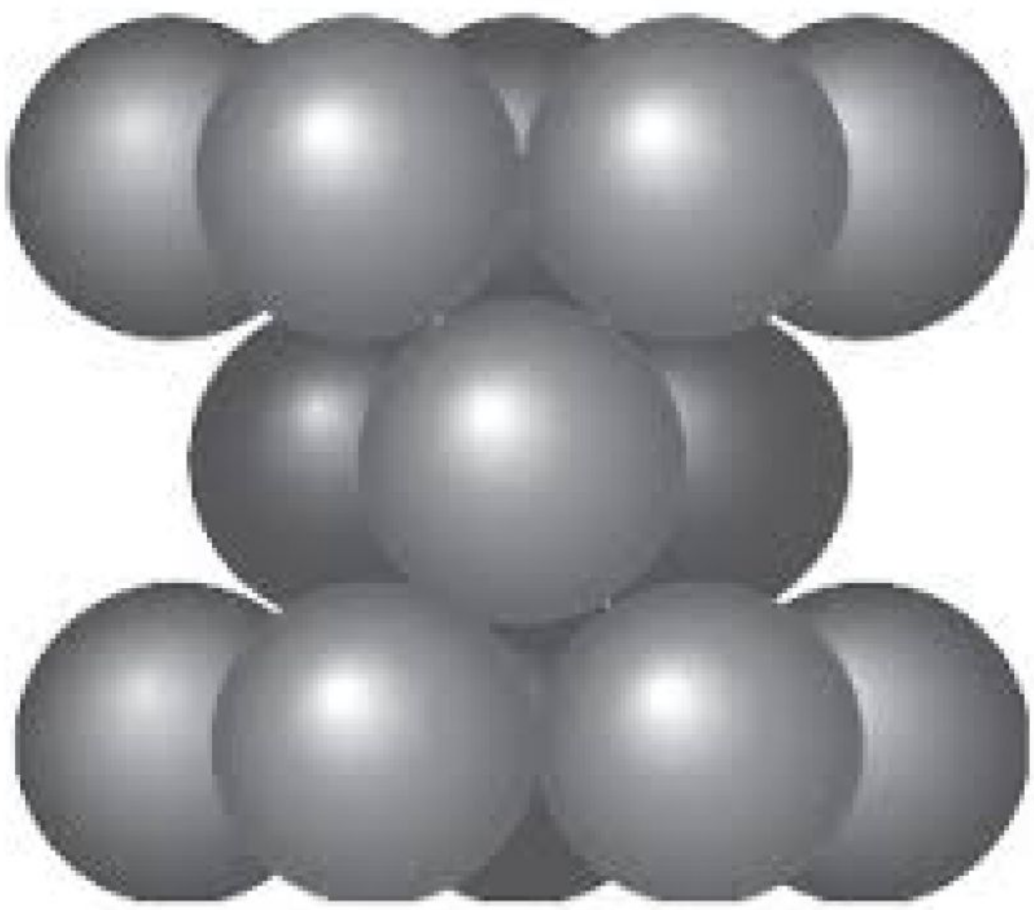
Лекция 1. Течение воды через песок и трубки.

Владимир Павлович Крайнов,
кафедра теоретической физики
МФТИ, 03.09.2016

- Характерный размер песчинки равен a; пористость песка равна ε (это отношение объема пустот к суммарному объему песчинок и пустот). Медленное течение воды (или нефти) через поры в песке или другой пористой среды под действием градиента давления – это вязкое течение Пуазейля, имеющее место при малых числах Рейнольдса.

Наиболее плотная (гексагональная) упаковка песчинок в виде шариков, коэффициент пористости равен $\varepsilon = 0.26$



- Мы моделируем поры полыми трубочками. Пусть l – длина трубочки, r – ее характерный поперечный размер, а δp- малая разность давлений на концах трубочки. Скорость медленного течения пропорциональна градиенту давления : это первый член разложения скорости в ряд Тейлора в уравнениях Навье-Стокса. Подчеркнем, что скорость течения определяется именно градиентом давления, а не разностью давлений на концах трубочки.

- Коэффициент пропорциональности в этой зависимости (уже не содержащий *l*) можно оценить из соображений размерности – он содержит плотность воды ρ, r и кинематическую вязкость воды v. Последняя величина имеет размерность см^2/с – она оценивается как произведение скорости молекулы воды на длину ее свободного пробега (вязкость среды определяется передачей импульса от одной молекулы к другой при столкновении друг с другом).

- Получаем качественно формулу Пуазейля
- (1)

$$u \propto \frac{\delta p}{l}\frac{r^2}{\rho \nu} \quad \left[\frac{\text{г}}{\text{см}^2\text{с}^2}\frac{\text{см}^2}{(\text{г}/\text{см}^3)(\text{см}^2/\text{с})} = \frac{\text{см}}{\text{с}}\right]$$

- Объемный расход жидкости через одну трубочку оценивается как
- (2)

$$q \propto ur^2 \propto \frac{\delta p}{l}\frac{r^4}{\rho \nu}$$

- Если трубочка имеет цилиндрическую форму радиуса r, то численный коэффициент в этой зависимости равен π /8 (*формула Пуазейля*). Мы видим, что коэффициент имеет порядок единицы. Этот факт является достаточно общим утверждением: решение дифференциального уравнения (в данном случае, уравнения Навье-Стокса) с коэффициентами порядка единицы, как правило, также имеет порядок единицы. Эти соотношения справедливы при малом значении безразмерного *числа Рейнольдса*

$$\mathrm{Re} = \frac{ur}{\nu} < 1.$$

- Тогда можно пренебречь нелинейным слагаемым в уравнении Навье-Стокса.

- Рассмотрим параллелепипед из песка длиной l и поперечным сечением S. Скорость течения воды через этот параллелепипед запишем в виде, аналогичным формуле (1)

$$u = \frac{\delta p}{l} \frac{k}{\rho \nu}$$

- Величина k называется *коэффициентом проницаемости*. Он имеет размерность площади. Нам требуется оценить его величину.

- Объемный расход воды через весь параллелепипед равен (*закон Дарси*)
- (3)

$$Q = \frac{\delta p}{l} \frac{kS}{\rho \nu}$$

- Это верно, если считать, что вода течет через множество трубочек, причем течения через различные трубочки не зависят друг от друга (лучше сказать, в лабиринте пустот в песке они редко пересекаются). Радиус трубочки r оценим ниже.

- В такой модели пористость ε (отношение объема пустот к суммарному объему песчинок и пустот) можно представить в виде
- (4)

$$\varepsilon = \frac{V'}{V} = \frac{S'l}{Sl} \propto \frac{n'r^2l}{V}.$$

- Здесь $S' \propto n'r^2$ - суммарная площадь трубочек, через которые просачивается вода. Величина n' это число трубочек. Числовые множители во всех оценках опускаем.

- Число песчинок оценивается как
- (5) $$n \propto \frac{V - V'}{a^3} = \frac{(1-\varepsilon)V}{a^3}.$$
- Площадь поверхности всех песчинок, которые омывает вода, равна $a^2 n$.
- ***Главная идея модели*** состоит в том, что, с другой стороны, эта площадь равна площади поверхности всех пустотелых трубочек, которые омывает вода. Получаем:

- (6) $$a^2 n \propto n' r l$$
- Подставляя (4) и (5) в (6), находим

$$\frac{(1-\varepsilon)V}{a} \propto \frac{\varepsilon V}{r}$$

- Отсюда получаем оценку для радиуса каждой трубочки
- (7)

$$r \propto \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} a.$$

- Конечно, при малой проницаемости (ε << 1) радиус трубочки мал по сравнению с размером песчинки, в соответствии с качественным представлением о просачивании. Далее, из-за изгибов трубочки при обтекании песчинки длина трубочки больше высоты параллелепипеда l. Для шарообразной песчинки радиуса a эта длина увеличивается в π /2 раз. Однако при качественном подходе мы пренебрегаем всеми такими факторами.

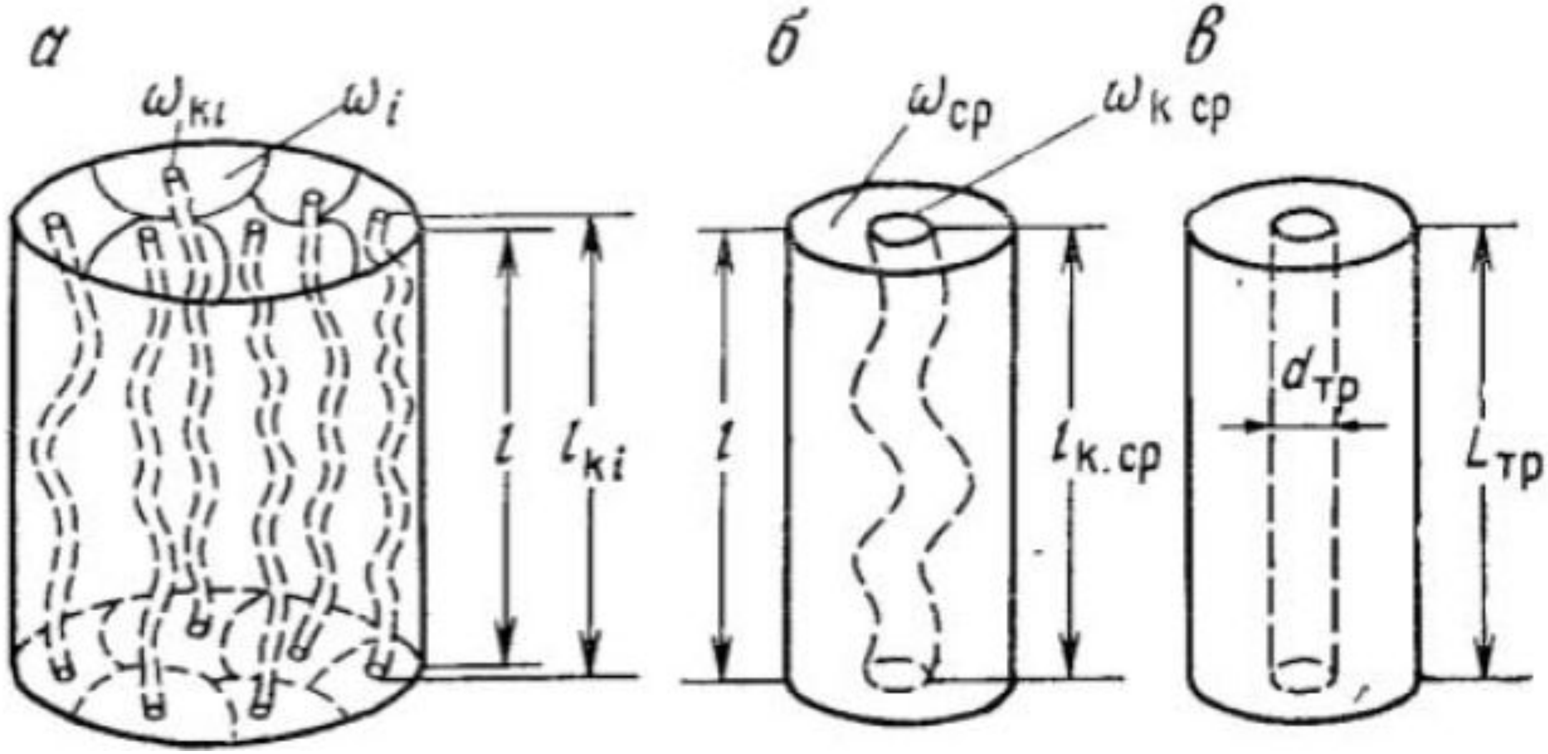


Схема трубочек, через которые течет вода

- Объемный расход q воды через одну трубочку дается соотношением (2). Расход воды через все трубочки равен

$$Q = qn' \propto \frac{\delta p}{l} \frac{r^4}{\rho \nu} n'$$

- Сравнивая эту формулу с определением (3), находим коэффициент проницаемости (учитывая (4))

$$k \propto \frac{n' r^4}{S} \propto \frac{S' r^2}{S} = \varepsilon r^2.$$

- Подставляя радиус трубочки (7) в это соотношение, получим
- (8)

$$k \propto \frac{\varepsilon^3}{\left(1-\varepsilon\right)^2} a^2.$$

- Она справедлива при малом значении числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\varepsilon}{\left(1-\varepsilon\right)} \frac{ua}{\nu} < 1.$$

- При обычном условии ε << 1 выражение (8) приобретает совсем простой вид
- (9) $$k \propto \varepsilon^3 a^2.$$
- Видно, что коэффициент проницаемости очень сильно зависит от пористости среды.
- Если учесть все численные множители, опущенные выше, а также увеличение длины трубочки из-за ее изгиба при обтекании песчинок, о котором упоминалось выше, то получим *формулу Козени-Кармана*

Формула Козени-Кармана

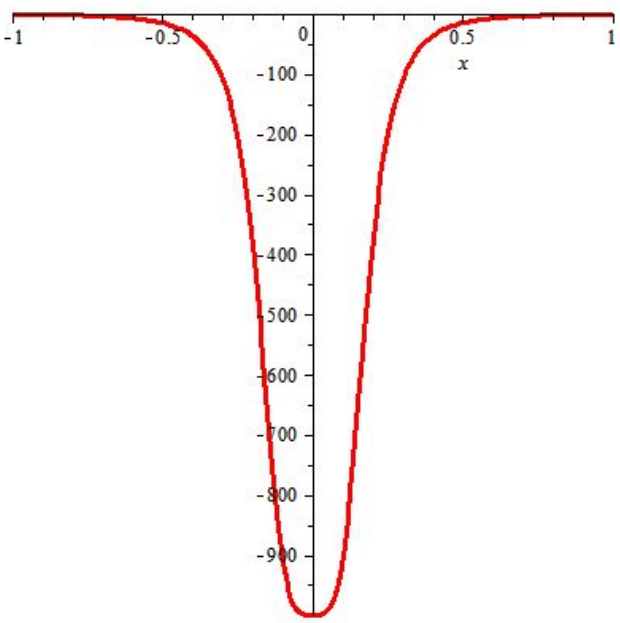
- Она хорошо согласуется с экспериментальными данными.
- (10)

$$k = \frac{\varepsilon^3}{45\left(1-\varepsilon\right)^2} a^2.$$

Малый численный множитель связан с увеличением длины трубочек из-за их сильного искривления.

Водяные часы

- Сначала определим форму водяных часов, пренебрегая трением.
- Скорость вытекающей
- воды через отверстие
- радиуса r должна быть
- постоянна, чтобы часы
- шли равномерно.
- Обозначим ее V_0.



- Обозначим радиальную координату стенок часов x, а высоту стенок для этой координаты $y(x)$.
- Уравнение несжимаемости воды имеет вид $$\pi r^2 V_0 = \pi x^2 V(x).$$
- Здесь $V(x)$ - скорость воды для координаты x.
- Уравнение Бернулли для жидкости без трения имеет вид
- (закон сохранения $$\frac{1}{2}V_0^2 = gy + \frac{1}{2}V^2(x)$$
- энергии)

- Исключая из этих двух уравнений скорость $V(x)$, находим уравнение формы часов

$$y(x)=\frac{V_0^2}{2g}\left(1-\frac{r^4}{x^4}\right);\quad y\left(x=r\right)=0.$$

- Обозначим высоту сосуда $H=y\left(x\to\infty\right)$
- Тогда уравнение формы водяных часов принимает вид

$$y(x)=H\left(1-\frac{r^4}{x^4}\right);\quad H=\frac{V_0^2}{2g}.$$

- Начальный объем воды в часах равен

$$\Omega = \int_0^H \pi x^2 dy = 2\pi r^2 H.$$

- Вся вода вытечет за время T, определяемое из соотношения

$$\Omega = \pi r^2 V_0 T.$$

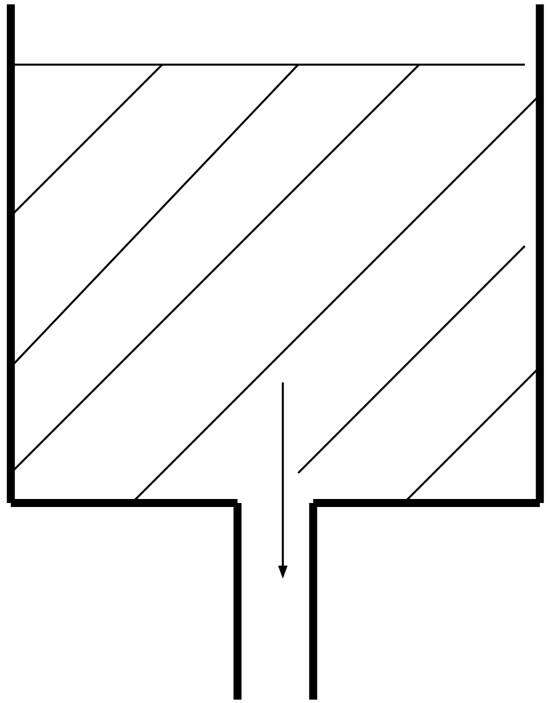
- Получаем

$$T = \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

- Время вытекания не зависит от размера отверстия сосуда! Для высоты H = 20м
- получим T = 1 с.

Учет трения в часах

- Возьмем сосуд в форме цилиндра, из которого по узкой трубке вытекает вода



- Радиус узкой трубки обозначим через r_0

Уравнение Навье-Стокса

- Стационарное уравнение Навье-Стокса при малых числах Рейнольдса имеет вид

$$\rho\nu\Delta\mathbf{V} = \nabla p.$$

- Здесь *ν* - коэффициент кинематической вязкости. В цилиндрических координатах имеем для трубочки длиной l

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = -\frac{\delta p}{\rho\nu l}.$$

- Решение уравнения Навье-Стокса, обращающееся в нуль на стенке трубочки радиуса r_0 имеет вид

$$\boxed{V(r) = \frac{\delta p}{4\rho\nu}\left(r_0^2 - r^2\right)}$$

- Скорость распределена по сечению трубочки по параболическому закону.
- Масса жидкости, протекающая в 1 с через трубочку, равна

$$Q = 2\pi\rho \int_0^{r_0} V(r) r dr.$$

- Вычисляя интеграл, получим *формулу Пуазейля* для массы, вытекающей в единицу времени из узкой трубки длиной l, равна

$$Q = \frac{\pi\delta p}{8\nu l} r_0^4$$

- Здесь *v* - коэффициент кинематической вязкости, а $\delta p = \rho g l$ – перепад давления в узкой трубке. Итак, расход жидкости равен

$$Q = \frac{\pi\rho g}{8\nu} r_0^4$$

- Вся вода вытечет из сосуда за время T, определяемое из соотношения

$$QT = \rho\pi R^2 H$$

- Здесь H – высота основного сосуда, а *R* - его радиус. Получаем

$$T = \frac{8\nu R^2 H}{g r_0^4}.$$

- Кинематическая вязкость воды равна
- *v* = 0.01 см^2/с. Возьмем r_0 = 1 мм, *R* = 10 см, H = 1 м. Получаем $T = 2.2$ часа.

- Если вместо воды в тот же сосуд налить глицерин, то из-за его большой вязкости v = 6.8 $см^2/с$, время работы часов значительно увеличивается: до 2 месяцев.
- Однако отверстие сосуда нельзя делать слишком малым из-за поверхностного натяжения жидкости, которое может прекратить ее истечение.

В древние времена
промежуток времени
измерялся количеством
воды, вытекавшей
капля за каплей
из малого отверстия,
сделанного на дне сосуда.
Здесь время вытекания
определяется другой физикой:
поверхностным натяжением
воды, т.е. временем
образования очередной
капли.

Спасибо за внимание