



# Делимость чисел

Шпакова Елена Владимировна,  
учитель математики  
ГБОУ гимназия № 159  
«Бестужевская» Санкт-Петербурга

**Числа  
правят  
миром**

**Пифагор.**



# Пифагор Самосский

**Пифагор** – древнегреческий философ-идеалист, математик, основатель пифагореизма, политический, религиозный деятель.

Его родиной был остров Самос (отсюда и прозвище - Самосский), где он появился на свет приблизительно в 580 г. до н. э. Его отцом был резчик по драгоценным камням. Согласно древним источникам, Пифагор с рождения отличался удивительной красотой; когда стал взрослым, носил длинную бороду и диадему из золота. Его одаренность также проявилась в раннем возрасте.



# Математика - царица наук, арифметика – царица математики

**Карл Гаусс (1777-1855)**

считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».



Пифагорейцы считали основой всех математических наук **арифметику**. Многим было бы приятно узнать, например, что если ликвидировать геометрию, арифметика нисколько от этого не пострадает, и наоборот, геометрия без арифметики существовать не может.

# Пифагорейская школа

К числам  
пифагорейцы  
относились  
трепетно, ибо  
считали, что с их  
помощью была  
сотворена  
Вселенная.



# Совершенные числа

**Совершенное число́**— натуральное число, равное сумме всех своих собственных делителей— натуральное число, равное сумме всех своих собственных делителей (т. е. всех положительных делителей, отличных от само́го числа). По мере того как натуральные числа возрастают, совершенные числа встречаются всё реже.

# Совершенные числа

6 28

33 550 336

8) 28 496

# Совершенные числа

Пифагорейцы развивали свою философию из науки о числах. **Совершенные числа**, считали они, есть прекрасные образы добродетелей. Они представляют собой середину между излишеством и недостатком. Они очень редки и порождаются совершенным порядком.



# Дружественные числа

**Дру́жественные чѝсла** — два различных натуральных числа — два различных натуральных числа, для которых сумма всех собственных делителей первого числа равна второму числу и наоборот, сумма всех собственных делителей второго числа равна первому числу.

# Дружественные числа

Дружественные числа были открыты последователями Пифагора, которые, однако, знали только одну пару дружественных чисел — 220 и 284 .

$$D(220) = \{ 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 \text{ и } 110 \}, \\ 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284.$$

$$D(284) = \{1, 2, 4, 71, 142\}, \\ 1+ 2+ 4+71 + 142 = 220.$$

# Дружественные числа

Формулу для нахождения некоторых пар дружественных чисел предложил примерно в 850 году арабский астроном и математик Сабит ибн Курра (826—901). Его формула позволила найти две новые пары дружественных чисел. Много столетий спустя Леонард Эйлер (1707-1773) нашёл ещё 65 пар дружественных чисел. Одна из них — 17296 и 18416. Но общего способа нахождения всех таких пар нет до сих пор. На сентябрь 2007 года известно 11 994 387 пар дружественных чисел[



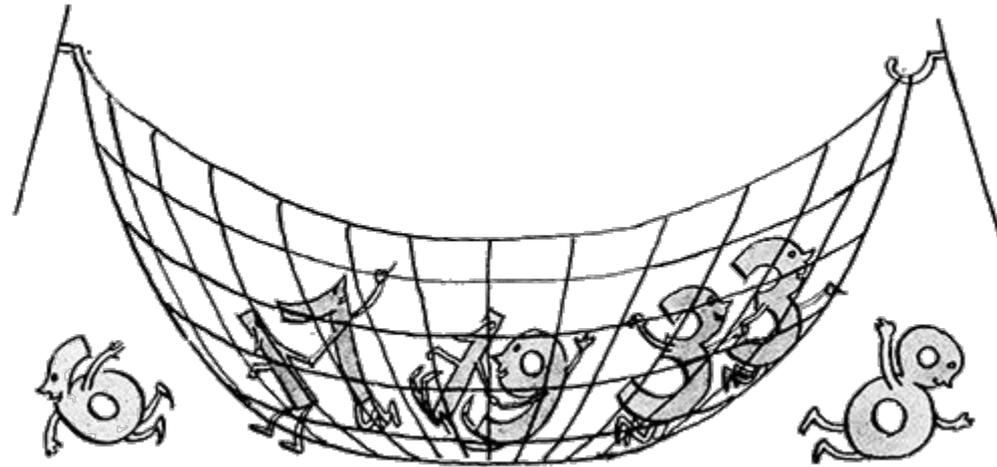
# Простые и составные числа

- Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число.
- Натуральное число называют **составным**, если оно имеет более двух делителей.

Число 1	Простые числа	Составные числа
Только один делитель	Только два делителя	Более двух делителей
$D(1) = \{ 1 \}$	$D(13) = \{ 1, 13 \}$	$D(6) = \{ 1, 2, 3, 6 \}$

# Решето Эратосфена

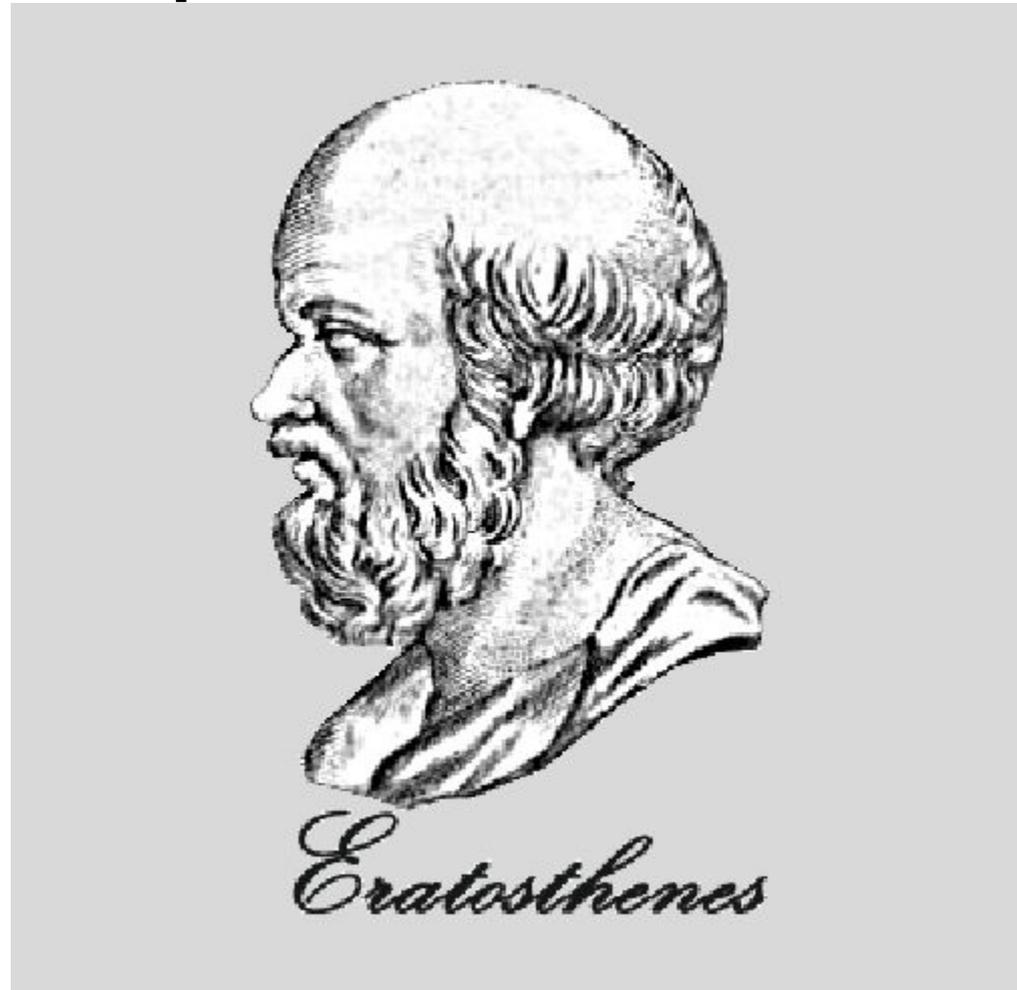
Решето  
Эратосфена — алгоритм  
м — алгоритм нахождения  
всех простых  
чисел — алгоритм нахо  
ждения всех простых  
чисел , который



2	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>	
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	<del>15</del>	16	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>	25	<del>26</del>	27	<del>28</del>	29	<del>30</del>
31	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>

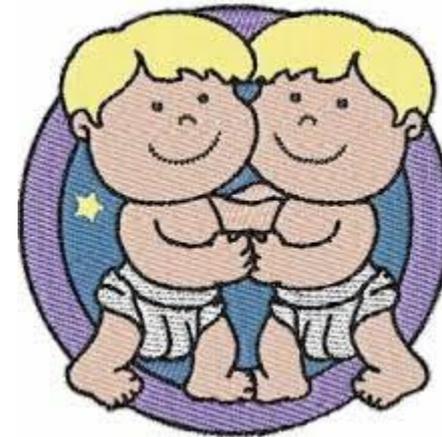
# Эратосфен

**Эратосфен**  
**Киренский** (Ἐρατοσθένης ὁ Κιρηναῖος; 276 год до н. э. (Ἐρατοσθένης ὁ Κιρηναῖος; 276 год до н. э.—194 год до н. э. (Ἐρατοσθένης ὁ Κιρηναῖος; 276 год до н. э.—194 год до н. э.) — греческий математик (Ἐρατοσθένης ὁ Κιρηναῖος; 276 год до н. э.—194 год до н. э.) — греческий математик, астроном, географ географ, филолог и поэт. Ученик Каллимаха. Ученик Каллимаха, с 235 г. до н. э. —



# Числа-близнецы

**Простые числа-близнецы** — пары простых чисел, отличающихся на 2.



Числа-Близнецы

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	301	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

# Разложение на простые множители

Разложить  
натуральное число  
на простые  
множители- значит  
представить его в  
виде произведения  
простых чисел

$$\begin{array}{l|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$



# НОД

Наибольший Общий Делитель

# Наибольший общий делитель

Наибольшее натуральное число, на которое делится без остатка числа  $a$  и  $b$ , называют **наибольшим общим делителем** этих чисел.

НОД (324,111,432)=?

324		2
162		2
81		<u>3</u>
27		3
9		3
3		3
1		

111		<u>3</u>
37		37
1		

432		2
216		2
108		2
54		2
27		<u>3</u>
9		3
3		3
1		

НОД (324,111,432)=3

# Алгоритм Евклида

**Алгоритм Евклида** –  
это алгоритм  
нахождения  
наибольшего общего  
делителя (НОД)  
пары целых чисел.



# Задача № 1

Ребята получили на новогодней елке одинаковые подарки. Во всех подарках вместе было 123 апельсина и 82 яблока. Сколько ребят присутствовало на елке? Сколько апельсинов и сколько яблок было в каждом подарке?

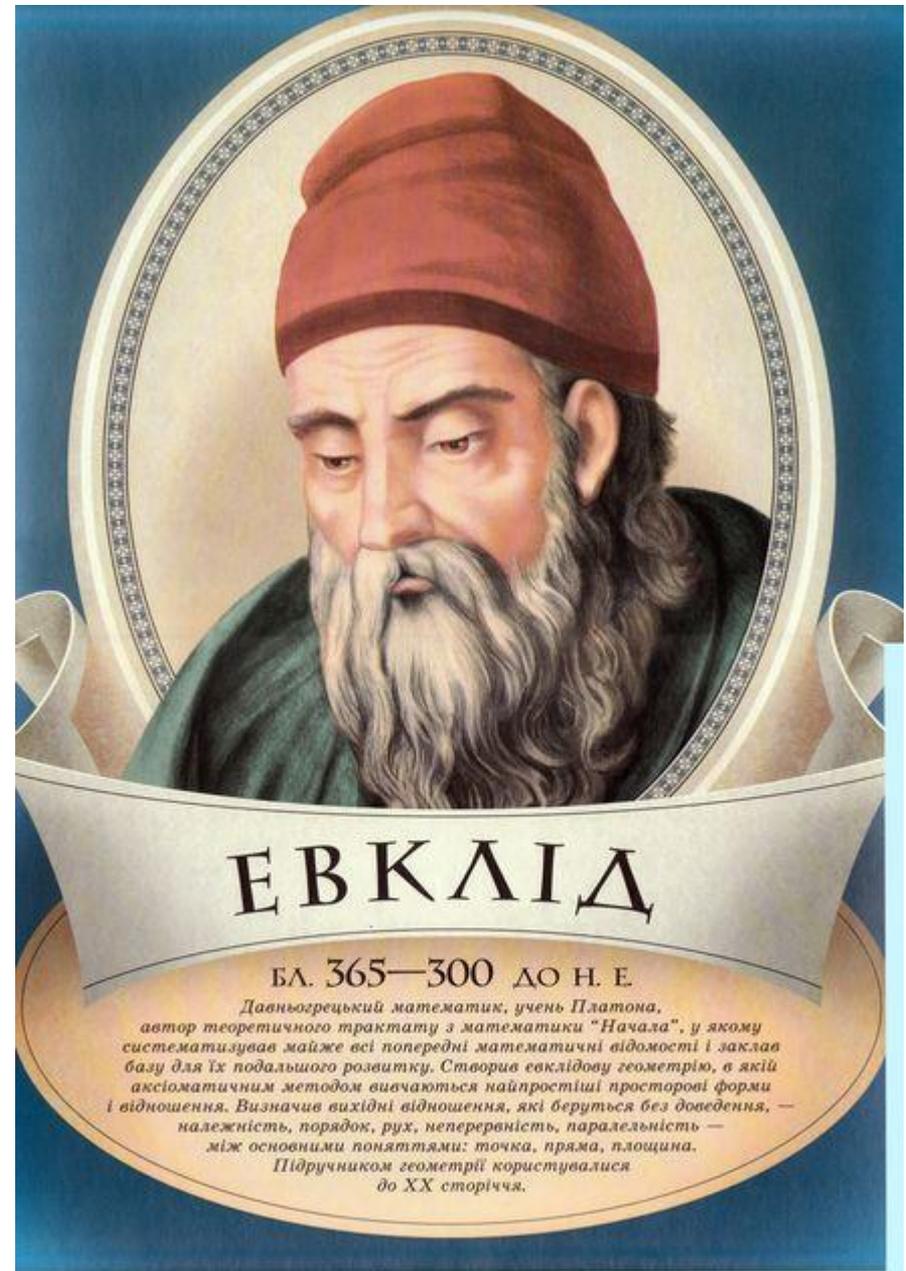
# Решение задачи

$$\text{НОД}(123, 82) = 41$$

$$123 : 41 = 3 \text{ (апельсина)}$$

$$82 : 41 = 2 \text{ (яблока)}$$

**Евклід** или **Эвклід** (др.-греч. (др.-греч. Εὐκλείδης, от «добрая слава», время расцвета — ок. 300 г. до н. э.) — древнегреческий математик (др.-греч. Εὐκλείδης, от «добрая слава», время расцвета — ок. 300 г. до н. э.) — древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Биографические сведения о Евклиде крайне скудны. Достоверным можно считать лишь то, что его научная деятельность протекала в **Александрии** в 3 в. до н. э.



# Алгоритм Евклида

- Больше число делим на меньшее.
- Если делится без остатка, то меньшее число и есть НОД.
- Если есть остаток, то каждый раз делитель делим на остаток до тех пор пока не разделится нацело.

## Пример:

Найти НОД (451, 287).

$$451 : 287 = 1 \text{ (остаток 123)}$$

$$287 : 164 = 1 \text{ (остаток 6)}$$

$$164 : 123 = 1 \text{ (остаток 41)}$$

$$123 : 41 = 3 \text{ (остаток 0)}$$

Конец: НОД – это последний, не равный нулю остаток.

$$\text{НОД (451, 287)} = 41$$

# Взаимно простые числа

Натуральные числа называют **взаимно простыми**, если их наибольший общий делитель равен 1.

$$\text{НОД}(77, 20) = 1$$

Числа 77 и 20 являются взаимно простыми.



# НОК

Наименьшее Общее Кратное

# Наименьшее общее кратное

Наименьшим общим кратным натуральных чисел  $a$  и  $b$  называют наименьшее натуральное число, которое кратно и  $a$ , и  $b$ .

Например:

1. Найти НОК чисел 28 и 21.

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{НОК}(28, 21) = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 84.$$

2. Найти НОК чисел 10, 25 и 30.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{НОК}(10, 25, 30) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150.$$

# Особые случаи нахождения НОК

- Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению  
НОК (54, 65) = 54 · 65 = 3510
- Если одно из данных чисел делится на все остальные, то это число и является наименьшим общим кратным данных чисел  
НОК (14, 28) = 28

## **Задача № 2**

В портовом городе начинаются три туристических теплоходных рейса, первый из которых длится 15 суток, второй – 20 суток и третий – 12 суток. Вернувшись в порт, теплоходы в этот же день снова отправляются в рейс. Сегодня из порта вышли теплоходы по всем трем маршрутам. Через сколько суток они впервые снова вместе уйдут в плавание?

# Решение задачи

$$\text{НОК}(15, 20, 12) = 60$$

Ответ: через 60 суток