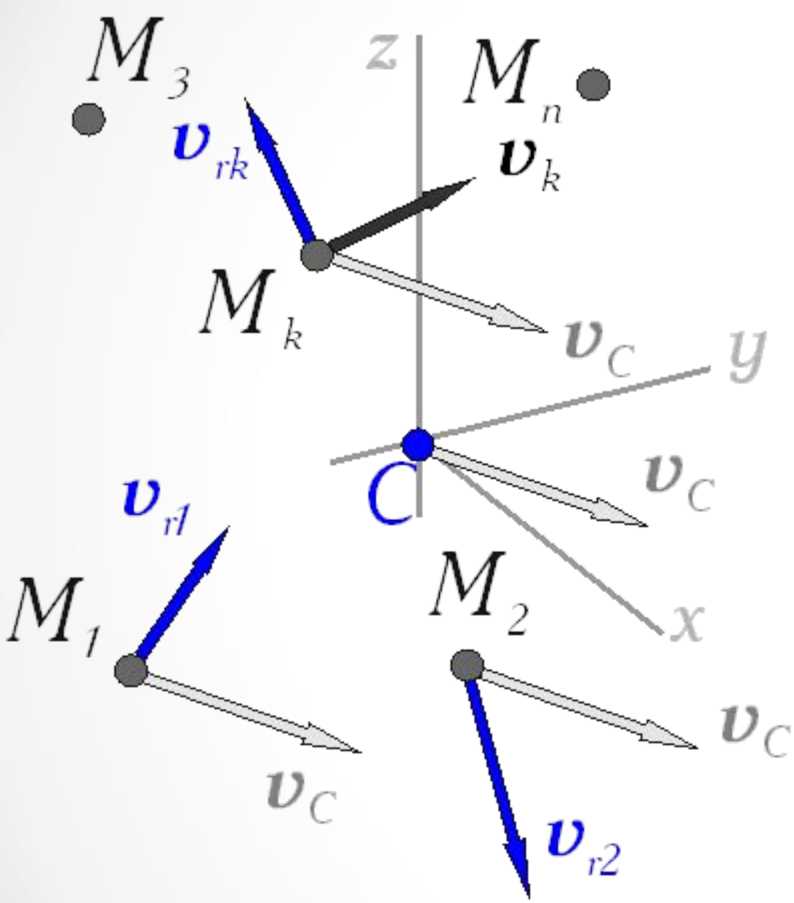

$$T = \frac{mv^2}{2}$$




$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$$

$$\boxed{T \geq 0}$$

# Теорема Кёнига




Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии поступательного движения системы вместе с ее центром масс и кинетической энергии системы в ее движении относительно центра масс

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_{rC}$$

# Теорема Кёнига

Доказательство:

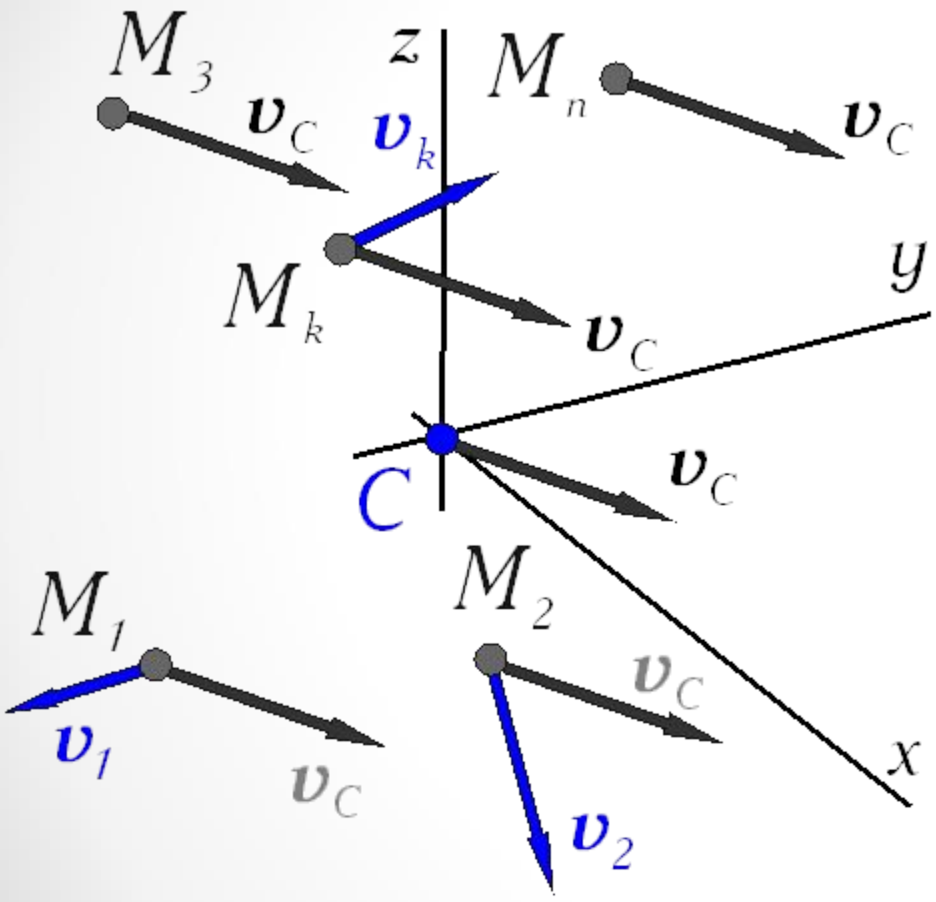
$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{\upsilon}_k^2, \qquad \bar{\upsilon}_k = \bar{\upsilon}_C + \bar{\upsilon}_{rC}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\bar{\upsilon}_C + \bar{\upsilon}_{rk}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right)}}_{M}\upsilon_C^2 + \underbrace{\cancel{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{\upsilon}_{rk}\right)}}_{M\bar{\upsilon}_{rC} = 0}\bar{\upsilon}_C + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{rk}^2}}_{T_{rC}}$$

$$T = \frac{1}{2}M\upsilon_C^2 + T_{rC}$$

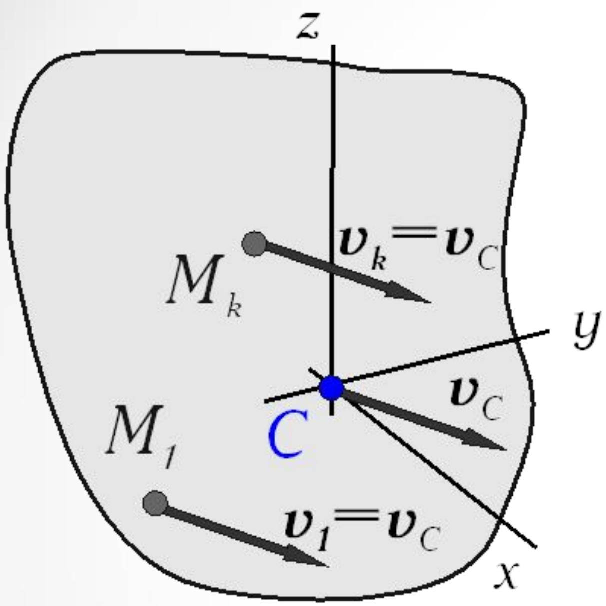
# Кёнигова система координат




Кениговой системой координат называется система координат, совершающая поступательное движение вместе с центром масс механической системы

$$Cxyz$$

# Кинетическая энергия твердого тела




1. Поступательное движение

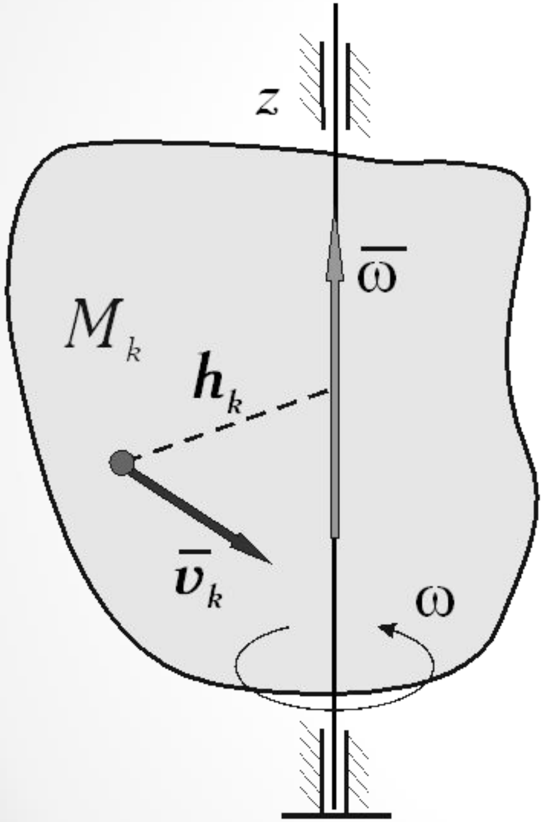
$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k^2, \quad \bar{v}_k = \bar{v}_C, \quad T = \frac{1}{2} M v_C^2$$

При поступательном движении тела все динамические величины определяются также как для точки, которая движется также как центр масс системы и имеет массу равную массе всей системы

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C, \quad \bar{K}_O = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \cancel{\bar{K}_{rC}}_{=0}$$

# Кинетическая энергия твердого тела

2. Вращение вокруг неподвижной оси

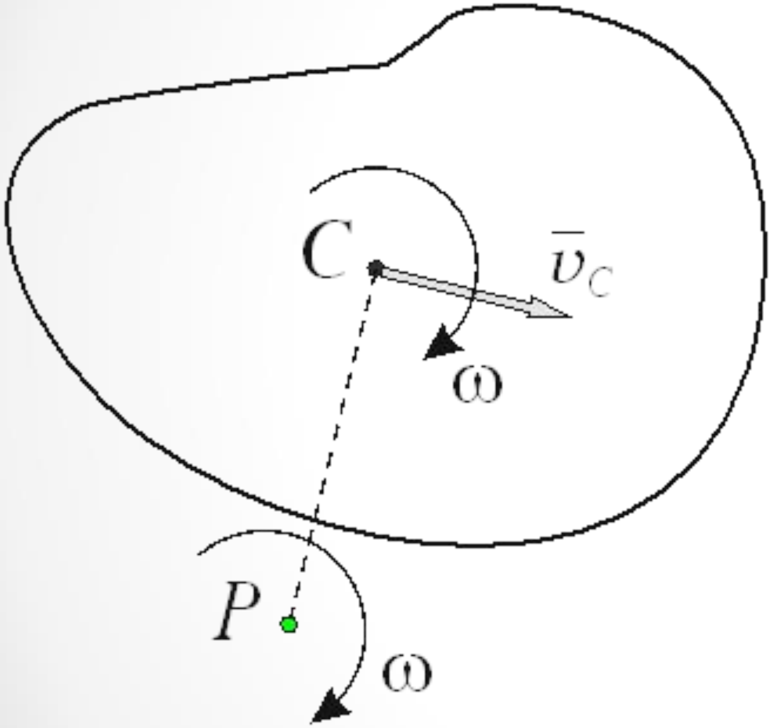



$$v_k = h_k \omega$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

# Кинетическая энергия твердого тела

## 3. Плоско-параллельное движение




$$T = \frac{1}{2} M \upsilon_C^2 + \frac{1}{2} I_z^{(C)} \omega$$

$$T = \frac{1}{2} I_z^{(P)} \omega^2 =$$

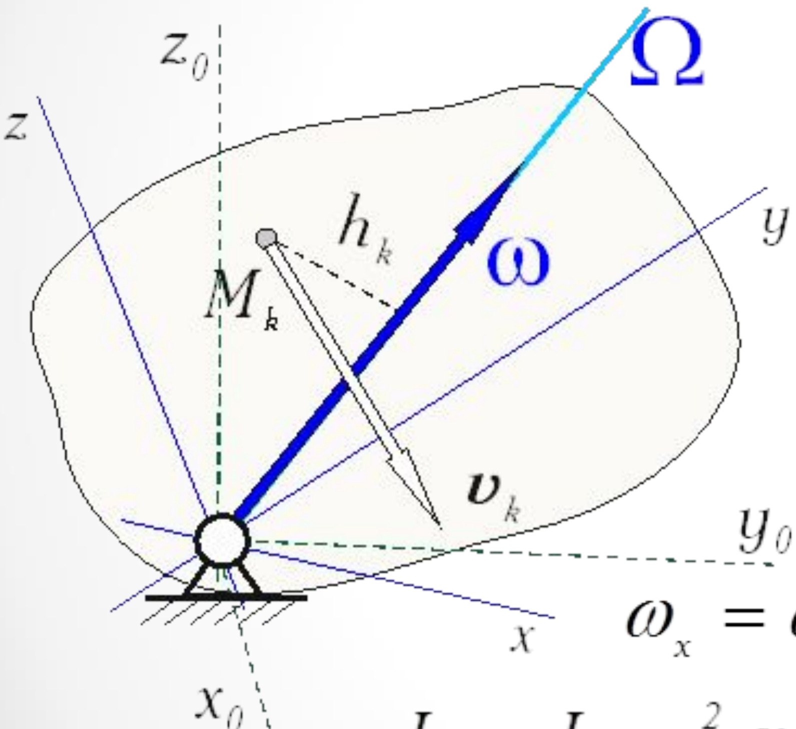
$$= \frac{1}{2} \left( I_z^{(C)} + M \cdot PC^2 \right) \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I_z^{(C)} \omega^2 + \frac{1}{2} M \left( PC\omega \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I_z^{(C)} \omega^2 + \frac{1}{2} M \upsilon_C^2$$

# Кинетическая энергия твердого тела

## 4. Вращение вокруг неподвижного центра




$$\bar{\upsilon} = \bar{\omega} \times \bar{r}_k, \qquad \upsilon_k = \omega h_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I_\Omega \omega^2$$

$$\omega_x = \omega\cos\alpha,\ \omega_y = \omega\cos\beta,\ \omega_z = \omega\cos\gamma$$

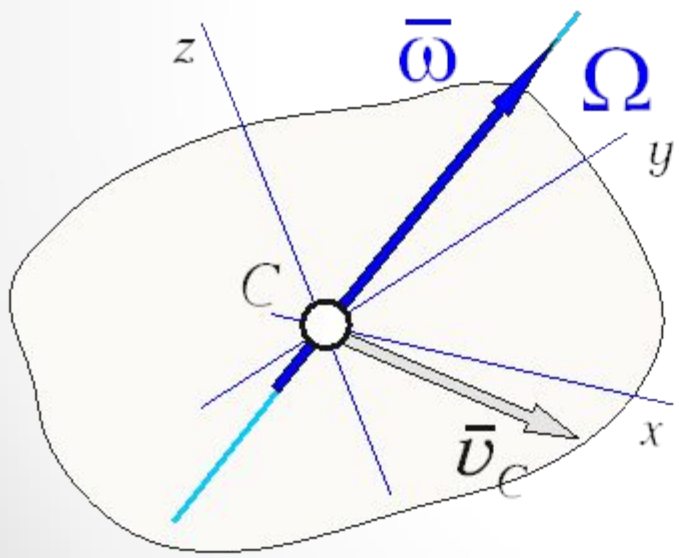
$$I_\Omega = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma -$$

$$- 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma$$

# Кинетическая энергия твердого тела

$$2T = I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 -$$
$$- 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{xz}\omega_x\omega_z$$

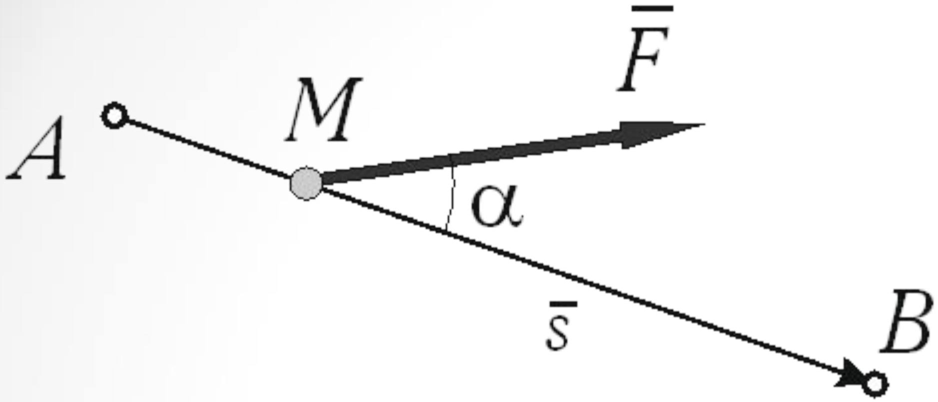
В главных осях инерции $\quad 2T = I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2$




5. Свободное твердое тело

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_\Omega^{(C)}\omega^2$$

# Работа силы




$$\bar{F} = const$$

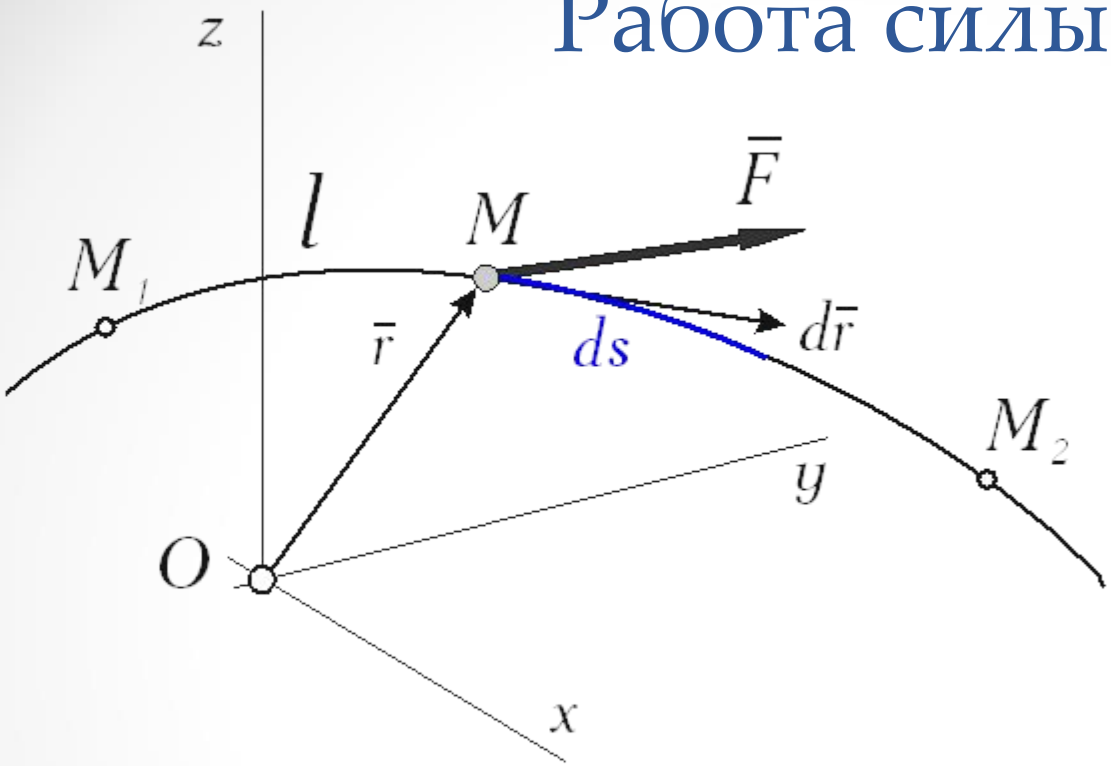
$$A = F \cdot AB \cdot \cos\alpha = \bar{F} \cdot \bar{s}$$

$$0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad A > 0,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad A = 0,$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi \qquad A < 0.$$

# Работа силы



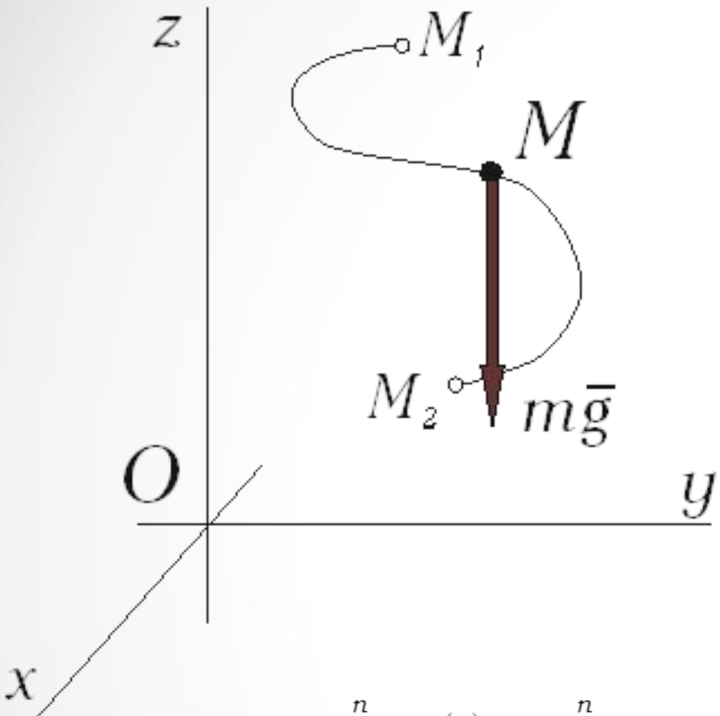

$$\delta A = \bar{F}\left(\bar{r}\right) d\bar{r}$$

$$A_{1,2} = \int_l \bar{F}\left(\bar{r}\right) d\bar{r}$$

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\delta A = F ds \cos\alpha = F_\tau ds$$

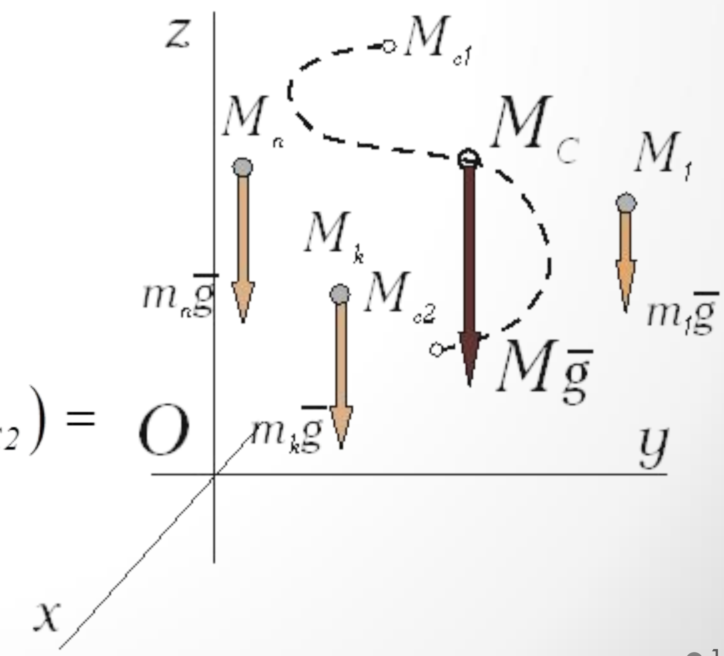
# Работа силы тяжести




$$\overline{F} = m\overline{g}, \quad F_x = F_y = 0, \quad F_z = -mg$$

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mgdz$$

$$A_{1,2} = -\int_{z1}^{z2} mgdz = mg\left(z_1 - z_2\right) = \pm mgh$$

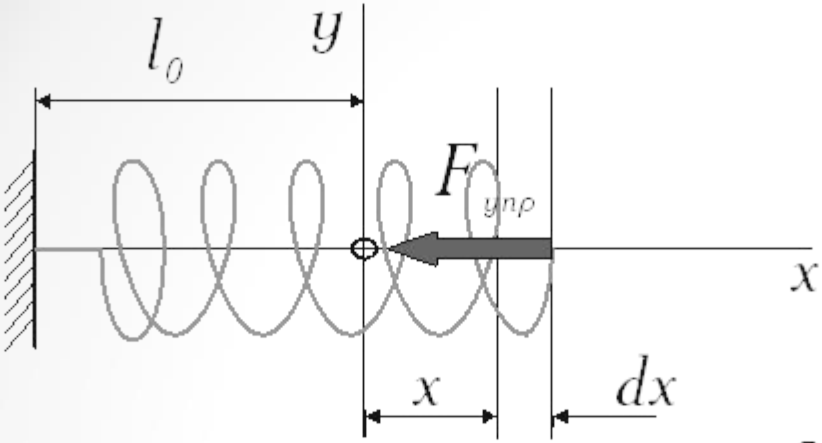



$$A_{1,2} = \sum_{k=1}^{n} A_{1,2}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} m_k g\left(z_{k1} - z_{k2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k z_{k1} g - \sum_{k=1}^{n} m_k z_{k2} g = Mg\left(z_{C1} - z_{C2}\right) =$$

$$= \pm MgH_C$$

# Работа силы упругости



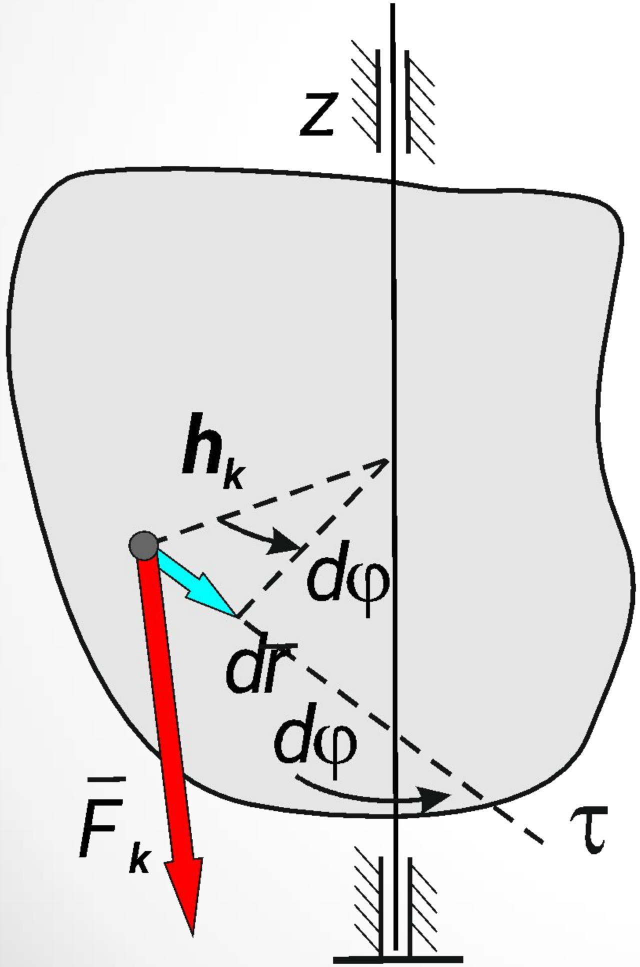

$$F_y = F_z = 0 \qquad F_x = -cx$$

$$\delta A = F_x dx = -cx dx$$

$$A_{1,2} = -\int_{x1}^{x2} cx dx = \frac{c}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{упр} = -\frac{1}{2}cx^2 = -\frac{1}{2}c\Delta^2$$

# Работа сил, приложенных к вращающемуся телу



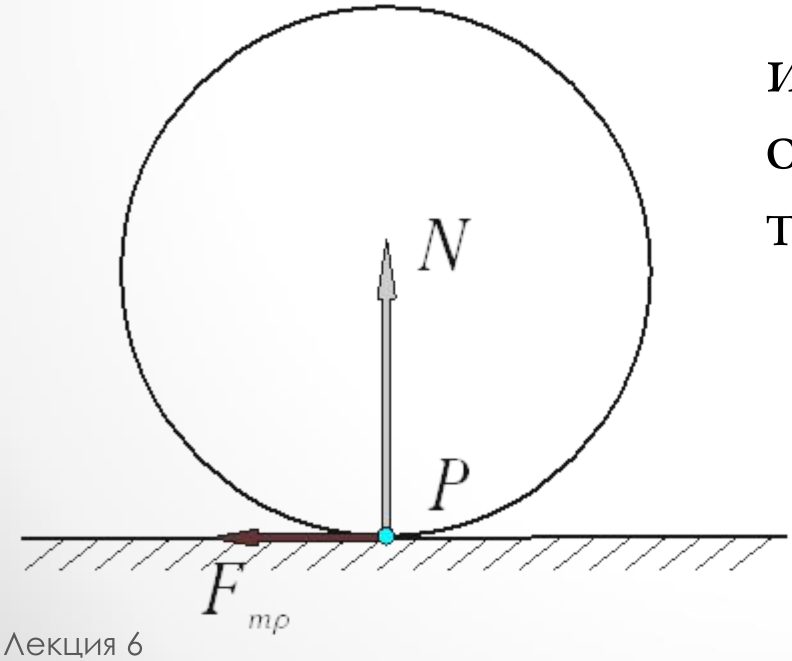

$$\delta A_k = \bar{F}_k d\bar{r}_k = F_k ds_k \cos\alpha =$$

$$= F_{k\tau} ds_k = F_{k\tau} h_k d\varphi = m_z\left(\bar{F}_k\right) d\varphi$$

# Работа реакций связей

Связи, наложенные на механическую систему, называются идеальными, если работа реакций этих связей на любом перемещении системы равна нулю.

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k d\bar{r}_k = 0$$




Достаточным условием идеальности связей является отсутствие в их реакциях сил трения.

$$\upsilon_P = 0$$

$$N\left(\bar{R}\right) = \left(\bar{N} + \bar{F}_{тр}\right)\bar{\upsilon}_P = 0$$

# Работа сил трения

Если силы трения отнести к активным силам, то все связи наложенные на механическую систему будут идеальными.

Работа силы трения скольжения

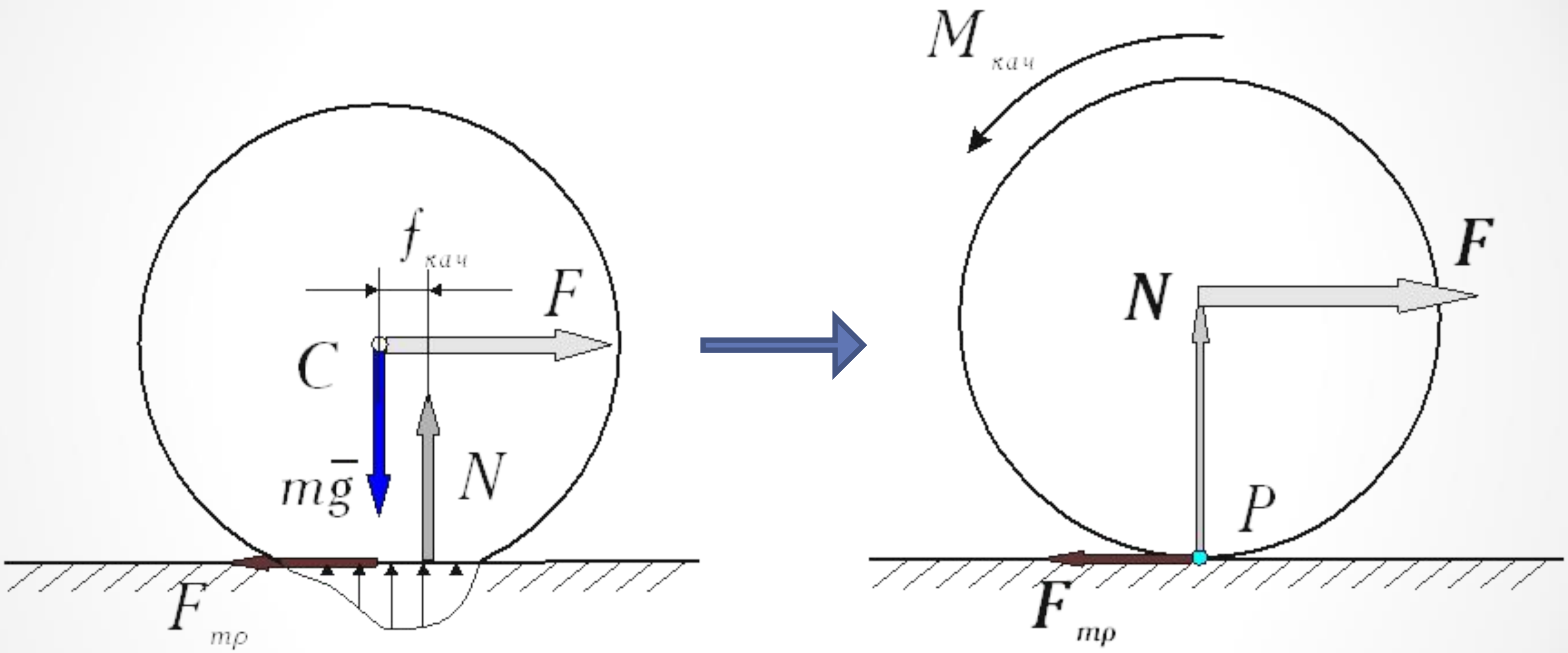
$$\delta A\left(\bar{F}_{mp}\right) = -F_{mp}ds, \quad F_{mp} = f_{mp} N$$

*На наклонной плоскости*

$$N = mg\cos\alpha = const \qquad A\left(\bar{F}_{mp}\right) = -F_{mp}s$$

# Работа сил трения

Работа момента трения качения




$$M_{кач} = f_{кач}N, \qquad \delta A\left(M_{кач}\right) = -M_{кач}d\varphi$$

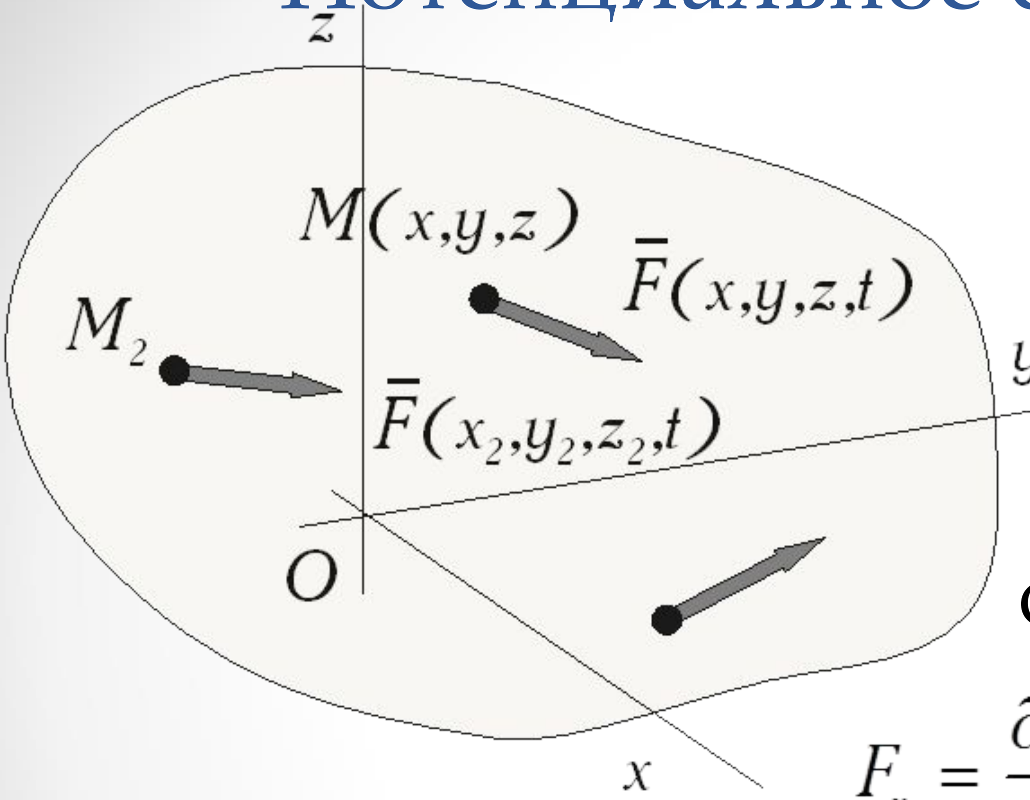
$$M_{кач} = const \qquad A\left(M_{кач}\right) = -M_{кач}\varphi$$

# Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Изменение кинетической энергии механической системы при переходе ее из начального положения в конечное равно сумме работ всех активных сил, приложенных к точкам и телам системы, на совершенном перемещении.

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^{акт}$$

# Потенциальное силовое поле




$$\bar F = \bar F(\bar r, t) = \bar F(x, y, z, t)$$

Стационарное поле

$$\bar F = \bar F(\bar r) = \bar F(x, y, z)$$

Силовая функция $U(x, y, z)$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

$$A_{1,2} = \int_{1,2} \delta A = \int_{1,2} dU = U_2 - U_1$$

# Потенциальное силовое поле

Потенциальная энергия

$$\Pi_1 = A_{1,0} = U_0 - U_1 \qquad \Pi = -U + C$$

$$A_{1,2} = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2$$

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Потенциальная энергия силы тяжести

$$\Pi\left(m\overline{g}\right) = mgH,$$

Потенциальная энергия сил упругости

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2$$

# Закон сохранения полной механической энергии (интеграл энергии)

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^{акт} = \Pi_0 - \Pi$$

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = E_{полн} = const$$

Механические системы, в которых сохраняется полная механическая энергия, называются консервативными