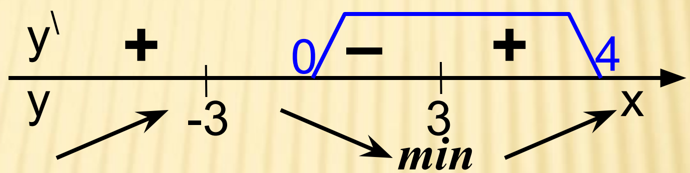
Наибольшее и наименьшее значение функции.

Алгоритм решения задач

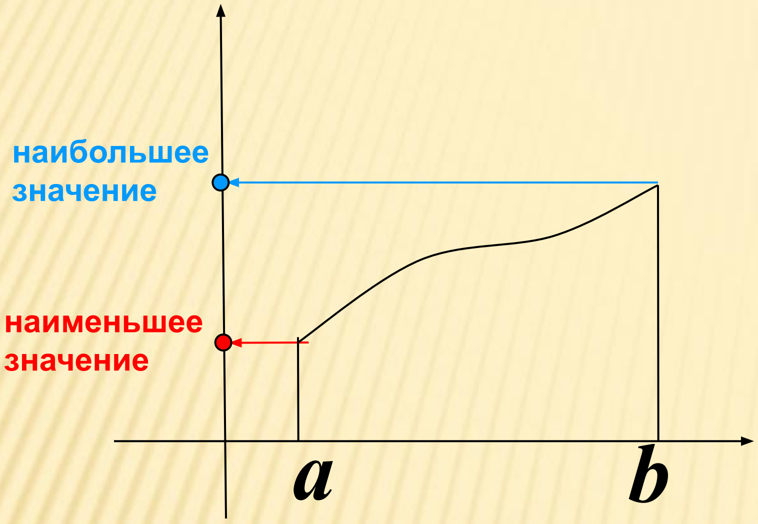
Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f^{/}(x)$	1) $y^{/} = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y^{/} = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ 3 -3 $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	В 11 - 5 4

Другой способ решения

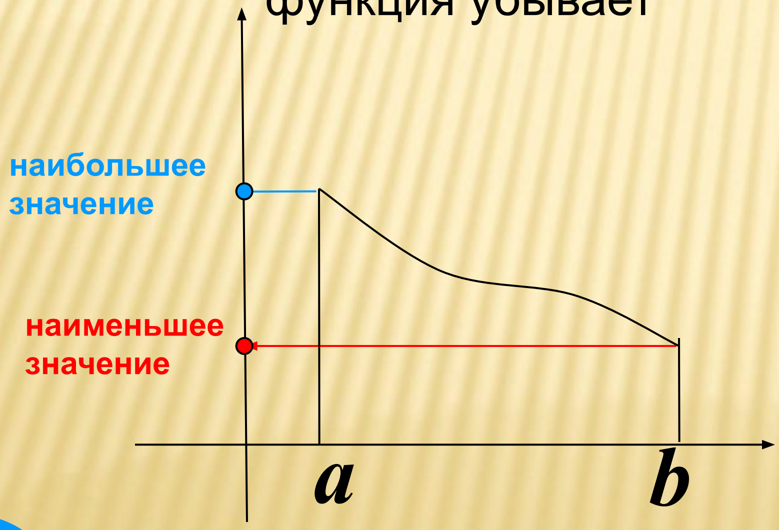
Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ 3 -3 
3. Вычислить значения функции в критических точках ~~и на концах отрезка.~~	3) $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее~~	В 11 - 5 4 **Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным.**

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

функция возрастает



функция убывает



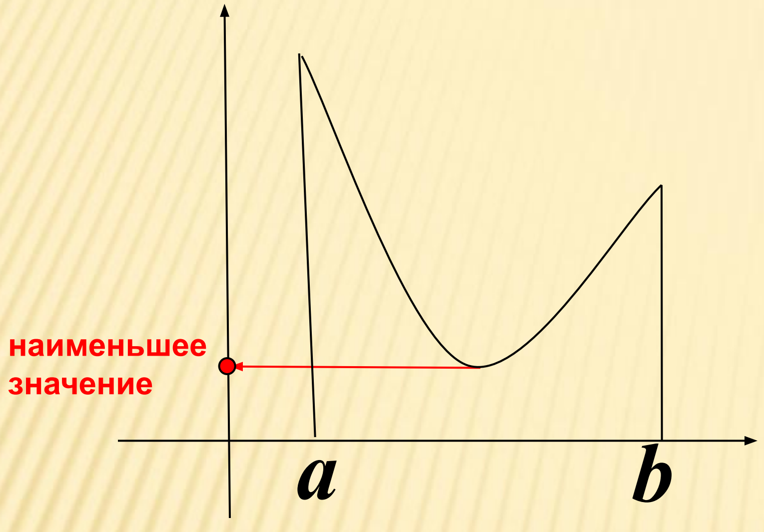
Предположим, что функция f не имеет на отрезке [a; b] критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

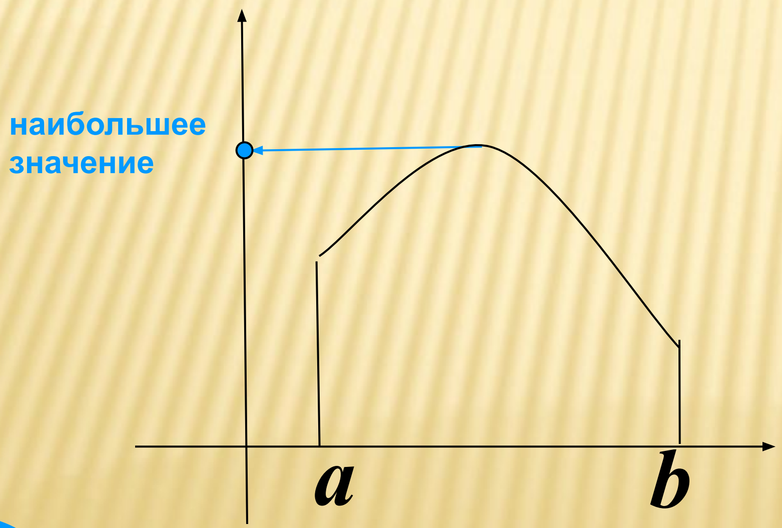
Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a; b] — это значения в концах a и b.

Предположим, что функция f имеет на отрезке [a; b] **одну** точку экстремума.



Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.



Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.

Сложная функция

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ – функция, представленная как композиция нескольких функций. **Сложная функция** – функция от функции.

Сложная функция $u\left(v(x)\right)$ представлена в виде цепочки простых функций. $v(x)$ – промежуточный аргумент, x – независимая переменная.

Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.

$$\left[u\left(v(x)\right)\right]' = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x)$$

Чтобы **найти производную сложной функции**, нужно:

1. Определить, какая функция является внешней и найти по таблице производных соответствующую производную.

2. Определить промежуточный аргумент.

Функция квадратного корня

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Показательная функция

$$y = 2^{x^2 + 2x + 5}$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Логарифмическая функция

$$y = \log_5\left(4 - 2x - x^2\right) + 3$$

Функция промежуточного аргумента – квадратичная функция

Степенная функция

$$y = \sin^4 x$$

Функция промежуточного аргумента – тригонометрическая функция sinx

1. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^{x} + 3$ на отрезке [1; 2]

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(1) = e^{2} - 6e + 3$; $y(2) = e^{4} - 6e^{2} + 3$

2) $y' = \quad - 6e^{x} + 0 = 2e^{x}(e^{x} - 3)$

$$[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$$

$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$(kx)' = k$$

$$(C)' = 0$$

$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

> 0

$\neq 0$

1) производная для внешней функции: $(e^{x})' = e^{x}$

$2e^{x}(e^{x} - 3) = 0$

$e^{x} - 3 = 0$

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума.

Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Проверим, принадлежит ли x=ln3 промежутку [1; 2]

$x = \ln 3 \in [1; 2]$

$$1 \le \ln 3 \le 2$$

$$\ln e \le \ln 3 \le \ln e^{2}$$

$$e \le 3 \le e^{2} \quad \textit{верно}$$

$$e \approx 2{,}7$$

y': – +

y: ↘ $\ln 3$ ↗ x

min

Найдем значение функции в критической точке.

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 9 - 6 \cdot 3 + 3 = -6$$

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$

D(y): $5 - 4x - x^2 \geq 0$

$$f'(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

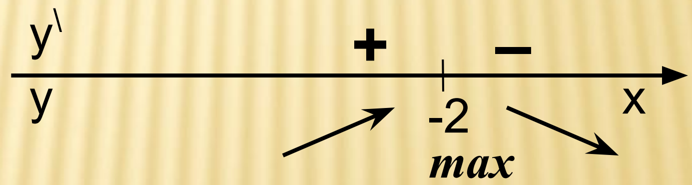
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{5-4x-x^2}}\cdot\left(5-4x-x^2\right)' =$$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$$= \frac{1}{2\sqrt{5-4x-x^2}}\cancel{(-4-2x)}\ \frac{-2(2+x)}{2\sqrt{5-4x-x^2}}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

$x = -2 \in$ D(y)



Наибольшее значение функция примет в точке максимума.

$$y(-2)=\sqrt{5-4\cdot(-2)-(-2)^2} = \sqrt{5+8-4} = \sqrt{9} = 3$$

В 14	3					

При решении некоторых заданий на вычисление наибольшего и наименьшего значений функции можно найти ответ и без вычисления производной.

Сложная функция $f\left(g(x)\right)$ представлена в виде цепочки простых функций.

Где g(x) – промежуточный аргумент, квадратичная функция

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

Если внешняя функция является монотонно возрастающей на всей области определения, значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция будет иметь наибольшее значение.

А наименьшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция будет иметь наименьшее значение.

Рассмотрим примеры.

2 способ

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $5 - 4x - x^2 \geq 0$

Функция квадратного корня монотонно возрастает на всей области определения, значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $-x^2 - 4x + 5$ будет иметь наибольшее значение.
Старший коэффициент квадратного трехчлена равен $-1 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. И наибольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{-4}{2*(-1)} = -2 \in D(y)$$

Итак, наибольшее значение функция квадратного корня примет, когда промежуточная квадратичная функция примет наибольшее значение, т.е. в точке $x = -2$. Вычислим его:

$$y(-2)=\sqrt{5-4\cdot(-2)-(-2)^2}=\sqrt{5+8-4}=\sqrt{9}=3$$

В 14	3					

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$

D(y): $x \in R$

$f^{/}(g(x)) = f^{/}(g(x)) \cdot g^{/}(x)$

$(a^x)^{/} = a^x \ln a$

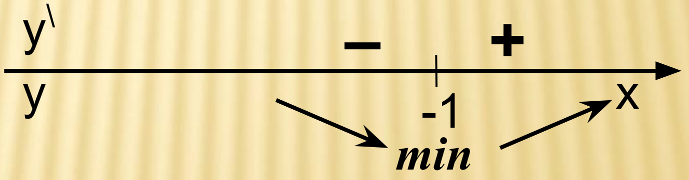
$y^{/} = 2^{x^2+2x+5} \ln 2 \cdot \left(x^2 + 2x + 5\right)^{/} =$

Вычислим производную, используя формулу для вычисления производной сложной функции.

$= \underbrace{2^{x^2+2x+5}}_{>0} \underbrace{\ln 2}_{>0} \cdot (2x + 2)$

Найдем критические точки, которые принадлежат D(y).

x = - 1 $\in$ D(y)



Наименьшее значение функция примет в точке минимума.

$y(-1) = 2^{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} = 2^{1-2+5} = 2^4 = 16$

В 14	1	6				

2 способ

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$

D(y): $x \in R$

Решим задание без вычисления производной.

Показательная функция с основанием 2>1 монотонно возрастает на всей области определения. Значит, наименьшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $x^2 + 2x + 5$ будет иметь наименьшее значение.
Старший коэффициент квадратного трехчлена равен +1> 0, значит, ветви параболы направлены вверх. И наименьшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{2}{2*1} = -1 \in \text{D(y)}$$

Итак, наименьшее значение показательная функция примет, когда промежуточная квадратичная функция примет наименьшее значение, т.е. в точке x = – 1. Вычислим его:

$$y(-1) = 2^{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} = 2^{1-2+5} = 2^4 = 16$$

В 14	1	6				

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_5\left(4 - 2x - x^2\right) + 3$$

Решим задание без вычисления производной.

D(y): $4 - 2x - x^2 > 0$

Логарифмическая функция с основанием 5 является монотонно возрастающей на всей области определения. Значит, наибольшее значение она будет иметь, когда функция промежуточного аргумента, т.е. квадратичная функция $4 - 2x - x^2$ будет иметь наибольшее значение. Старший коэффициент квадратного трехчлена равен –1<0, значит, ветви параболы направлены вниз. И наибольшее значение квадратичная функция будет иметь в вершине.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{-2}{2(-1)} = -1$$

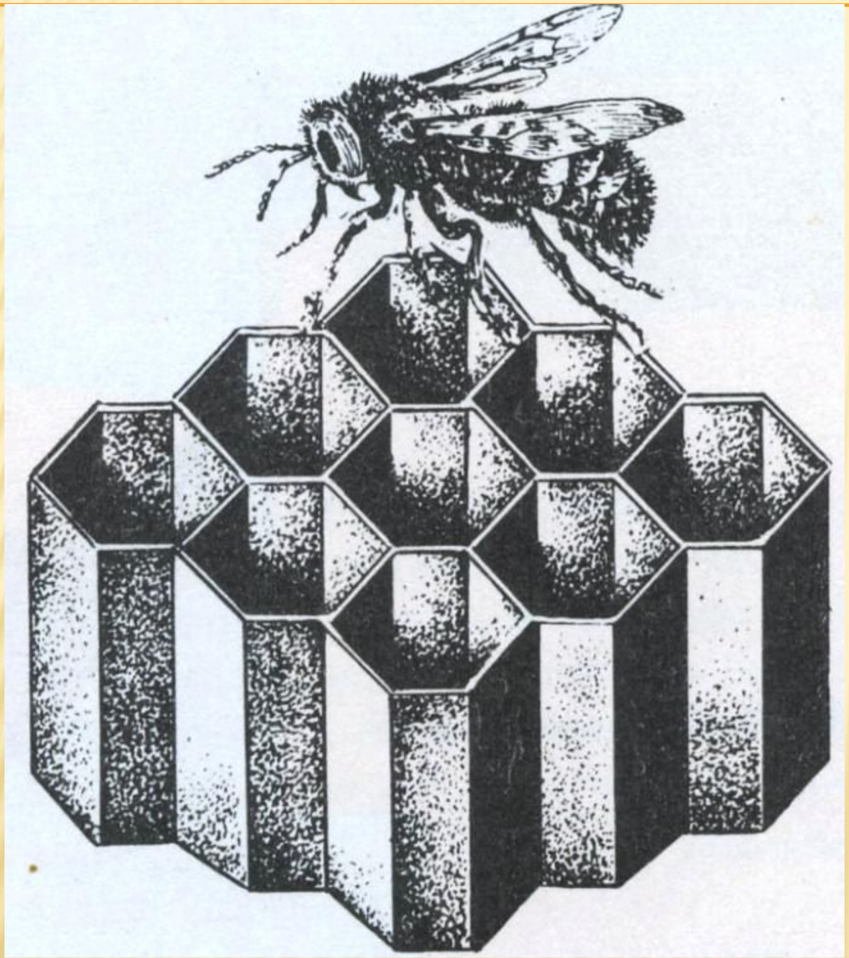
1

$$y(-1) = \log_5\left(4 - 2\cdot(-1) - (-1)^2\right) + 3 = \log_5\left(4 + 2 - 1\right) + 3 = \log_5 5 + 3$$

$$= 4$$

В 14 | 4

ЧТО ОБЩЕГО МЕЖДУ ФУНКЦИЕЙ, ЗАБОРОМ И КЛУБНИКОЙ?



« Самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что, прежде чем строить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове. »

К. Маркс

Задача :

Какими должны быть размеры участка прямоугольной формы площадью $1600\ м^2$ *,*

чтобы на его ограждение было израсходовано наименьшее количество материала ?

Составим математическую модель задачи :

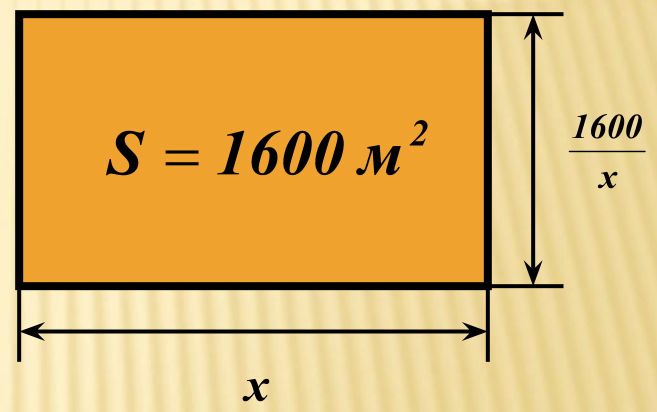
из всех прямоугольников площадью 1600 кв. м найти прямоугольник наименьшего периметра

ИЗ ВСЕХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ПЛОЩАДЬЮ 1600 КВ. М НАЙТИ ПРЯМОУГОЛЬНИК НАИМЕНЬШЕГО ПЕРИМЕТРА.

1. *P – периметр прямоугольника*

2. *x (м) – длина прямоугольника*

$\frac{1600}{x}$ *(м) – ширина прямоугольника*



3. $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1600}{x} > 0 \end{cases}$; $x > 0$

4. $P = 2\left(x + \frac{1600}{x}\right)$

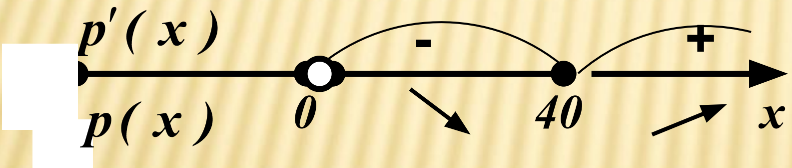
5. **Рассмотрим функцию** $p(x) = 2\left(x + \frac{1600}{x}\right)$

$$5.\quad p(x) = 2\left(x + \frac{1600}{x}\right) = 2x + \frac{3200}{x}$$

$$p'(x) = 2 - \frac{3200}{x^2} = \frac{2x^2 - 3200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1600)}{x^2} = \frac{2(x-40)(x+40)}{x^2}$$

$$p'(x) = 0, \qquad x_1 = 40, \qquad x_2 = -40$$

$$-40 \notin (0; +\infty)$$



x = 40 – **точка минимума, значит функция** *p (x)* **в этой точке принимает наименьшее значение. Следовательно и периметр прямоугольника будет наименьшим.**

Длина прямоугольника –
40 (м)

Ширина прямоугольника –

$$\frac{1600}{40} = 40 \ (\ м\ )$$

Длина участка – 40 (м)

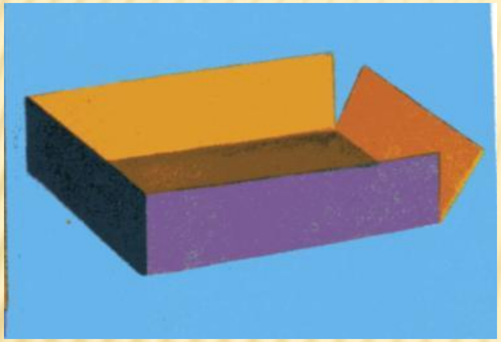
Ширина участка – 40 м

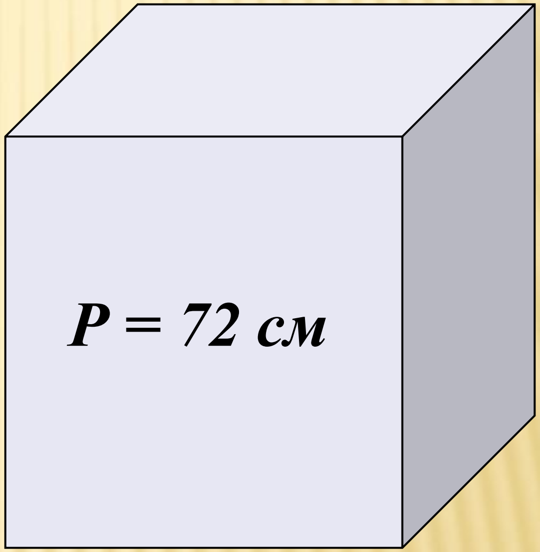
Ответ: *длина участка 40 м, ширина участка – 40 м.*

Задача :

Выращенную на участке клубнику ученики отправляют в детский сад в коробках, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, периметр боковой грани которого 72 см. Какими должны быть размеры коробки, чтобы ее вместимость была наибольшей ?

Выращенную на участке клубнику ученики отправляют в детский сад в коробках, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, периметр боковой грани которого 72 см. Какими должны быть размеры коробки, чтобы ее вместимость была наибольшей ?





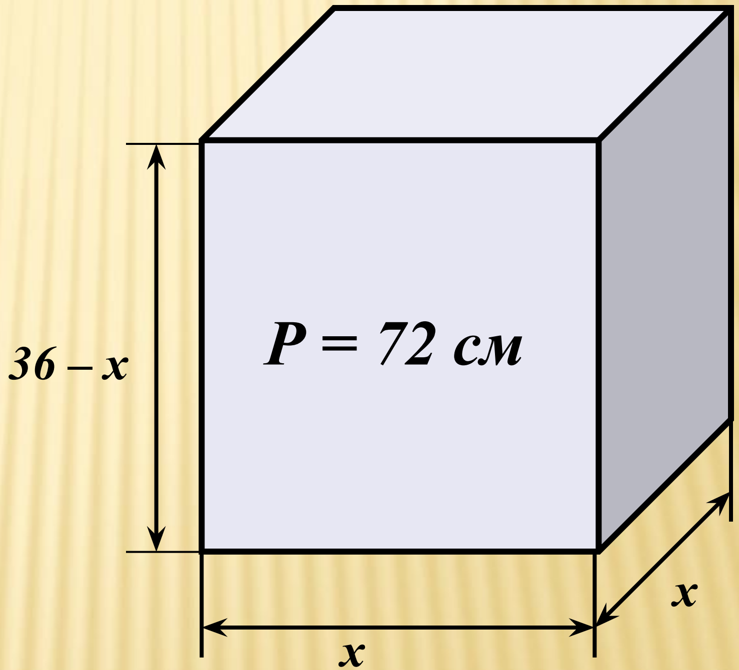
<u>Математическая модель :</u>

Из всех прямоугольных параллелепипедов с квадратным основанием, периметр боковой грани которого 72 см, найти параллелепипед наибольшего объема.

Из всех прямоугольных параллелепипедов с квадратным основанием, периметр боковой грани которого 72 см, найти параллелепипед наибольшего объема.

1. *V* – объем прямоугольного параллелепипеда

2. *x* (см) – длина прямоугольного параллелепипеда ,
x (см) – ширина прямоугольного параллелепипеда
36 – *x* (см) – высота прямоугольного параллелепипеда



3. $\begin{cases} x > 0 \\ 36 - x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < 36 \end{cases}$, $\quad 0 < x < 36$

$$V = S_{\text{основания}} \cdot h$$

4. $V = x^2 (36 - x)$

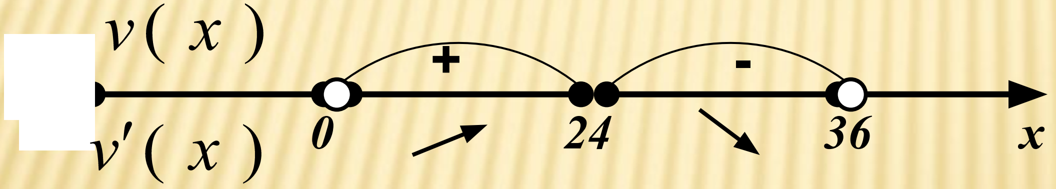
$v(x)$

5. *Рассмотрим функцию* $v(x) = x^2(36 - x)$

$$v'(x) = 72x - 3x^2 = 3x(24 - x)$$

$$v'(x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 24$$

$$0 \notin (0; 36)$$



x = 24 **– точка максимума, значит функция *v (x)* в этой точке принимает наибольшее значение. Следовательно и объем прямоугольного параллелепипеда при *x = 24* будет наибольшим.**

Длина прямоугольного параллелепипеда –
24 (см)

Ширина прямоугольного параллелепипеда –
24 (см)

Высота прямоугольного параллелепипеда –
36 – 24 = 12 (см)

Ответ : ***чтобы вместимость коробки была наибольшей, ее размеры должны быть 24 см, 24 см, 12 см***

ВСЕМ СПАСИБО!

МОЛОДЦЫ!