Математический

турнир

Задача 1

Задача 2

Задача 3

Задача 4

Задача 5

Задача 6

Задача 7

Задача 8

Задача 9

Задача 10

Задача № 1

Докажите, что: $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$

Решение . 1 способ

$17 - 12\sqrt{2} = (a - b)^2$; $17 - 12\sqrt{2} = a^2 - 2ab + b^2$

$17 = a^2 + b^2$;

$12\sqrt{2} = 2ab$

$6\sqrt{2} = ab$

Подбором находим, что $a = 3$; $b = 2\sqrt{2}$,

тогда $17 - 12\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^2$, имеем

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = |(3 - 2\sqrt{2})| = 3 - 2\sqrt{2}$$

т.к. $3 > 2\sqrt{2}$

Задача № 1

Докажите, что: $\sqrt{17-12\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$

2 способ

т.к. $3 - 2\sqrt{2} > 0$, то

$$3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9-12\sqrt{2}+8} = \sqrt{17-12\sqrt{2}}.$$

3 способ

т.к. обе части равенства положительны, сравним их квадраты

$$\left(\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2$$

Квадраты ***положительных*** чисел равны, значит сами числа равны

$$17-12\sqrt{2} = 9 - 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2} + \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

Задача № 2

- Найдите наибольшее значение выражения $\frac{10}{x^2+y^2+4x-6y+14}$ и определите при каких значениях х и у оно достигается.

Решение

$$\frac{10}{x^2+y^2+4x-6y+14}=\frac{10}{x^2+4x+4+y^2-6y+9-4-9+14}=\frac{10}{(x+2)^2+(y-3)^2+1}$$

Учитывая **положительность** числителя и знаменателя, делаем вывод, что наибольшее значение данного выражения достигается при наименьшем значении знаменателя

Т.к $(x + 2)^2 \geq 0$ и $(y - 3)^2 \geq 0$, то знаменатель принимает наименьшее значение при $x = -2$ и $y = 3$, тогда наибольшее значение равно:

$$\frac{10}{(-2+2)^2+(3-3)^2+1}=\frac{10}{1}=10$$

Ответ: 10, при $x = -2$ и $y = 3$

k

∈

Задача №3

Найдите все значения **k**, при которых уравнение **kx^2-6x+k=0** имеет два корня

Решение

При **k=0** уравнение становится линейным, и не может иметь двух корней

При **k≠0** уравнение является квадратным, поэтому два корня возможны только при положительном дискриминанте

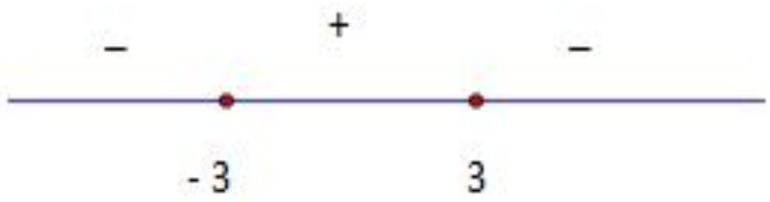
$36 - 4k^2 > 0$

$36 - 4k^2 = 0$

$4k^2 = 36$

$k^2 = 9$

$k = 3$, $k = -3$.



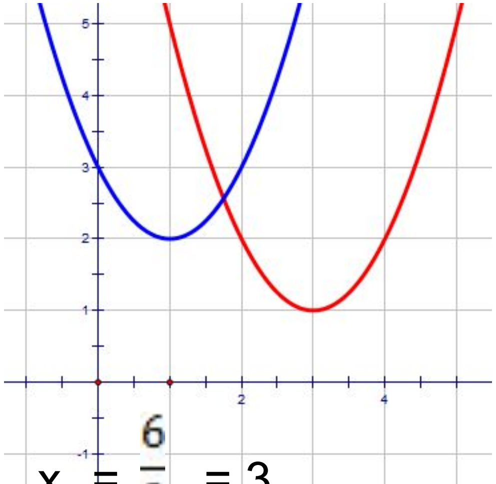
$k \in (-3; 3)$, но $k \neq 0$

Ответ $k \in (-3; 0) \cup (0; 3)$

Задача № 4

Докажите, что уравнение $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 10) = 1$ не имеет корней.

Решение



Рассмотрим функции $y = x^2 - 2x + 3$

$y = x^2 - 6x + 10$

Графиками данных функций являются параболы, ветви которых направлены вверх.

$y = x^2 - 2x + 3$, $x_в = \frac{2}{2} = 1$

$y_в = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$

значит $x^2 - 2x + 3 \geq 2$

$y = x^2 - 6x + 10$, $x_в = \frac{6}{2} = 3$

$y_в = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 1$

значит $x^2 - 6x + 10 \geq 1$

Тогда $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 10) \geq 2$ *<u>при любом x,</u>*

значит $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 10) \neq 1$,

Значит, уравнение

$(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 10) = 1$ не имеет корней

Задача № 5

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ b + c + d = 0 \\ a + b + d = 1 \\ a + c + d = 3. \end{cases}$$

Решение

Сложим все уравнения в системе и получим:

$3(a+b+c+d) = 6 \quad / : 3;$

$a+b+c+d = 2;$

$(a+b+c)+d = 2;$
$2 + d = 2$
$d = 0$

$a+(b+c+d) = 2;$
$a + 0 = 2$
$a = 2$

$(a+c+d)+b = 2;$
$3 + b = 2$
$b = -1$

$(a+b+d)+c = 2$
$1 + c = 2$
$c = 1$

Ответ. $a=2; c = 1; b =-1; d = 0.$

Задача № 6

Постройте график функции $y = \frac{x^3 - x}{x-1}$.

При каких значениях х, значения функции положительны

Решение

$$\frac{x^3 - x}{x-1} = \frac{x(x^2 - 1)}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x-1} = x(x+1) = x^2 + x,\ x \neq 1$$

(т. к. на нуль делить нельзя)

Графиком данной функции является

парабола $y=x^2+x$ с выколотой точкой (1;2)

1. Ветви направлены вверх, т.к. a>0

$y > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$

2. Координаты вершины

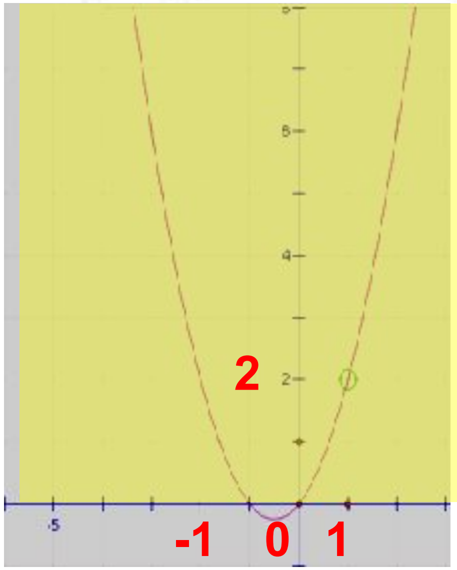
$x_в = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\quad y_в = (-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$

3. Пересечение с ОХ (из условия у=0)

x(x+1)=0

x=0 или x=-1



Задача №7

Сколько граммов 75%-ного раствора кислоты надо добавить к 30 г 15%-ного раствора кислоты, чтобы получить 50%-ный раствор кислоты?

Решение.

	вес раствора	% кислоты	вес кислоты *(грамм)*
1 раствор	х	75	0,75х
2 раствор	30	15	0,15·30=4,5
смесь	30 +х	50	

$4,5 + 0,75x = (30 + x)\cdot 0,5;$

$4,5 + 0,75x = 15 + 0,5x;$

$0,25x = 10,5;$

$x = 42$

Ответ. 42 г надо добавить 75%-ного раствора.

Задача № 8

Каждый слушатель на курсах изучает один из языков – английский, немецкий или французский. Отношение числа слушателей, изучающих английский, к числу слушателей, изучающих немецкий, равно 3 : 2, а изучающих немецкий к числу изучающих французский равно 8 : 5. Сколько процентов слушателей изучает наименее популярный на курсах язык?

Решение

Английский		
Немецкий	2x =8y	
французский		

1). 2x=8y

2) 12+8+5=25 – всего частей

3) 100% : 25 = 4% приходится на 1 часть

4) 4% ·5 = 20% -слушателей изучают французский язык и, т.к. на него приходится наименьшее число частей, то это наименее популярный язык на курсах.

Ответ: 20% изучают наименее популярный на курсах язык.

Задача № 9

Вычислите сумму:

$50^2 – 49^2 + 48^2 – 47^2 + \dots + 2^2 – 1^2$

Решение

В сумме всего 50 слагаемых, сгруппируем их парами

$$(50^2 – 49^2) + (48^2 – 47^2) + \dots + (2^2 – 1^2) =$$

$$=(50 – 49)(50 + 49) + (48 – 47)(48 + 47) +$$
$$+(46 – 45)(46 + 45) + \dots + (4 – 3)(4+3) + (2 – 1)(2 + 1) =$$
$$=1 \cdot 99 + 1 \cdot 95 + 1 \cdot 91 + \dots + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = 99 + 95 + 91 + \dots + 7 + 3$$

Получили 25 слагаемых. Группируем первое и последнее слагаемые, второе и предпоследнее и т.д.

$$(99+3) + (95 + 7) + (91 + 11) + \dots + (55 + 47) + 51 =$$

$$= 102 + 102 + 102 + \dots + 102 + 51$$

Получили 12 слагаемых равных 102 и слагаемое 51 $102 \cdot 12 + 51 = 1275.$

Ответ: 1275

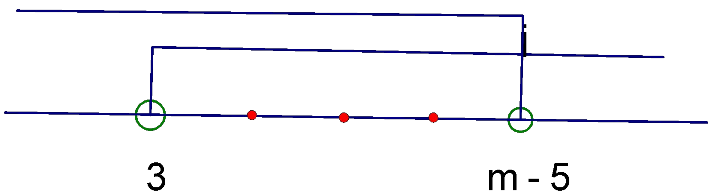
Задача №10

При каких значениях m система неравенств имеет ровно три целых решения:

$$\begin{cases} 5 - x < 2 \\ x + 6 < m + 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3 \\ x < m - 5 \end{cases}$$

Решение

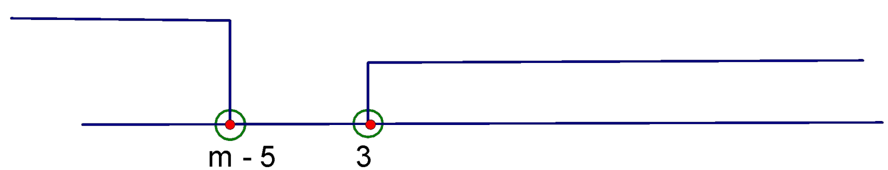
1) Если **m – 5 >3**, т. е **m >8**, то система имеет решение.



Решение неравенства должно содержать **3 целых решения**, это числа: **4;5;6,** значит ***6 < m – 5 ≤7***

11 < m ≤12

2)Если **m – *5* < 3**, т. е **m < 8**, то система не имеет решение.



3)Если **m – 5 = 3,** т. е **m = 8**, то система не имеет решение.

Ответ: При **m є (11;12]** система имеет ровно три целых решения.

ждем… ждем…

результаты проверки...

Спасибо за игру.

До новых встреч