



Древнейшие задачи

«Арифметика» Диофанта



Диофант – один из величайших математиков древности, заслуженно считающийся «отцом алгебры».

Основное его произведение – «Арифметика» в 13 книгах. Это последнее великое математическое сочинение античности, дошедшее до нас. Сохранилось, к сожалению, только 6 первых книг из 13. «Арифметика» посвящена Дионисию – как полагают, епископу Александрийскому.





Нововведения Диофанта

Первая книга начинается обширным введением, где читатель знакомится с подходом автора. Диофант ввёл буквенные обозначения для неизвестных и специальные символы для их степеней, включая и отрицательные. Особые символы обозначали знак равенства и отрицательные числа. Знак сложения подразумевался. Рациональные числа трактуются так же, как и целые, что тоже не типично для античных математиков. Сформулированы многие привычные нам правила алгебры: смена знака при переносе в другую часть уравнения, сокращение общих членов и др. Есть даже правило знаков: минус на минус даёт плюс. Всё это формулируется, как и положено в алгебре, в общем виде, без отсылки к геометрическим истолкованиям

Сборник задач Диофанта



Большая часть труда – это сборник задач с решениями (их всего 189), умело подобранных для иллюстрации общих методов. Главная проблематика «Арифметики» - нахождение положительных рациональных решений неопределённых уравнений. В левой части уравнений рассматриваются многочлены произвольной степени с рациональными коэффициентами. Сначала Диофант исследует уравнения 2-го порядка от 2 неизвестных: $F(x,y) = 0$; он указывает метод нахождения других решений, если одно уже известно. Затем аналогичные методы применяет к уравнениям высших степеней



Задача и её решение

Задача: Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение равно 96.

$$a + b = 20$$

$$a * b = 96$$

Решение: пусть разность двух этих чисел равна двум аритмам (переменным), т.е. $b - a = 2\zeta$, при учете того, что $b < a$ (но это не важно, с точностью до переименования чисел a и b). Тогда:

$$(10 - \zeta) * (10 + \zeta) = 96 \rightarrow 100 - \zeta^2 = 96 \rightarrow \zeta^2 = 4 \rightarrow \zeta = 2$$

Ответ: $a = 8, b = 12$ (или наоборот).



Задача и её решение

Задача: Найти три такие числа, что квадрат суммы всех трех, вычтенный из каждого давал квадрат (какого-либо рационального числа).

$$x - (x + y + z)^2 = \alpha^2$$

$$y - (x + y + z)^2 = \beta^2$$

$$z - (x + y + z)^2 = \gamma^2$$

Решение: положим сумму трех чисел одному арифметическому, т.е.

$$(x + y + z)^2 = \zeta \rightarrow x + y + z = \zeta^2 \quad (1)$$

Пусть $x = 2 \zeta^2$, $y = 5 \zeta^2$, $z = 10 \zeta^2$, тогда $\alpha^2 = \zeta^2$, $\beta^2 = 4\zeta^2$, $\gamma^2 = 9\zeta^2$. Подставляя в (1), получим: $2 \zeta^2 + 5 \zeta^2 + 10 \zeta^2 = \zeta$, откуда $\zeta = 1/17$.

Ответ: $x = 1/289$, $y = 5/289$, $z = 10/289$.



Эпитафия Диофанта

На надгробной плите одного из величайших математиков древности выбита такая надпись: «Здесь погребен Диофант, и камень могильный при счёте искусном расскажет о том, сколь долго был его век. Велением бога он мальчиком был шестую часть жизни своей. В двенадцатой части, затем, прошла его юность. Седьмую часть прибавил пред нами очаг Гименея. Пять лет протекло и прислал Гименей ему сына. Но горе ребенку – едва половину он прожил тех лет, что отец, как скончался, несчастный. Четыре года страдал Диофант от потери тяжёлой и умер, прожив для науки. Скажи мне, сколько лет достигнув, смерть воспринял Диофант?»

Решение: пусть продолжительность жизни Диофант равна ζ .
Тогда: $\frac{1}{6} \zeta + \frac{1}{12} \zeta + \frac{1}{7} \zeta + 5 + \frac{1}{2} \zeta + 4 = \zeta$

Ответ: $\zeta = 84$



И напоследок ...

Решение задач даёт основания полагать, что Диофант хорошо разбирался в теории чисел. Но в решениях задач нет общности – каждая задача решается по-своему, нет метода решения. Но, все же, огромным вкладом этого ученого в развитие математики явились введение неизвестного и упрощение формы записи задач (символы). В X веке «Арифметика» была переведена на арабский язык, после чего математики стран ислама продолжили некоторые исследования Диофанта. Латинский перевод «Арифметики» появился в XVII веке, и методы Диофанта оказали огромное влияние на Виета, Ферма и Декарта.