

Уравнение плоскости по трем точкам

С использованием матриц

Котова И. Е. МОУ СОШ №2
г. Бронницы

Что такое матрица и определитель

- *Матрица* — это просто таблица, заполненная числами. Матрицы бывают квадратными (когда количество строк совпадает с количеством столбцов) и прямоугольными (когда не совпадает);
- *Определитель* — это число, которое находится по специальному алгоритму из чисел, записанных в квадратной матрице. У каждого размера матрицы свой алгоритм. Для прямоугольных матриц определитель найти нельзя.

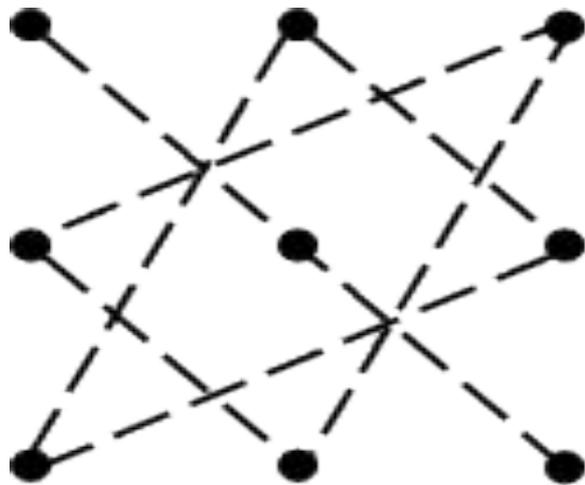
Квадратные матрицы

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 11 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

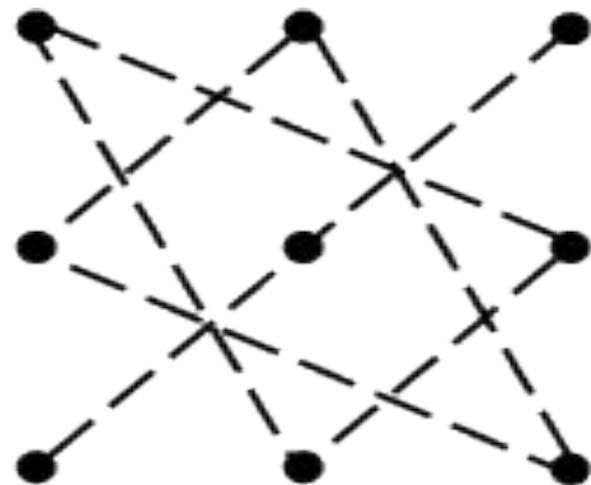
Прямоугольные матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Как считать определитель 3-го порядка



+



-

Что это за пентаграммы?

- На первом рисунке мы берем три числа, лежащие на диагонали, и перемножаем их. Затем берем другие *тройки чисел*, лежащие в вершинах треугольников, и тоже перемножаем их между собой. В результате всех этих действий мы получим три числа, которые надо сложить (поэтому внизу левой картинке стоит знак плюс).
- Теперь разбираемся со второй картинкой. Здесь мы снова берем и перемножаем три числа, но уже на другой диагонали. Так же мы снова берем два треугольника и перемножаем числа, стоящие в их углах (отдельно для каждого треугольника). Полученные три числа опять складываем, а результат вычитаем из первого числа (поэтому внизу справа стоит знак минус).

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 225 - 225 = 0.$$

$$1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$$

$$2 \cdot 6 \cdot 7 = 84;$$

$$3 \cdot 4 \cdot 8 = 96.$$

$$45 + 84 + 96 = 225$$

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

$$2 \cdot 4 \cdot 9 = 72;$$

$$1 \cdot 6 \cdot 8 = 48;$$

$$105 + 72 + 48 = 225$$

Вычислить определитель

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Уравнение плоскости

- $Ax + By + Cz + D = 0$

Плоскость задается тремя точками

$$A(x_1; y_1; z_1) \quad B(x_2; y_2; z_2) \quad C(x_3; y_3; z_3)$$

$T(x; y; z)$ точка с произвольными координатами, принадлежащая этой плоскости.

Проведем векторы и найдем их координаты

$$\vec{AA} \{ \tilde{o}_2 - \tilde{o}_1; \acute{o}_2 - \acute{o}_1; z_2 - z_1 \}$$

$$\vec{AC} \{ \tilde{o}_3 - \tilde{o}_1; \acute{o}_3 - \acute{o}_1; z_3 - z_1 \}$$

$$\vec{AO} \{ \tilde{o} - \tilde{o}_1; \acute{o} - \acute{o}_1; z - z_1 \}$$

Составляем квадратную матрицу

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Так как вектора лежат в одной плоскости, определитель равен нулю.

Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки

- $A_1 = (0, 0, 1);$
 $B_1 = (1, 0, 0);$
 $C_1 = (1, 1, 1);$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - 0 & 0 - 0 & 0 - 1 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & 1 - 1 \\ x - 0 & y - 0 & z - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрываем определитель:

$$a = 1 \cdot 1 \cdot (z - 1) + 0 \cdot 0 \cdot x + (-1) \cdot 1 \cdot y = z - 1 - y;$$

$$b = (-1) \cdot 1 \cdot x + 0 \cdot 1 \cdot (z - 1) + 1 \cdot 0 \cdot y = -x;$$

$$d = a - b = z - 1 - y - (-x) = z - 1 - y + x = x - y + z - 1;$$

$$d = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y + z - 1 = 0;$$