Лекция 2.7.
12. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
12.1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. 12.1.1. Общие понятия. Теорема существования.

- Простейшие дифференциальные уравнения: $y' = f(x)$ или $dy = f(x)dx.$
- Решение $y = \int f(x)dx + C.$
- Более сложные дифференциальные уравнения:
- $y' + x^2 y = 0,$ $xy' - y = 0,$ $xy' = y + x$ и т.д.
- или $dy + x^2 ydx = 0,$ $xdy - ydx = 0,$ $xdy = (y + x)dx$ и т.д.

Определение.

- Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, функцию y, и ее производную y'.

- Будем рассматривать дифференциальные уравнения функции одной переменной.
- Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = f(x, y).$$

Определение.

- Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке ее вместе с производной в это уравнение превращает его в тождество.

- **Примеры:** 1) $y' = y.$ Решение $y = Ce^{x}.$
где C - произвольная постоянная.
- 2) $y' = -y.$ Решение $y = Ce^{-x}.$
-

Дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y).$$

имеет бесчисленное множество решений, которые обычно определяются формулой $y = \varphi(x, C)$, содержащей одну произвольную постоянную. Такое множество решений называют общим решением дифференциального уравнения. Придавая C определенные (допустимые) значения, получим *частные решения*.

- При решении конкретных задач нас будет интересовать частное решение, определяемое *начальными условиями*. Обычно начальные

условия задаются парой значений (x_0), (y_0) или $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

- Задача отыскания частного решения по начальному условию называется *задачей Коши.*

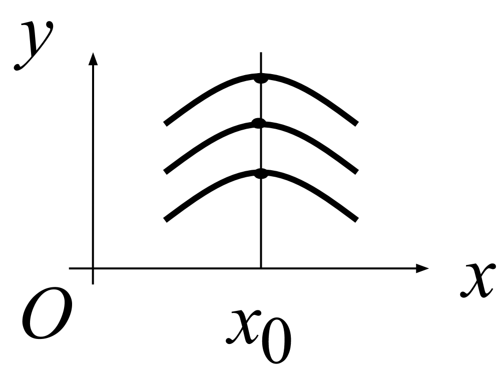
Теорема Коши о существовании и единственности решения.

- Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и начальное условие $y\Big|_{x=x_0} = y_0$.

Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в открытой области, содержащей точку $P(x_0, y_0)$, то в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ это уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $\left(y(x_0) = y_0\right)$.

- Без доказательства.

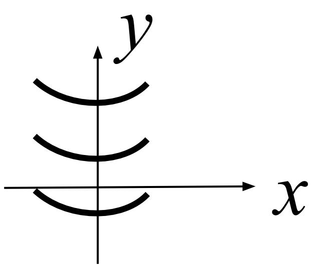
График частного решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой. Общее решение – семейство интегральных кривых.



- Чтобы отыскать частное решение, нужно в общее решение $y = \varphi(x, C)$ подставить x_0, y_0 и разрешить уравнение относительно C.

Примеры: 1)

- Дифференциальное уравнение $y' = 2x.$



Общее решение $y = x^2 + C.$

Начальное условие $y\big|_{x=1} = 2.$

Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения. Получим алгебраическое уравнение для определения произвольной постоянной

$$2 = 1 + C.$$

Следовательно $C = 1.$

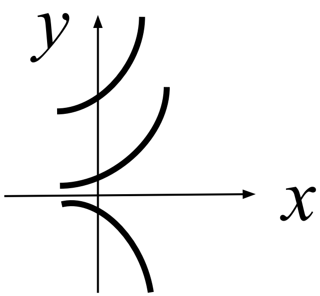
Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям будет $y = x^2 + 1.$

2)

- Дифференциальное уравнение $y' = y.$

Общее решение $y = Ce^{x}.$

Начальное условие $y\big|_{x=0} = 2.$



Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения. Получим $2 = C.$

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям будет

$$y = 2e^{x}.$$

3)

- Дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y+x}{x}, \ \left(x>0\right).$

Общее решение $y = x\ln x + Cx.$ Начальное условие $y\big|_{x=1} = 0.$
Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения. Получим $C = 0.$
Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям будет $y = x\ln x.$

Общее решение дифференциального уравнения может быть получено и в неявном виде

$$\Phi\left(x, y, C\right) = 0.$$

12.1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

- Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f(y)dy = g(x)dx.$$

Проинтегрировав, получим $\int f(y)dy = \int g(x)dx + C.$

Если $y\big|_{x=x_0} = y_0,$ то $\int\limits_{y_0}^{y} f(y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx.$

- **Пример:**

$$3y^2dy = 2xdx,\ y^3 = x^2 + C,\ y = \sqrt[3]{x^2 + C}.$$

Определение. Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются **д**ифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \qquad P(x)Q(y)dy + M(x)N(y)dx = 0,$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C. \qquad \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy + \int \frac{M(x)}{P(x)}dx = C.$$

- **Внимание!** Может произойти потеря частного решения.

Пример.

- Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x(y+1)dx-\left(x^2+1\right)ydy=0.$$

Разделим переменные

$$\frac{x}{x^2+1}dx-\frac{y}{y+1}dy=0,\qquad \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=\ln C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-y+\ln|y+1|=\ln C,\qquad \frac{Ce^y}{y+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

Потеряли частное решение $y=-1.$

12.1.3. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

- **1) Радиоактивный распад.** Экспериментально установлено, что скорость распада пропорциональна количеству не распавшегося вещества. В момент t_0

$$M = M_0. \quad \frac{dM}{dt} = -kM \quad (k > 0), \quad \frac{dM}{M} = -kdt, \quad \ln M = -kt + \ln C,$$

$$M = Ce^{-kt}, \qquad M\big|_{t=0} = M_0 \to C = M_0, \qquad M = M_0 e^{-kt}.$$

- Период полураспада T. Тогда $\frac{M_0}{2} = M_0 e^{-kT} \to e^{kT} = 2.$
Следовательно $T = \frac{\ln 2}{k}.$

k - определяется экспериментально.

2) Охлаждение тела.

- Скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела T и температурой окружающей среды T_c.

$$T_c = const, \qquad T\Big|_{t_0} = T_0.$$

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_c\right), \ \left(k > 0\right), \qquad \frac{dT}{T - T_c} = -kdt,$$

$$\ln\left(T - T_c\right) = -kt + \ln C, \ \left(T > T_c\right), \quad T = T_c + Ce^{-kt},$$

$$T\Big|_{t=0} = T_0 \to T_0 = T_c + C \to C = T_0 - T_c.$$

- Окончательно

$$T = T_c + \left(T_0 - T_c\right)e^{-kt}$$

12.1.4. Однородные дифференциальные уравнения.

- **Определение.** Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,y)$$

называется однородным, если функция $f(x,y)$ может быть представлена, как функция отношения своих аргументов

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

- **Пример.**

$$\left(xy - y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0,\ \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\dfrac{y}{x}}.$$

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией измерения m, если

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y).$$

- **Примеры:** 1) $f(x,y)=x+3y$ - 1-й порядок однородности.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+3\lambda y=\lambda(x+3y)=\lambda f(x,y).$$

- 2) $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2$ - 2-й порядок однородности.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 f(x,y).$$

- 3) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+7xy}$ - нулевой порядок однородности

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0 f(x,y)=f(x,y).$$

(просто однородная функция)

- **Пример приведения функции.**

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{y^2+xy}=\frac{1-(y/x)^2}{(y/x)^2+y/x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ однородная функция нулевого измерения, можно преобразовать к уравнению с разделяющимися переменными.

- Введем вспомогательную функцию $t = y/x$ или $y = tx$.

$$y' = t'x + t.$$

- Тогда $t'x + t = \varphi(t)$, $t'x = \varphi(t) - t$, $\dfrac{dt}{\varphi(t) - t} = \dfrac{dx}{x}$,

$$\int \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln|x| + C.$$

- Вычислив интеграл, и перейдя к $y = tx$, получим

$$F(x, y) = \ln|x| + C.$$

- Предполагается, что $\varphi(t) - t \neq 0$.
- Если $\varphi(t) - t \equiv 0$, то $y' = \dfrac{y}{x} - C$.

Пример. $$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

$$y = tx,$$
$$y' = t'x + t,$$
$$t'x + t = \frac{t - t^2}{1 - 2t}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{t - t^2}{1 - 2t} - t\right) = \frac{1}{x}\frac{t^2}{1 - 2t}.$$

- Тогда $\frac{1 - 2t}{t^2} dt = \frac{dx}{x}.$
- Проинтегрировав, получим $\frac{1}{t} + 2\ln|t| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$

или

$$\ln\left|e^{1/t} t^2\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \to e^{1/t} t^2 = \frac{C}{x}.$$

- Окончательно $$\frac{y^2}{x} e^{x/y} = C.$$