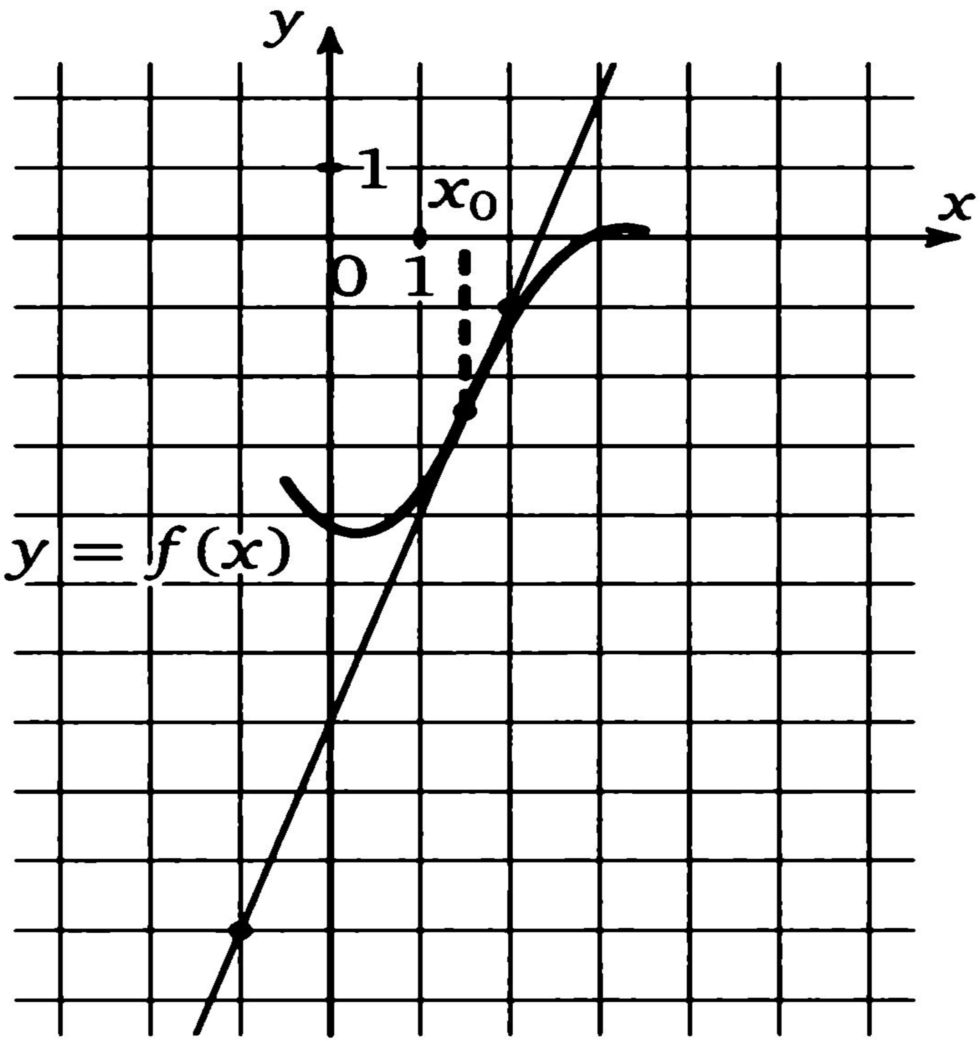
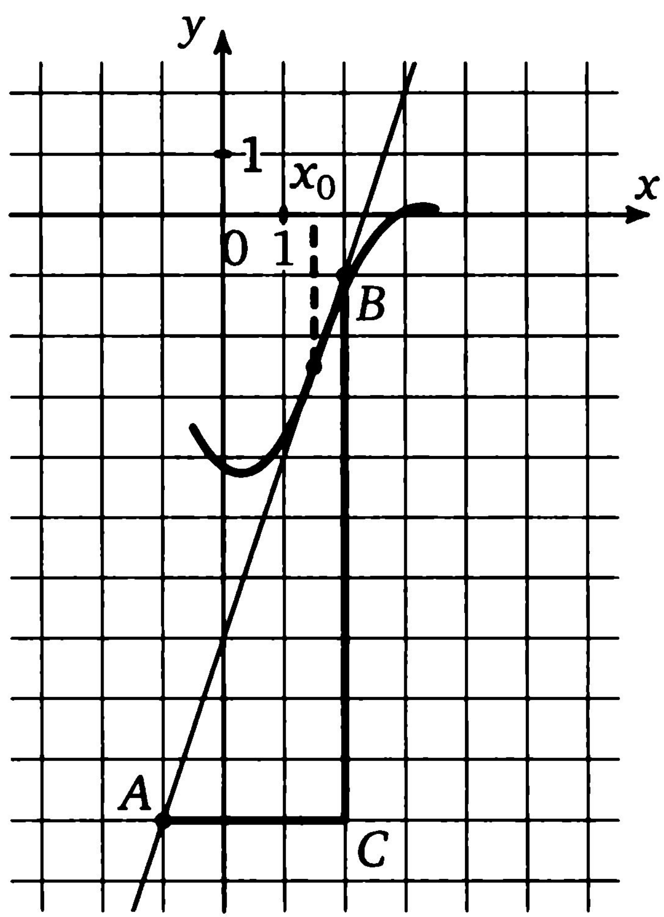
ЕГЭ .Математика. Задачи В8 Геометрический смысл производной.

Учитель математики МОУ СОШ с. Верх – Чита
Селезнёва Любовь Владимировна.

1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

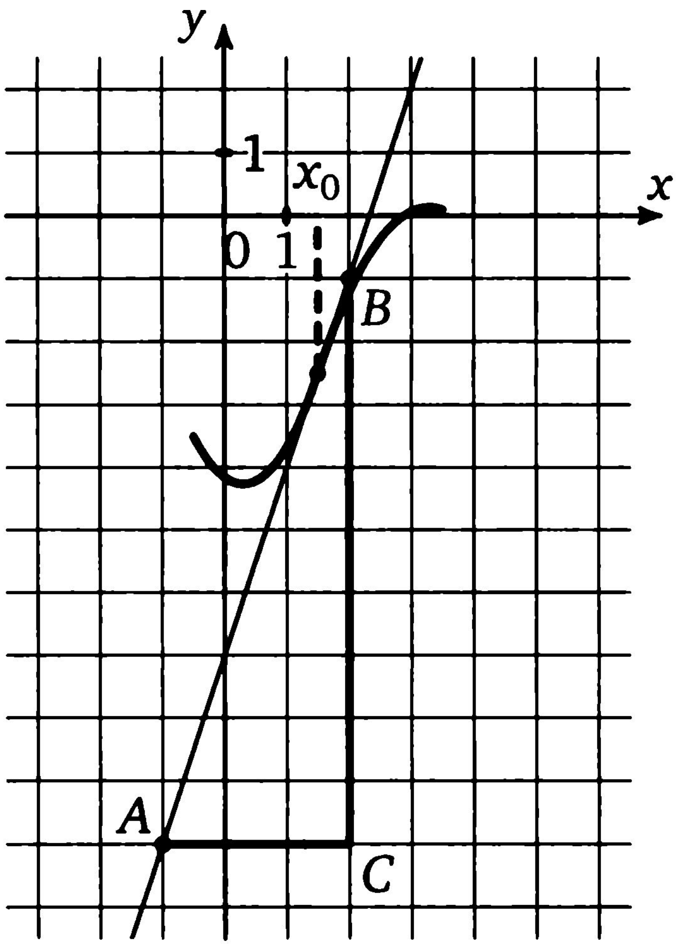


Решение: Значение производной функции *f(x)* в точке x_0 равно $tg\,\alpha$- угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке. Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки А и В, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых – целые числа, причем точка А расположена левее (её абсцисса меньше).



Знак производной (углового коэффициента) можно определить по рисунку, например, так: если касательная «смотрит вверх» - точка В лежит выше точки А, - то производная положительна, если точка В ниже, то отрицательна (если касательная горизонтальна, то производная равна нулю).

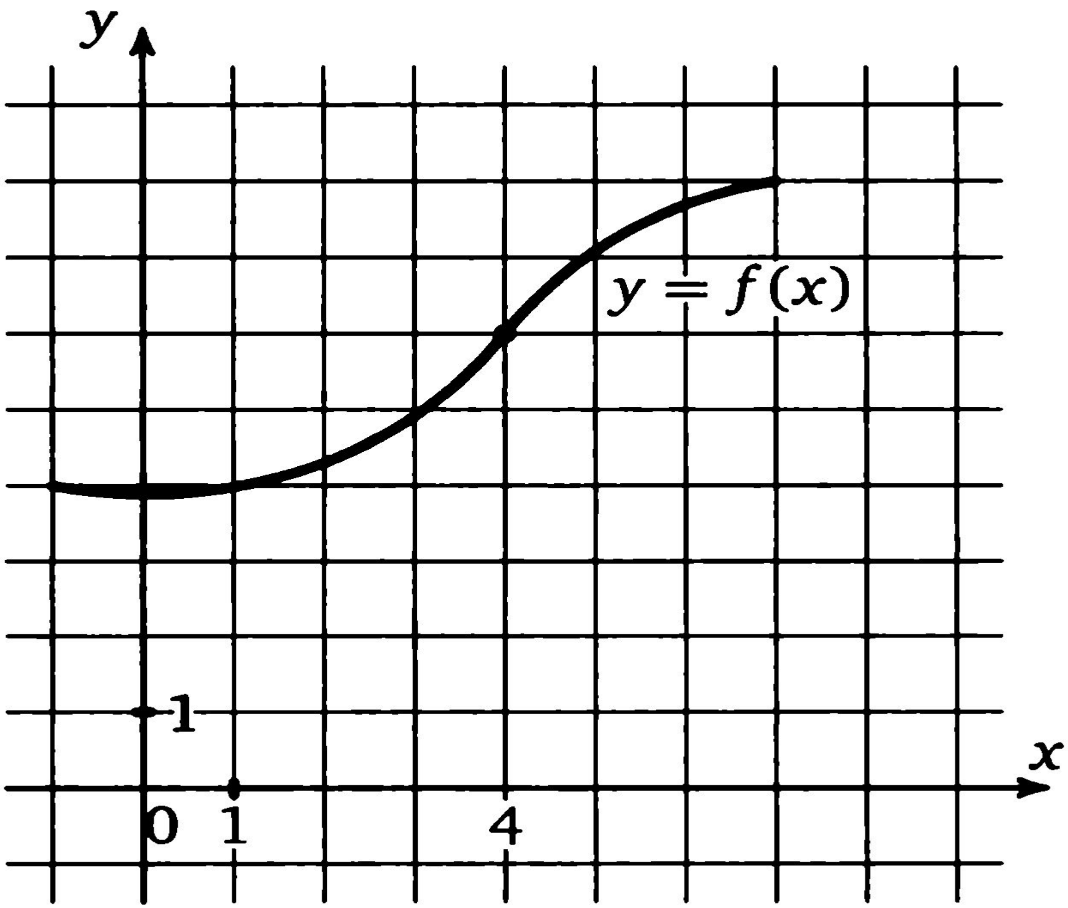
Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC (см. рисунок).



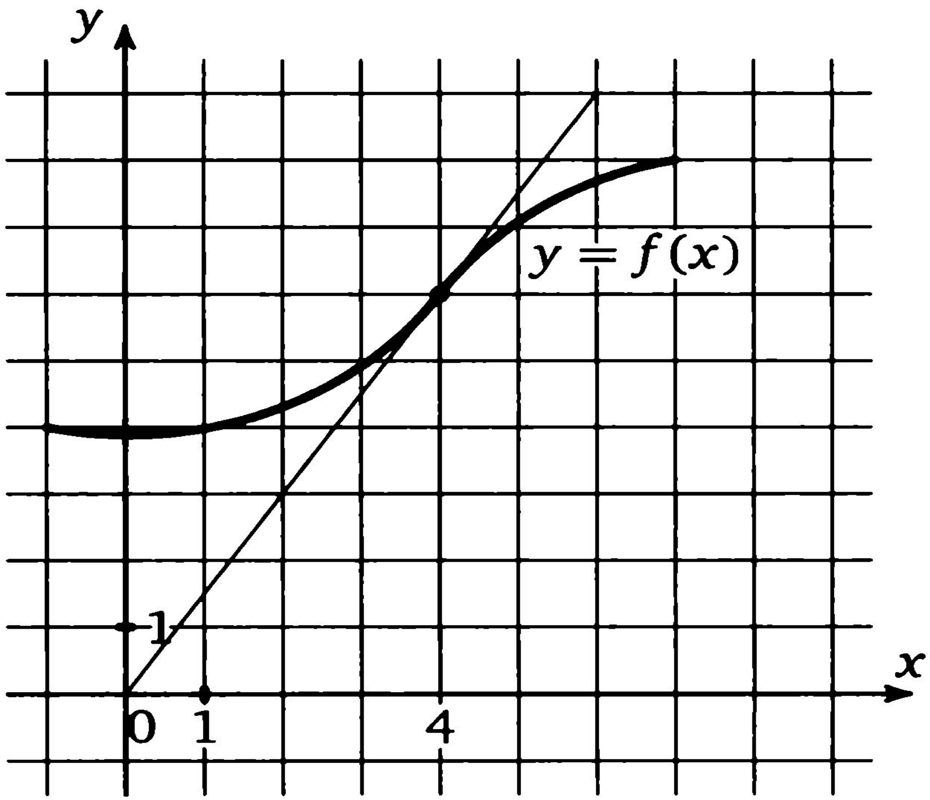
Модуль углового коэффициента будет равен $\frac{BC}{CA}$. Найдем координаты точки A, опустив перпендикуляры на оси Ox и Oy (на рисунке показаны пунктиром). Имеем в первой задаче: $A(-1; -10)$, $B(2; -1)$ и $C(2; -10)$. Тогда длина BC равна разнице ординат точек B и C, то есть $BC = -1 - (-10) = -1 + 10 = 9$, длина AC равна разнице абсцисс точек C и A, $CA = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$. Отсюда искомое значение производной равно $\frac{9}{3} = 3$.

Ответ: 3.

Задача № 2.
На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику проведенная в точке 4, проходит через начало координат. Найдите $f^{|}(4)$.

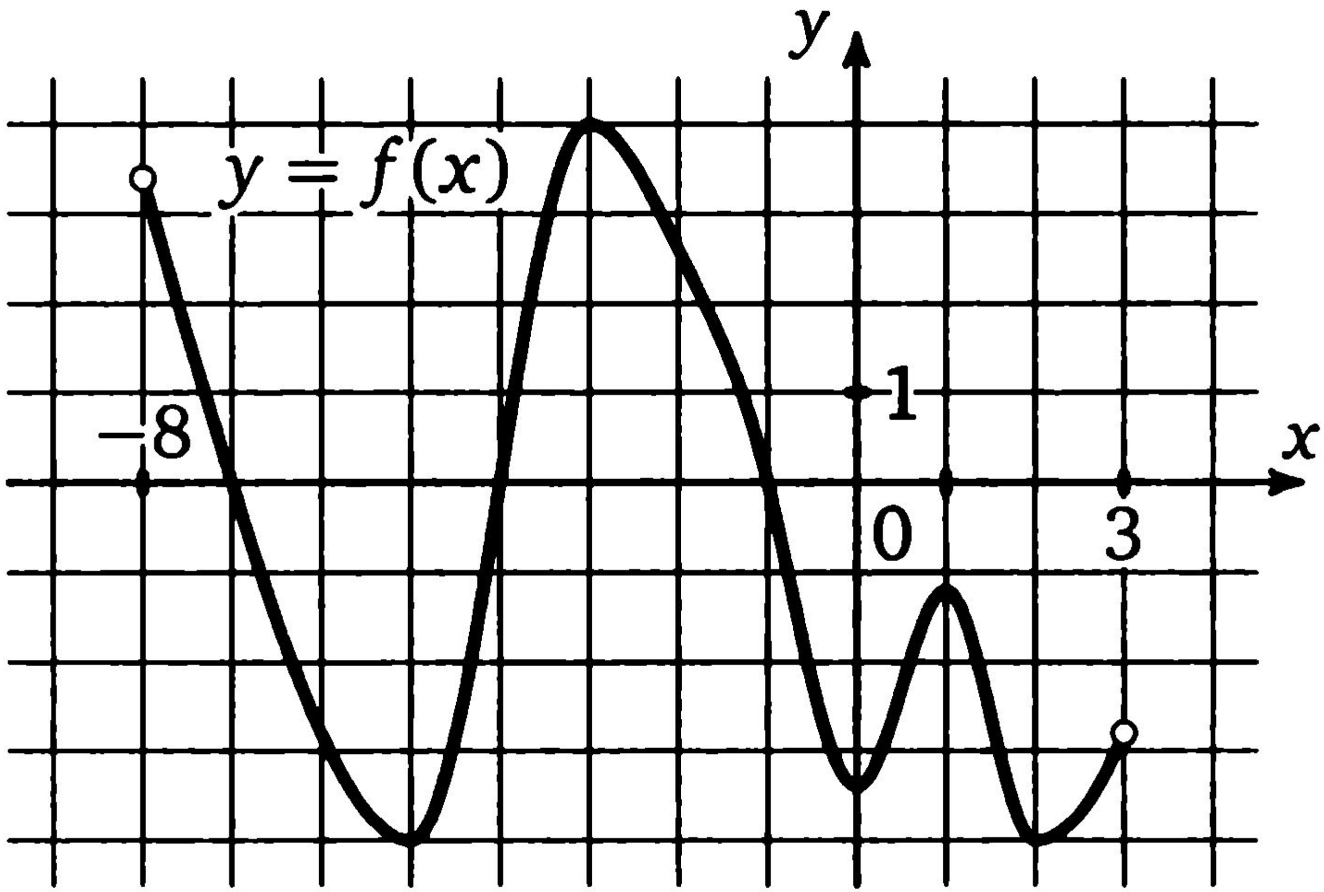


Решение: Если касательная проходит через начало координат, то можно изобразить её на рисунке, проводя прямую через начало координат и точку касания. Далее решение задачи аналогично решению задачи № 1.

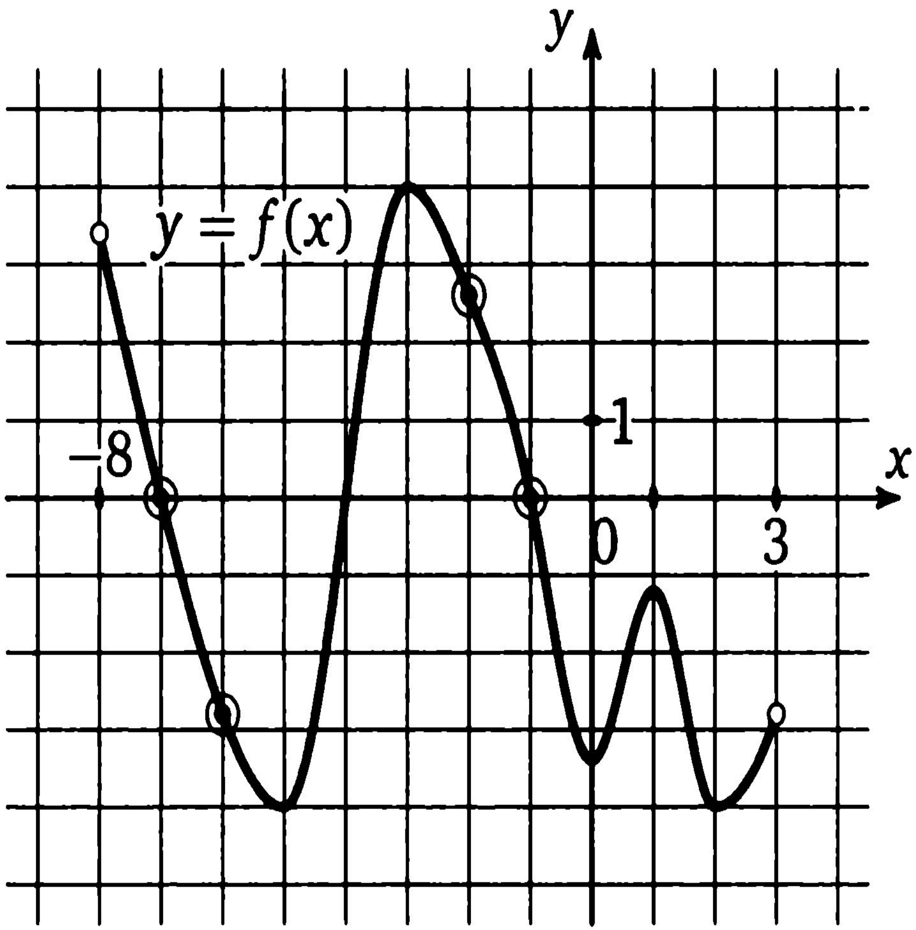


Ответ: 1,5

Задача № 3.
На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (-8;3). Определите количество целых чисел x_τ, ***таких, что*** $f(x_\tau)$ ***отрицательно.***



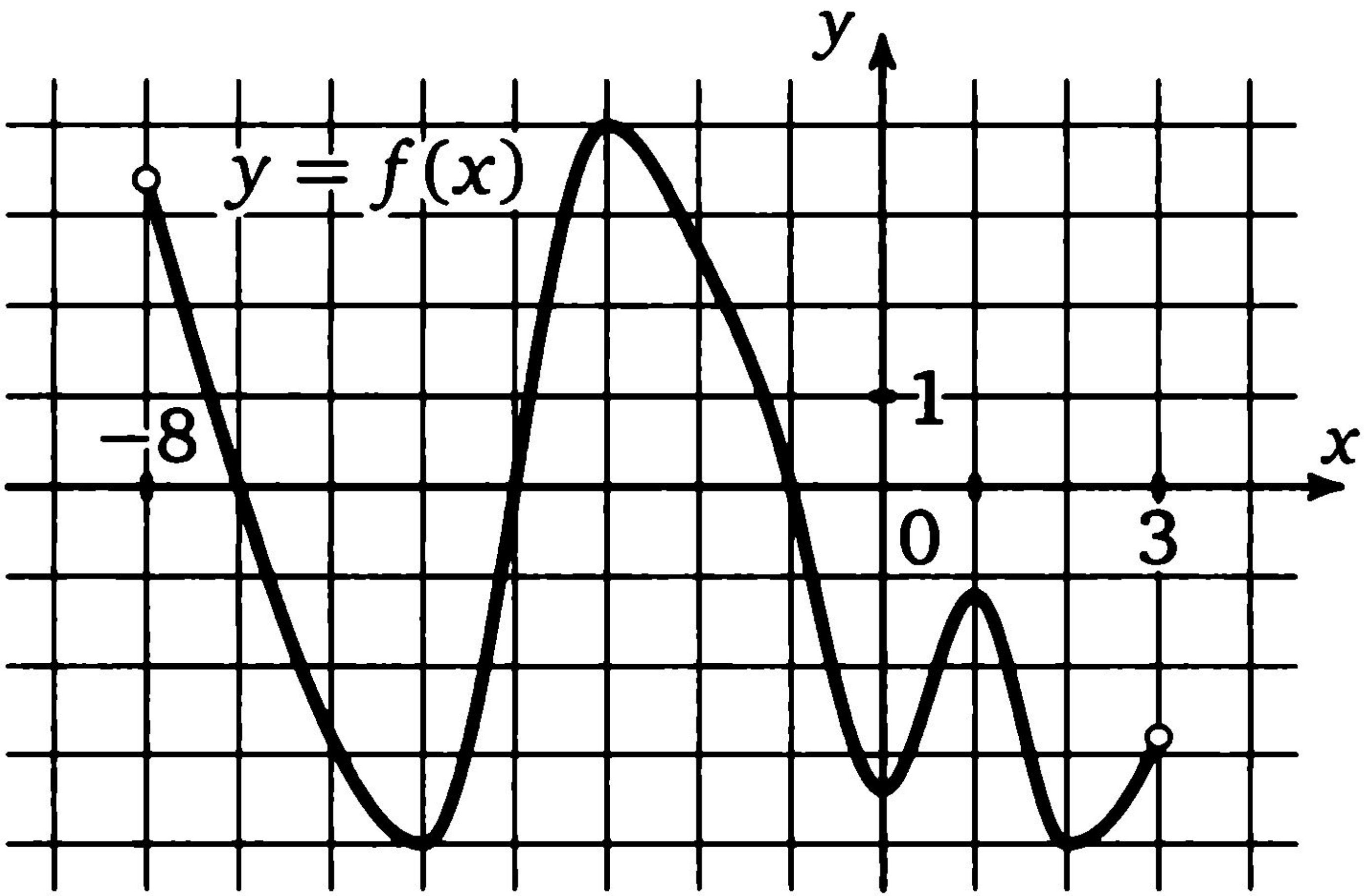
Решение: Решим эту задачу, воспользовавшись следующим утверждением. Производная непрерывно дифференцируемой функции на промежутке убывания (возрастания)не положительна (не отрицательна). Значит необходимо выделить промежутки



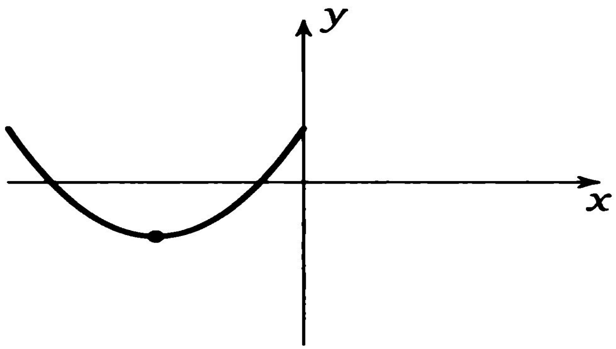
убывания функции и сосчитать количество целых чисел, принадлежащих этим промежуткам. Причем производная равна нулю на концах этих промежутков, значит, нужно брать только внутренние точки промежутков.

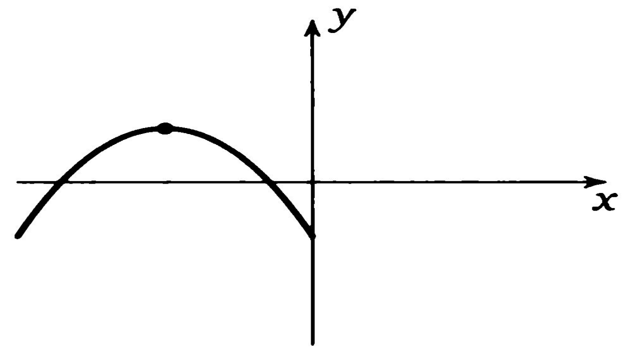
Ответ: 4

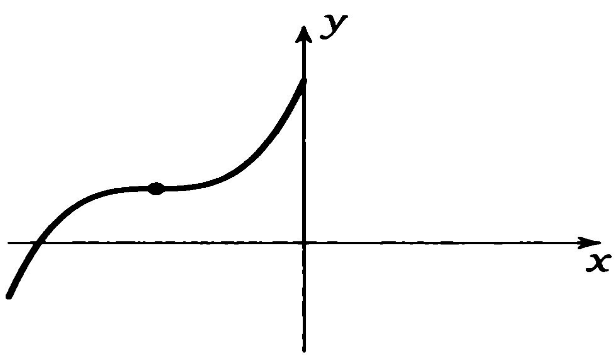
Задача № 4.
На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (-8; 3). Найдите количество точек, в которых производная функции f(x) равна нулю.



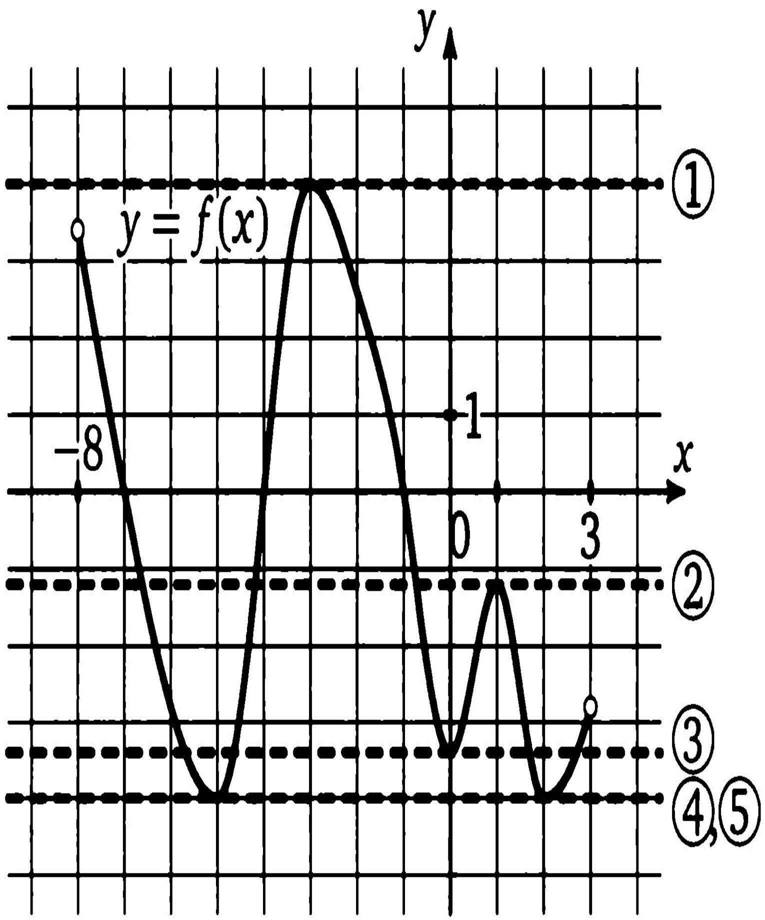
Решение: Возможны три различные «картинки» (формально говоря, в окрестности изолированного нуля производной).







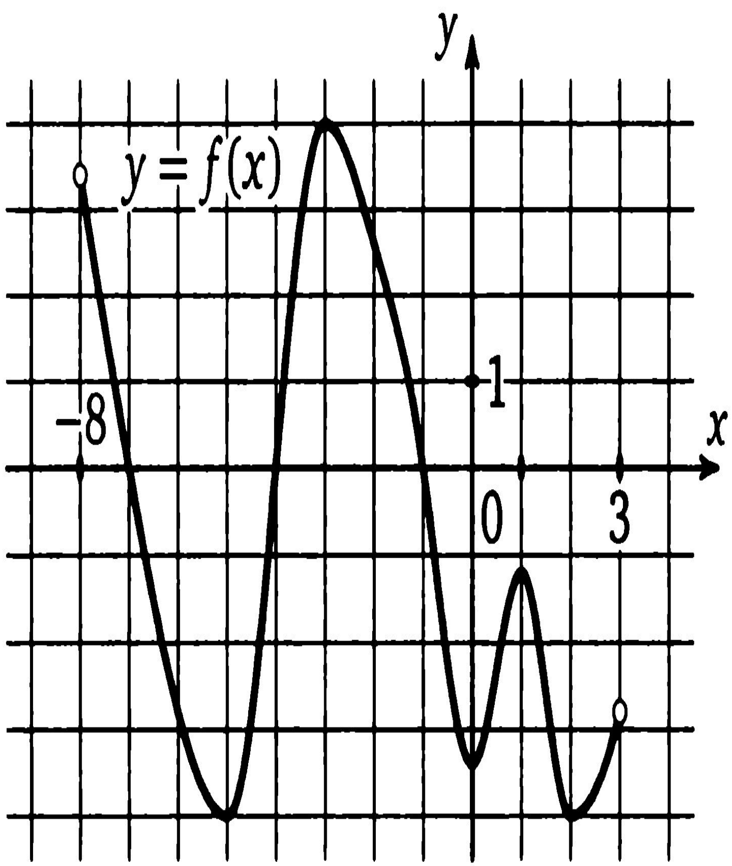
В нашем случае третий вариант не встречается, поэтому отметим на рисунке все места, где встречаются первые два варианта, и сосчитаем их количество.



Производная функции в точке x_0 равна нулю тогда и только тогда, когда касательная к графику функции, проведенная в точке с абсциссой x_0 , горизонтальна. Отсюда следует другой способ решения задачи – приложить линейку или край листа бумаги к рисунку сверху горизонтально (на рисунке показано пунктиром) и, двигая «вниз», сосчитать количество точек с горизонтальной касательной.

Если перед нами график прямолинейного движения, то вопрос задачи приобретает физический смысл, ведь значение производной в точке будет мгновенной скоростью, а точка, в которой производная равна нулю, соответственно точкой остановки. Ответ: 5

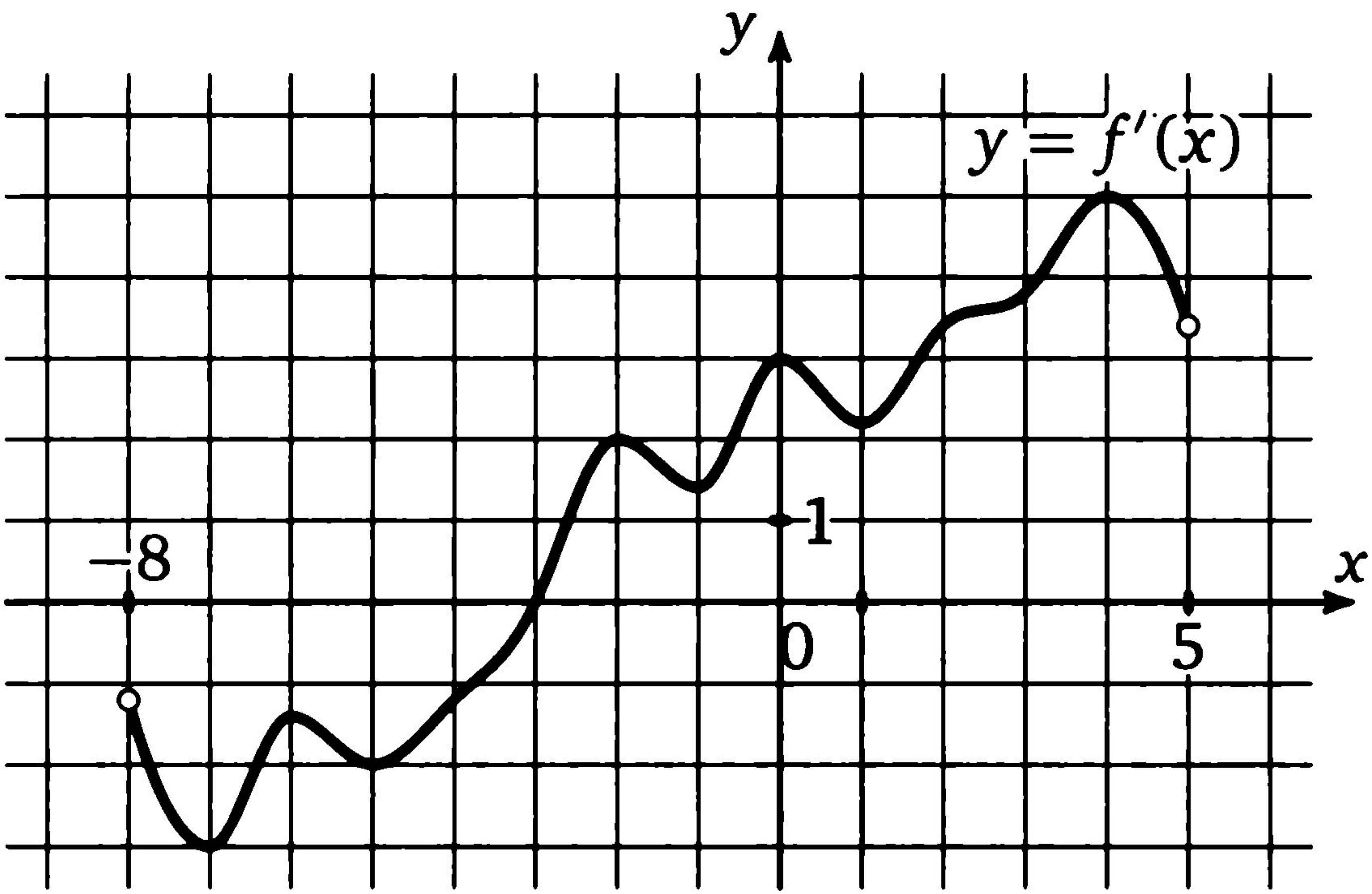
5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-8; 3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.



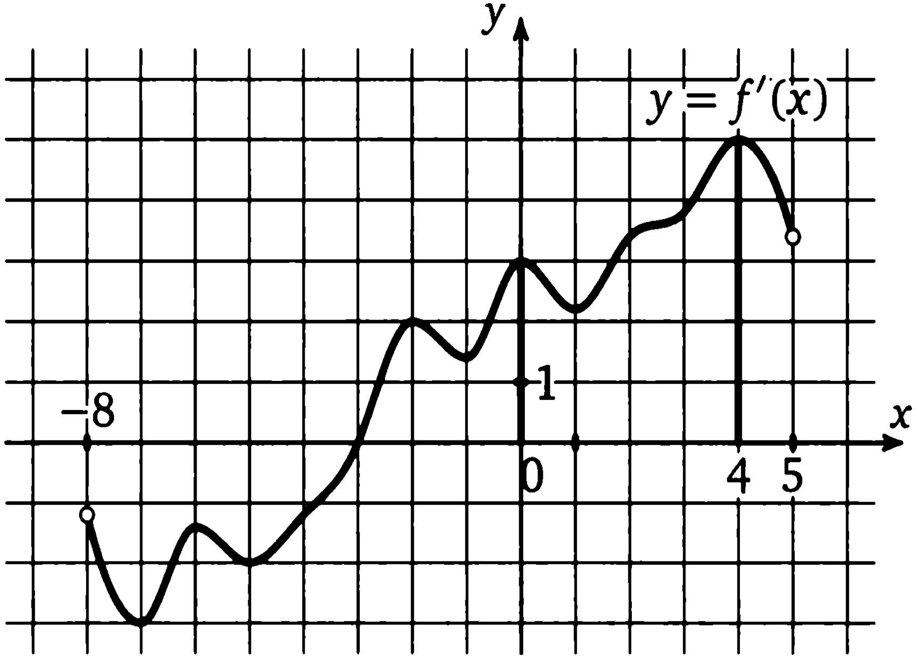
Решение: прямая $y = 18$ – горизонтальная, значит, если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Следовательно, при решении этой задачи можно воспользоваться вторым решением задачи № 4, то есть приложить линейку или край листа бумаги к рисунку сверху горизонтально (на рисунке показано пунктиром) и, двигая «вниз», сосчитать количество точек с горизонтальной касательной.

Ответ: 5.

Задача № 5.
На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (-8; 5). В какой точке отрезка $[0;4]$ ***f(x), принимает наименьшее значение?***



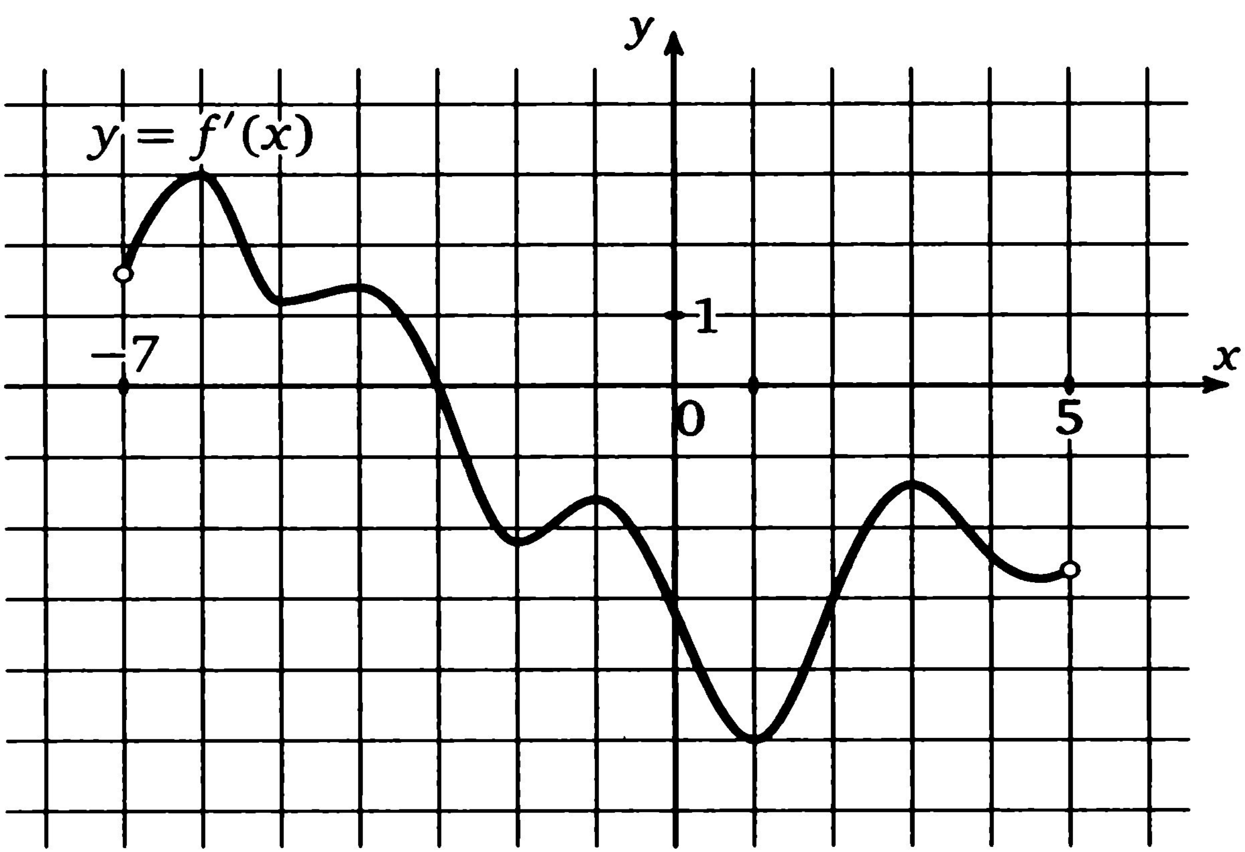
Решение: Для начала на рисунке отметим границы отрезка, о котором идет речь в условии задачи.



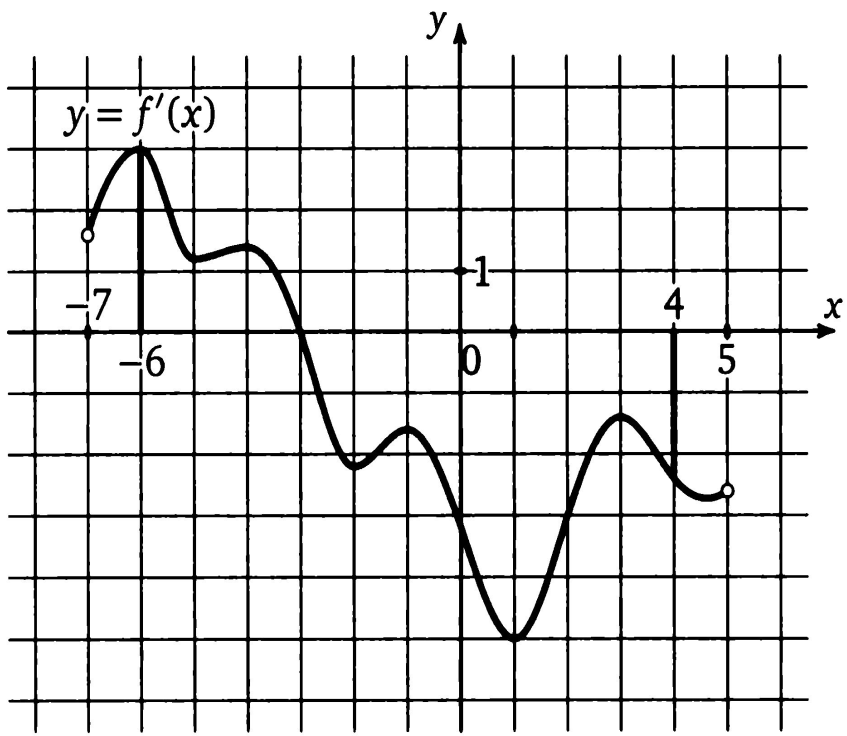
Заметим, что на этом отрезке производная функции положительна, значит, сама функция *f(x)* возрастает, а значит, наименьшее значение на этом отрезке она принимает в левом конце отрезка, то есть в точке 0 (отметим, что при этом производная на этом отрезке, как видно из графика, принимает наименьшее значение в точке 1). Ответ: 0.

Задача № 6.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$ ***определенной на интервале (-7;5). Найдите точки экстремума функции*** $f(x)$ ***, принадлежащих отрезку*** $[-6;4]$ **.**



Решение: Для начало отметим на рисунке границы отрезка, о котором идет речь в условии задачи.

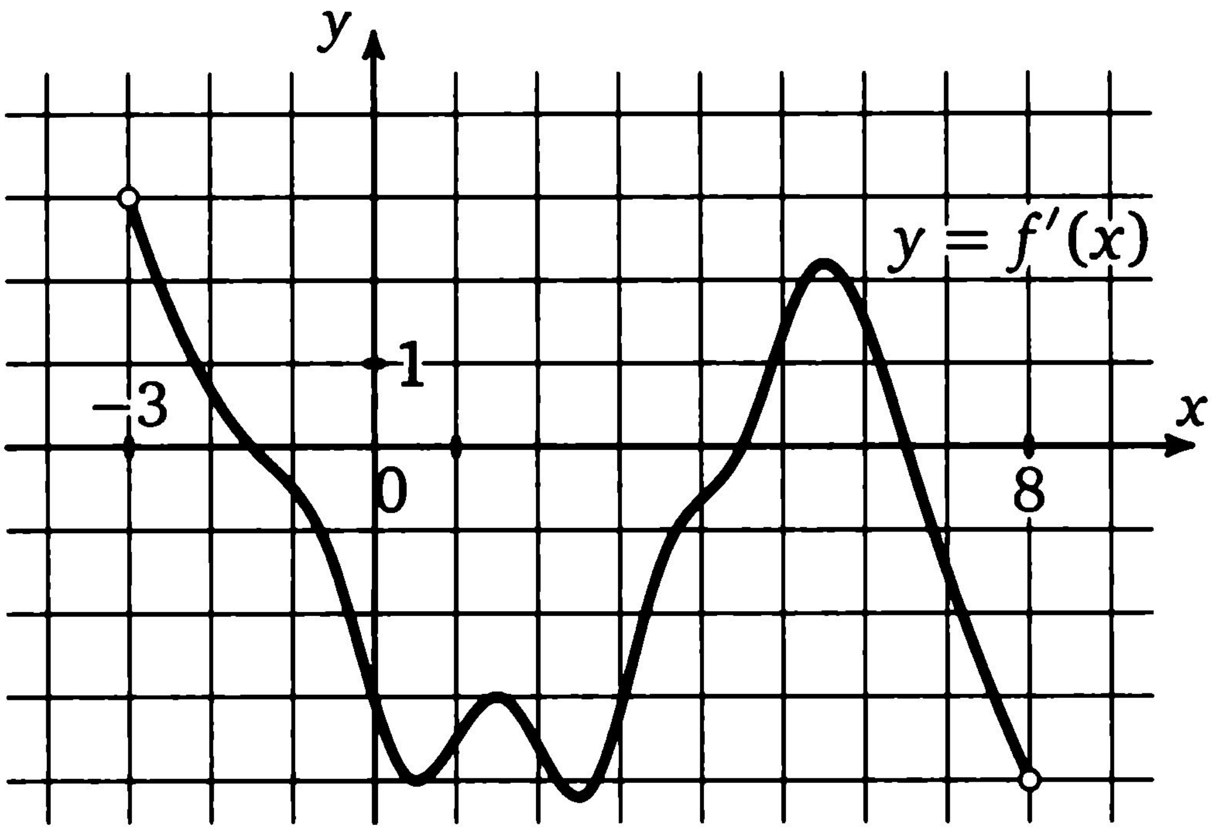


Заметим, что на этом отрезке производная функции один раз обращается в 0 (в точке -3) и при переходе через эту точку меняет знак, откуда ясно, что точка -3 и есть искомая точка экстремума функции на отрезке.

Ответ: -3.

Задача № 7.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$ ***определенной на интервале (-3;8). Найдите количество точек максимума функции*** $f(x)$, ***принадлежащих отрезку*** $[-2;7]$



Решение:

В точке максимума производная равна 0 либо не существует. Видно, что таких точек принадлежащих отрезку тр$[-2;7]$; 4,5; 6,5. При этом в точке 4,5 производная слева отрицательна, а справа положительна – это точка минимума (рис 1)

В точке -1,5 и 6,5 производная меняет знак «+» на «-» - это точка максимума (рис 2).

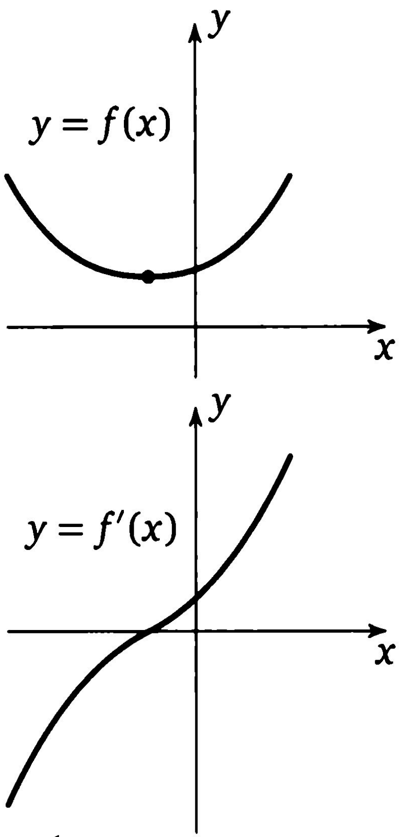


рис 1

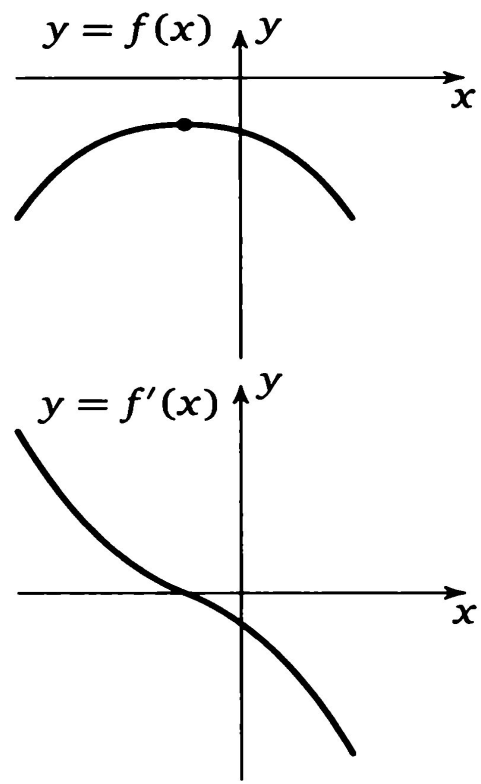
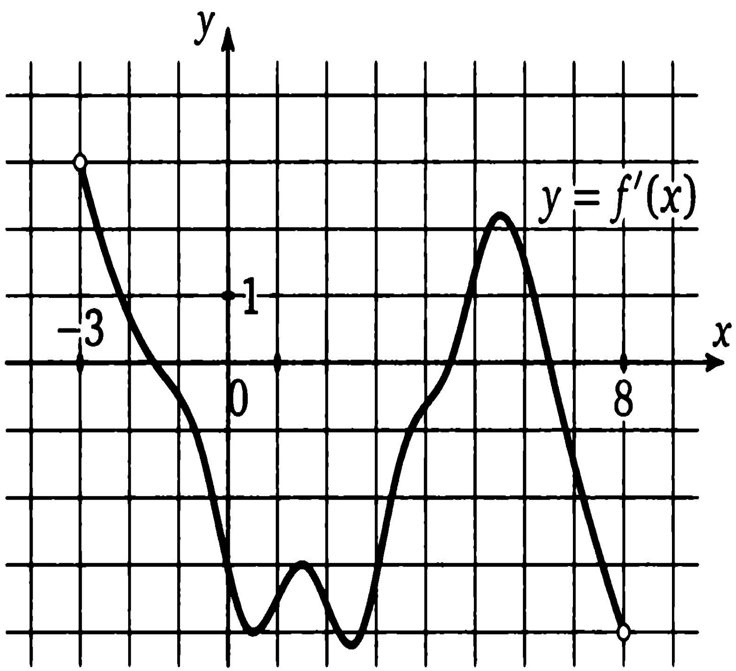


рис 2

Ответ: 2.

Задача № 8.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$ ***определенной на интервале (-3;8). Найдите промежутки убывания функции*** $f(x)$***. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.***



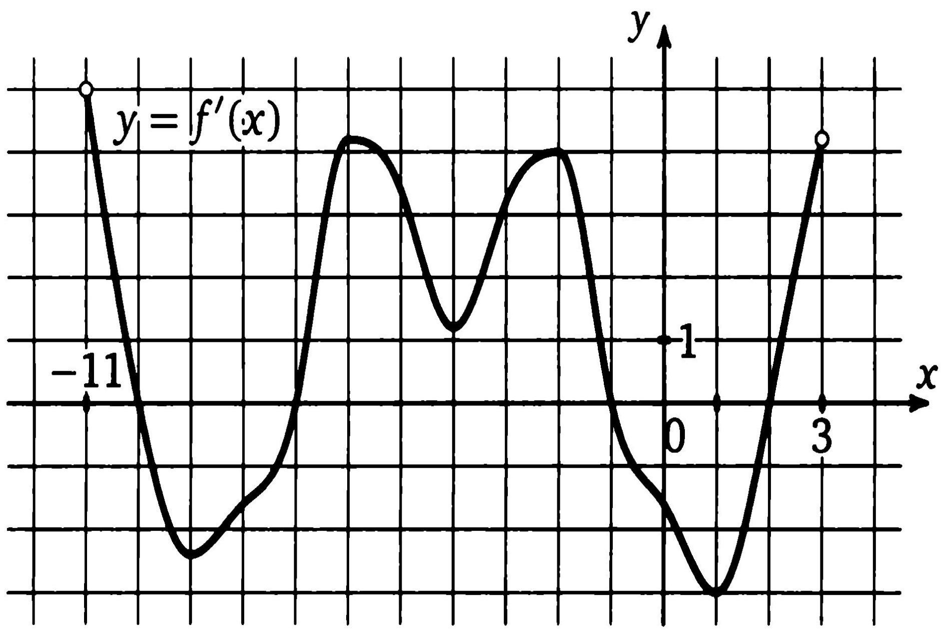
Решение: Отметим, что на всем промежутке убывания функции $f(x)$ её производная неположительна (на промежутках возрастания соответственно отрицательна). У нас таких промежутков два: (-1,5; 4,5) и (6,5; 8), целые числа, входящие в эти промежутки, - это -1; 0; 1; 2; 3; 4; 7, то есть искомая сумма равна

-1+ 0 + 1 +2 + 3 + 4 + 7 = 16

Ответ: 16.

Задача № 9.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$ определенной на интервале (-11;3). Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



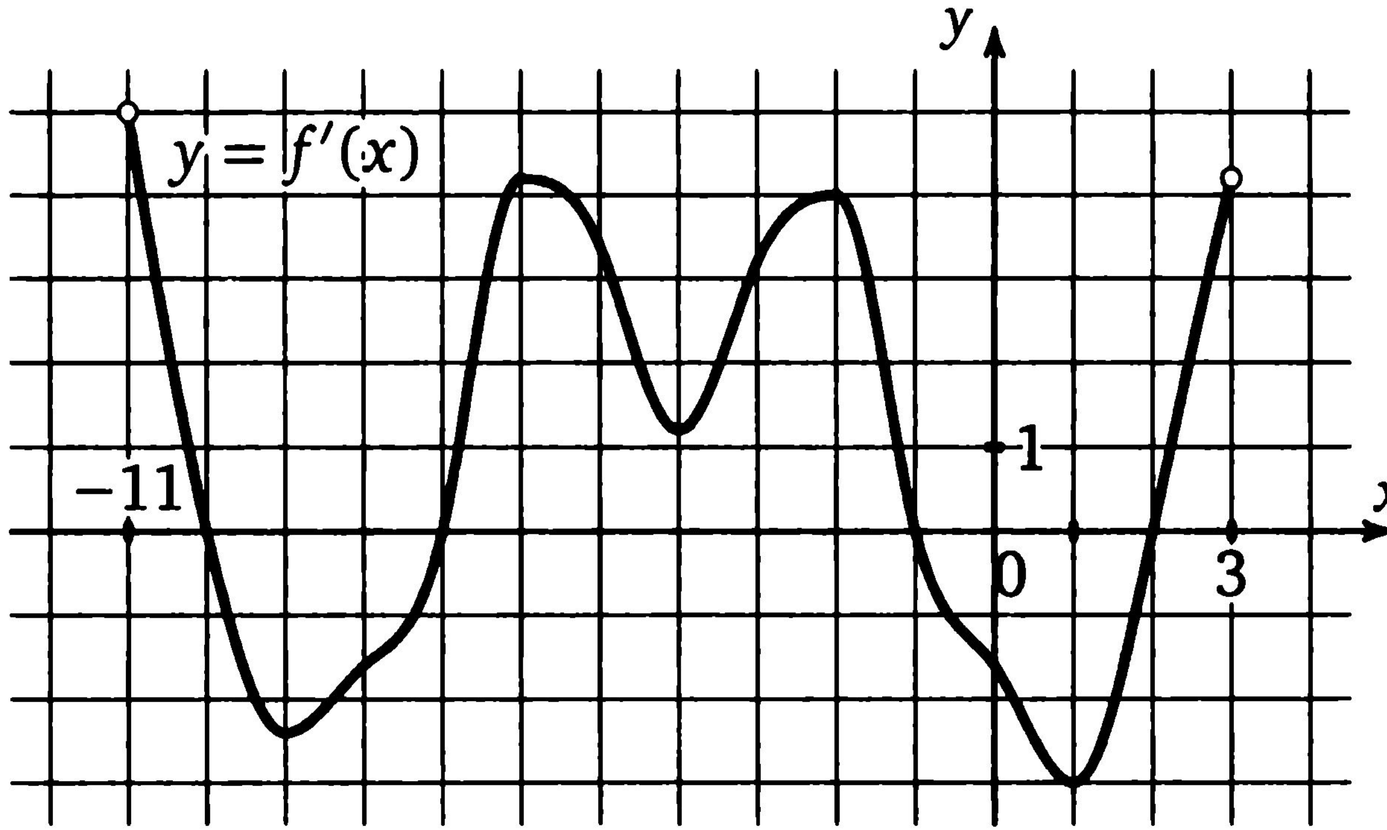
Решение: Найдем промежутки возрастания функции, их 3:

(-11; -10), (-7; -1) и (2; 3), наибольшую длину из них, очевидно, имеет промежуток (-7; -1), его длина равна -1 – (-7) = 6.

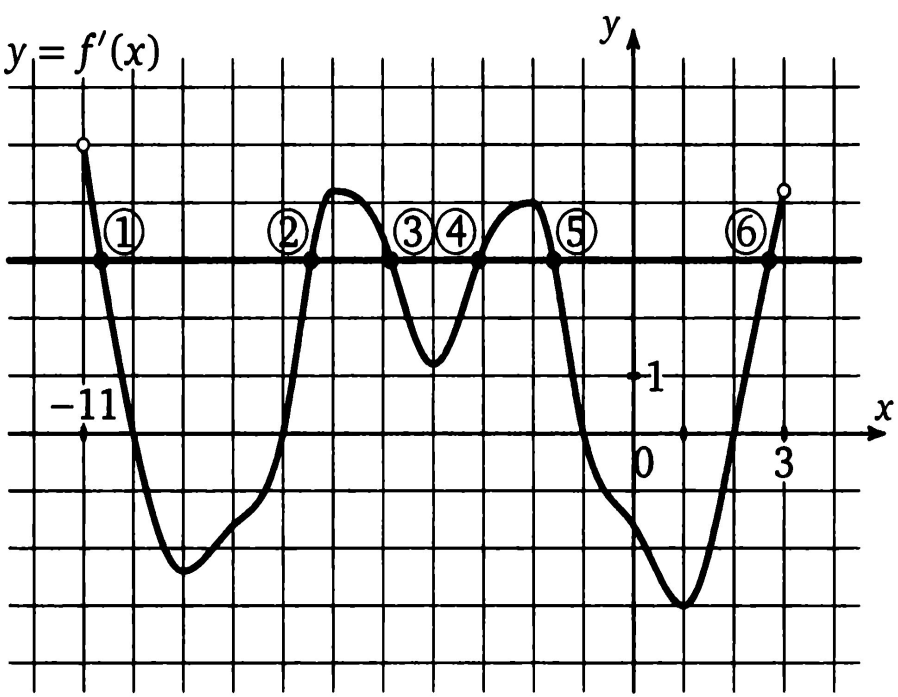
Ответ: 6

Задача № 9.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$ определенной на интервале (-11;3). Найдите количество таких чисел x_τ, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_τ параллельна прямой y = 3x – 11 или совпадает с ней.



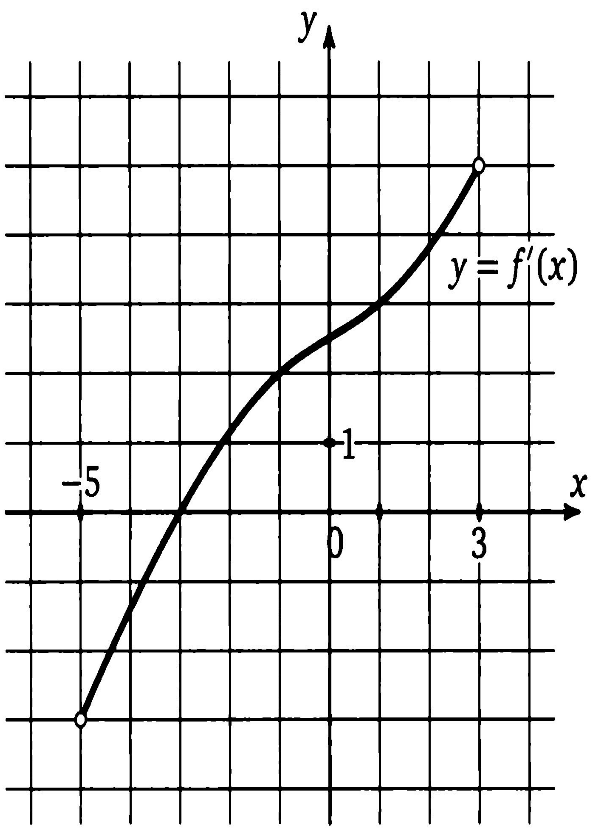
Решение. Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 11$ или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент равен 3, а значит нам нужно найти количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 3. Для этого на графике производной проведем горизонтальную черту, соответствующую значению $y = 3$, и посчитаем количество точек графика производной, лежащих на этой линии. В нашем случае таких точек 6.



Ответ: 6

Задача № 10.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$ определенной на интервале (-5;3). Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 7$ или совпадает с ней.



Решение. Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 7$ или совпадает с ней, то значение производной в точке касания равно 2. Для того чтобы найти искомую абсциссу, выясним, в какой точке значение производной функции $f(x)$ равно 2. Для этого проведем горизонтальную прямую $y = 2$ и найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с графиком производной. Она и будет искомой абсциссой точки касания.

Ответ: -1

Задача № 11.

Прямая y = 4x + 13 параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$ **.**

Решение: Найдем абсциссу точки касания.

если прямая параллельна касательной к графику функции в какой – то точке (назовем её x_0), то её угловой коэффициент (в нашем случае 4) равен значению производной в точке x_0. Производной функции

$y = x^2 - 3x + 5$ будет равна $f'(x) = 2x - 3$.

Значит, для нахождения искомой точки касания необходимо, чтобы 2x – 3 = 4, откуда x = 3,5.

Ответ: 3,5

Задача № 12.

Прямая $y = 3x+ 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите а.

Решение:

Аналогично решению предыдущей задачи производная функции в точке касания должна совпадать с угловым коэффициентом прямой. Откуда, если за x_1 принять абсциссу точки касания, имеем $2ax_1 + 2 = 3$. То есть $ax_1 = \frac{1}{2}$

Найдем значение исходной функции в точке касания:

$$ax_1^2 + 2x_1 + 3 = \frac{1}{2}x_1 + 2x_1 + 3 = \frac{5}{2}x_1 + 3.$$

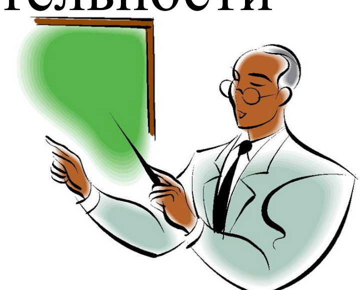
Так как прямая $y = 3x + 1$ — касательная, имеем: $\frac{5}{2}x_1 + 3 = 3x_1 + 1$, откуда $x_1 = 4$. А значит $a = \frac{1}{8}$.

Немного по-другому следует действовать, если неизвестен другой коэффициент квадратной функции. Рассмотрим возможные задачи.

Прямая у = 5х – 13 является касательной к графику функции у = 2х^2 + вх + 37. Найдите в.

Решение. Если x_0 — абсцисса точки касания, то $4x_0 + b = 5$, откуда $b = 5 - 4x_0$. Аналогично предыдущей задаче найдем x_0. $2x_0^2 + (5 - 4x_0)x_0 + 37 = 5x_0 - 13$, откуда несложными преобразованиями получаем $x_0^2 = 25$. Имеем две возможности: при $x_0 = -5$ имеем $b = 25$, при $x_0 = 5$ имеем $b = -15$.

Как видно, задача имеет два решения, в таких случаях обычно вводится дополнительное условие, позволяющее отбросить одно из них. Например, условие положительности x_0 или значения функции в точке касания.



Самым простым случаем является следующая задача.
Прямая $y = 4x + 3$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + c$. Найдите c.

Решение. Аналогично предыдущим задачам обозначим абсциссу точки касания x_0 и приравняем значение производной функции в точке x_0 угловому коэффициенту касательной.

$2x_0 - 2 = 4$, откуда $x_0 = 3$. Значение исходной функции в точке 3 равно $9 - 6 + c = c + 3$, значит $c + 3 = 4 \cdot 3 + 3$, откуда $c = 12$.

Задача № 13.

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$$

(где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начало движения)Найдите её скорость в момент времени t = 6 с.

Решение. Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_0, прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = f(t)$, равна значению производной функции f при $t = t_0$, искомая скорость будет равна

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6^2 - 3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 = 20 \text{ м/с.}$$

Задача № 14.

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$$

(где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t время в секундах, измеренное с начало движения). В какой момент времени ее скорость была равна 2 м/с.

Решение. Воспользовавшись тем же рассуждением, что и в предыдущей задаче получим, что если искомое время t_0, то

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot t_0^2 - 3 \cdot 2 \cdot t_0 - 5 = 2,$$

откуда $t_0^2 - 6t_0 - 7 = 0$, $t_0 = -1$ или $t_0 = 7$. Ввиду того, что t_0 — время, не может быть отрицательным, ответом в задаче будет 7 секунд.

Литература:

1.Л.А.Семенова, И.В.Ященко «Геометрический смысл производной».
2. Семенова Л.С, Ященко И.В. ЕГЭ: 3000 задач по математике. Все задания группы В. Москва: Издательство «Экзамен», 2011г.
3.Министерство образования РФ: http://www.informika.ru/; http://www.ed.gov.ru/;
4.Тестирование опНпе: 5-1 1 классы: http://www.kokch.kts.ru/cdo/
5.Путеводитель «В мире науки» для школьников: http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/• Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: http://mega.km.ru
6. http://mathege.ru/or/ege/Main - открытый банк заданий ЕГЭ по математике;

УДАЧИ НА ЭКЗАМЕНЕ!