ГИДРОДИНАМИКА

Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости

Лекция 4

1. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости

В потоке идеальной жидкости возьмем точку *M* с координатами *x*, *y*, *z* и выделим возле нее элемент жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда так, чтобы точка *M* была одной из его вершин (Рис. 1). Ребра параллелепипеда параллельны координатным осям и равны *dx*, *dy*, *dz*. Составим уравнение движения этого элемента жидкости. Пусть на жидкость внутри него действует результирующая единичная массовая сила с составляющими **X**, **Y** и **Z**. Тогда массовые силы, действующие на выделенный объем будут равны этим составляющим, умноженным на массу элемента. Поверхностные силы будут равны давлениям, умноженным на площади граней параллелепипеда.

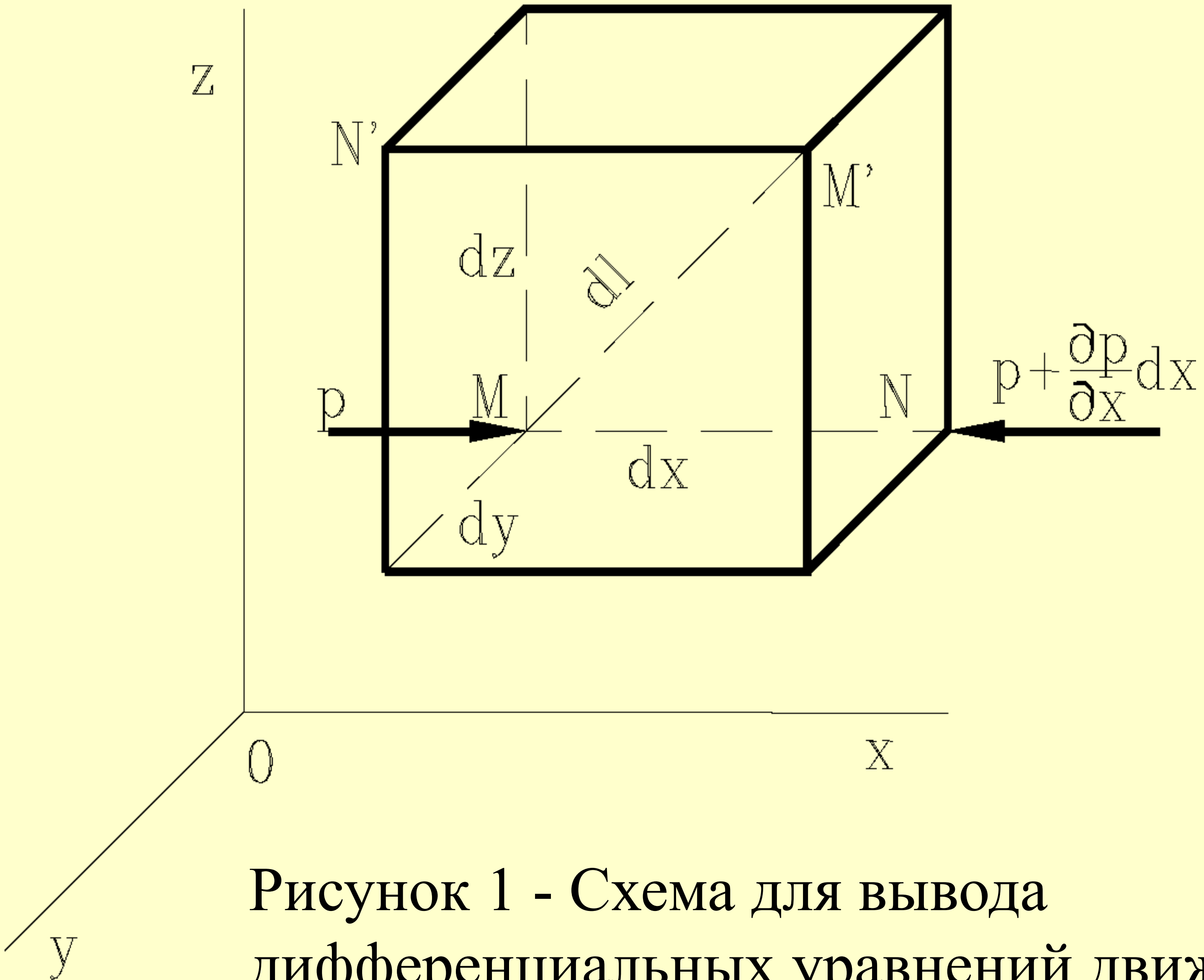

Рисунок 1 - Схема для вывода дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости.

Согласно второму закону Ньютона, уравнения движения вдоль координатных осей примут вид:

$$\rho dxdydz\frac{dV_x}{dt} = \mathbf{X}\rho dxdydz + pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz;$$

$$\rho dxdydz\frac{dV_y}{dt} = \mathbf{Y}\rho dxdydz + pdxdz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dxdz;$$

$$\rho dxdydz\frac{dV_z}{dt} = \mathbf{Z}\rho dxdydz + pdxdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dxdy.$$

Приведя подобные и разделив уравнения на массу элемента $\rho dxdydz$, получим

$$\frac{dV_x}{dt} = \mathbf{X} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \mathbf{Y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \mathbf{Z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Эта система дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости носит название **уравнений Эйлера.** Все члены этих уравнений имеют размерность ускорений, а смысл каждого уравнения состоит в следующем: полное ускорение частицы вдоль координатной оси складывается из ускорения от массовых сил и ускорения от сил давления.

Эти уравнения справедливы как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости, как для стационарного, так и нестационарного течения.

Для стационарного течения умножим каждое из уравнений на соответствующие проекции элементарного перемещения, равные $dx = V_x dt$; $dy = V_y dt$; $dz = V_z dt$, и сложим уравнения. Получим

$$\mathbf{X}dx + \mathbf{Y}dy + \mathbf{Z}dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}dx + \frac{\partial \rho}{\partial y}dy + \frac{\partial \rho}{\partial z}dz\right) =$$

$$= V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z\,.$$

Выражение в скобках – это полный дифференциал давления dp, выражения в правых частях – дифференциалы от половин квадратов проекций скорости:

$$\mathbf{X}dx + \mathbf{Y}dy + \mathbf{Z}dz - \frac{dp}{\rho} = d\left(\frac{V_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{V_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{V_z^2}{2}\right);$$

или $$dU = \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right),$$

где U – силовая функция.

Рассмотрим частный случай этого уравнения, когда из массовых сил действует только сила тяжести: $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = 0$; $\mathbf{Z} = -g$. Подставляя эти значения, получим:

$$-gdz = \left(\frac{dp}{\rho}\right) + d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$ или $$dz + \left(\frac{dp}{\rho g}\right) + d\left(\frac{V^2}{2g}\right) = 0.$$

Для идеальной жидкости плотность ρ = const, так как эта жидкость абсолютно несжимаемая. Поэтому предыдущее уравнение можно переписать в виде

$$d\left(\frac{V^2}{2g}+\frac{p}{\rho\, g}+z\right)=0.$$

Следовательно, $$\boxed{\frac{V^2}{2g}+\frac{p}{\rho\, g}+z=\text{const},}$$

то есть мы получили уравнение **Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости**.

2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости и его смысл

Рассмотрим установившееся течение идеальной жидкости, находящейся под действием только одной массовой силы – силы тяжести. Возьмем одну из элементарных струек потока и выделим сечениями 1 и 2 участок струйки произвольной длины (рис. 2). Пусть площади сечений равны dS_1 и dS_2, скорости в них V_1 и V_2, давления – p_1 и p_2, а высоты от произвольного уровня z_1 и z_2.

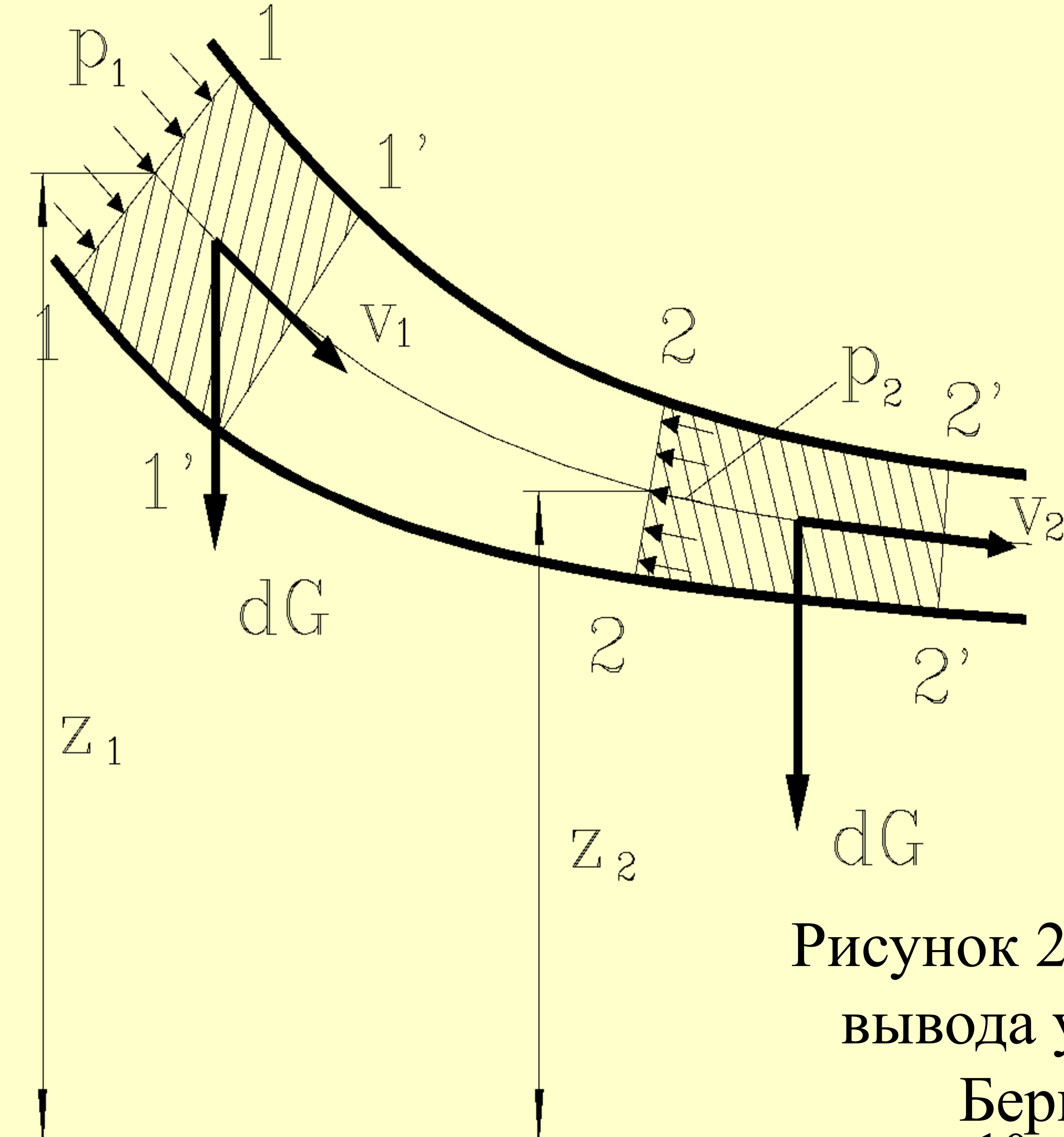

Рисунок 2- Схема для вывода уравнения Бернулли

За бесконечно малый отрезок времени *dt* участок струйки сместится в положение 1’ – 2’.

Из механики известно, что работа сил, приложенных к телу, равна приращению кинетической энергии тела. В данном случае к участку струйки приложены поверхностные силы давления и массовая сила – сила тяжести.

Работа сил давления в первом сечении положительна, так как направление силы совпадает с направлением перемещения, во втором – отрицательная, а на боковой поверхности струйки равна нулю (вектора силы и скорости перпендикулярны).

Работа сил давления в первом сечении положительна, так как направление силы совпадает с направлением перемещения, во втором – отрицательная, а на боковой поверхности струйки равна нулю (вектора силы и скорости перпендикулярны).

Работа равна произведению силы на перемещение вдоль направления силы. Тогда работа сил давления будет равна

$$p_1\, dS_1\, V_1\, dt - p_2\, dS_2\, V_2\, dt.$$

Работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии положения участка струйки, поэтому надо из энергии положения жидкости в объеме 1 – 2 вычесть энергию положения в объеме 1’ – 2’. При этом энергия положения объема 1’ – 2 остается неизменной, и останется лишь разность энергий элементов 1 – 1’ и 2 – 2’. Учитывая уравнение расхода, просто заметить, что вес обоих элементов одинаков

$$dG = \rho\, g\, V_1\, dt\, dS_1 = \rho\, g\, V_2\, dt\, dS_2.$$

Тогда работа силы тяжести: $dG(z_1 - z_2)$.

При вычислении приращения кинетической энергии рассматриваемого участка струйки за время dt, необходимо из кинетической энергии объема 1' – 2' вычесть кинетическую энергию объема 1 – 2. Получится разность кинетических энергий объемов 2 – 2' и 1 – 1'. Таким образом, приращение кинетической энергии участка струйки равно

$$\frac{dG\left(V_2^2 - V_1^2\right)}{2g}.$$

Из полученных выражений составим уравнение:

$$p_1 dS_1 v_1 dt - p_2 dS_2 v_2 dt + dG(z_1 - z_2) = \frac{dG\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2g}.$$

Разделим его на dG

$$\frac{p_1}{\rho\, g}-\frac{p_2}{\rho\, g}+z_1-z_2=\frac{V_2^2}{2g}-\frac{V_1^2}{2g}.$$

Перегруппировав слагаемые, получим **уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости**:

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho\, g}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho\, g}+z_2,} \tag{1}$$

где $\dfrac{V^2}{2g}$ – скоростной напор;

$\dfrac{p}{\rho\, g}$ – пьезометрический напор;

z – геометрический напор.

Так как сечения струйки взяты произвольным образом, то сумма этих трех напоров (H – полный напор) есть величина постоянная вдоль струйки:

$$H = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho\, g} + z = const$$

Уравнение Бернулли можно переписать через **удельные энергии**. Для этого умножим его на g:

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2,} \qquad (2)$$

где $V^2/2$ – удельная кинетическая энергия;

p/ρ – удельная энергия давления движущейся жидкости;

gz – удельная энергия положения.

Последнее уравнение – **это уравнение закона сохранения механической энергии**.

Если это уравнение умножить еще и на ρ, то получим уравнение Бернулли, записанное через **давления**:

$$\boxed{\frac{\rho V_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2,} \quad (3)$$

где $\dfrac{\rho V^2}{2}$ – динамическое давление;

p – гидромеханическое давление;

$\rho g z$ – весовое давление.

Энергетический смысл уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли представляет собой математическое выражение ***закона сохранения энергии*** вдоль элементарной трубки. Сумма его членов равна полному запасу энергии, которым обладает единица массы, полному давлению и полному напору относительно принятой плоскости сравнения.

Уравнения (1-3), в свою очередь, представляют собой меру энергии, которой обладает единица массы, объема или силы тяжести в данном сечении элементарной струйки относительно принятой плоскости сравнения.

Умножив все члены каждого уравнения (1-3) соответственно на определенные значения массы, объема или силы тяжести, получим значение механической энергии в джоулях, которой обладает жидкость, проходя через намеченное сечение. Таким образом, жидкость является носителем энергии, перенося ее вдоль струйки от сечения к сечению.

Гидравлический смысл уравнения Бернулли

Для элементарной струйки невязкой жидкости первое слагаемое уравнения (1) представляет собой ***скоростной напор*** $H_{\text{ск}}$, который определяет удельную кинетическую энергию, второе слагаемое ***пьезометрический напор*** H_p, третье - ***геометрический напор***, соответствующий превышению оси трубки над плоскостью сравнения, $H_г$.

Сумма пьезометрического и геометрического напоров равна ***статическому напору***, который определяет запас потенциальной энергии единицы силы тяжести в данном сечении струйки. относительно принятой плоскости сравнения, $H_{ст}=Hp+H_г$. Следовательно, ***полный напор*** представляет собой сумму скоростного и статического напоров: $H=H_{ск}+H_{ст}$.

Пьезометрический напор измеряется пьезометром - трубкой *1* (рис. 3) , начальное сечение которой расположено по касательной, к направлению скорости *u*. Сумма пьезометрического и скоростного напоров измеряется трубкой Пито - трубка *2,* входное сечение которой нормально направлению скорости *u*. Разность показаний трубки *2* и пьезометра *1* соответствует значению скоростного напора, по которому определяют скорость:

$$u=\sqrt{2gH_{ск}}$$

В сочетании друг с другом эти трубки называются **трубками Пито-Прандтля** (или Пито-ЦАГИ), которые широко используются в технике для измерения скоростей жидкости.

На рисунке 4 показано изменение всех трех напоров вдоль элементарной струйки. Линия изменения пьезометричес-ких напоров называется **пьезометричес-кой линией**. Ее можно рассматривать как геометрическое место уровней в **пьезометрах**, установленных вдоль струйки.

Из графика видно, что изменение площади живого сечения струйки приводит к заметному изменению скоростного напора.

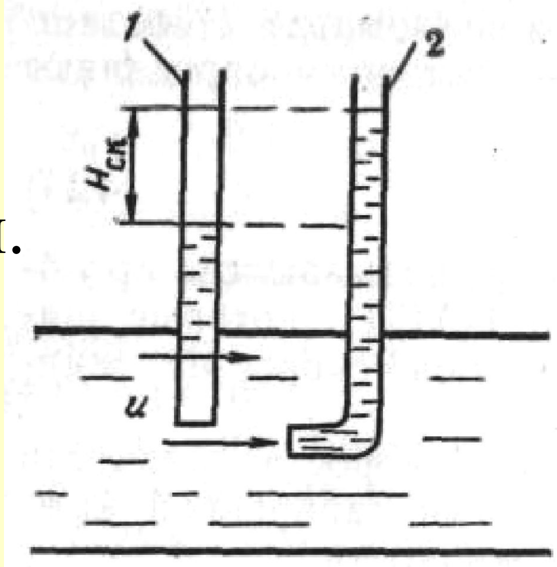

Рисунок 3 - Определение скоростного напора

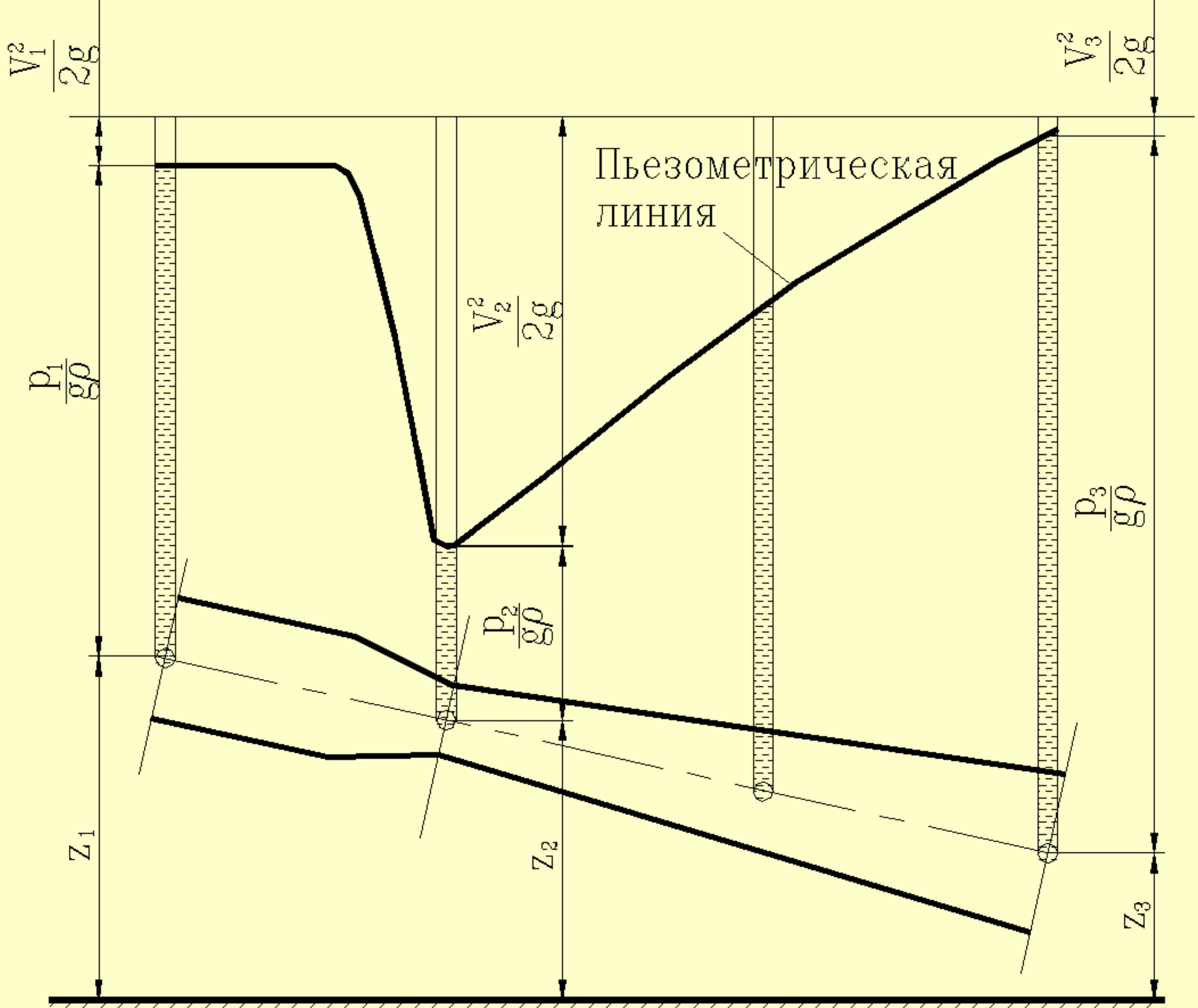

Рисунок 4 - Изменение напоров вдоль струйки идеальной жидкости

При уменьшении диаметра живого сечения в 2 раза скорость возрастает также в 2 раза, а скоростной напор – в 4 раза. При горизонтальном расположении струйки это изменение происходит за счет изменения пьезометрического напора. При резком сужении элементарной струйки пьезометрический напор, а значит и давление, могут упасть настолько, что последнее станет меньше атмосферного.

На первый взгляд, согласно уравнения Бернулли, при очень сильном сужении струйки абсолютное давление может стать и вовсе отрицательным, что в принципе невозможно. Дело в том, что при снижении давления в струйке **до давления насыщенных паров** жидкость начнет резко испаряться, и давление останется положительным.

Но в этом случае пользоваться уравнением Бернулли уже нельзя, так как при его выводе использовалось **уравнение расхода**, которое справедливо только при условии, что **не нарушается сплошность среды**.