Дифференциальные уравнения

Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка

Дифференциальные уравнения

- **Определение 1.**
- **Линейное дифференциальное уравнение**
- **n-го порядка** имеет вид

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + p_0(x) y = q(x) \qquad [ЛДУ]$$

- где $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x) - коэффициенты,$

  $q(x) - правая\ часть\ уравнения.$

Дифференциальные уравнения

- **Определение 1.**
- **Линейное дифференциальное уравнение**
- **n-го порядка** имеет вид

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + p_0(x) y = q(x) \qquad [ЛДУ]$$

- где $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x) - коэффициенты,$

  $q(x) - правая\ часть\ уравнения.$

- **Определение 2.**
- Линейное дифференциальное уравнение называется **однородным**, если $q(x) \equiv 0 \quad [ЛОДУ];$
- и называется **неоднородным**, если $q(x) \not\equiv 0 \quad [ЛНДУ];$

Дифференциальные уравнения

- **Определение 3.**
- Линейным дифференциальным **оператором n-го порядка** называется выражение:

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y$$

ЛОДУ: $Ly = 0$

ЛНДУ: $Ly = q(x)$

Дифференциальные уравнения

- **Определение 4.**
- **Общим решением ЛДУ n-го порядка** называется
- функция $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$,
- зависящая от x и n произвольных постоянных,
- если любое решение может быть получено из нее при некоторых конкретных значениях постоянных.

- Решение, полученное из общего решения при конкретных значениях постоянных, называется **частным решением.**

Дифференциальные уравнения

- **Задача Коши.**
- Найти решение **ЛДУ n-го порядка**

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+p_0(x)y=q(x)$$

- удовлетворяющее **начальным условиям**

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y_1\,,\dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

$\Longrightarrow$

Теорема ($\exists$!).
Пусть в интервале (a,b) коэффициенты $p_0(x),\dots,p_{n-1}(x)$ и правая часть $q(x)$ **ЛДУ n-го порядка** – непрерывные функции.
Тогда при любом $x_0\in(a\,,\,b)$ найдется некоторая окрестность $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ такая, что в этой окрестности **существует единственное решение** задачи Коши.

- **Линейно зависимые и линейно независимые системы функций.**

- **Определение 1.**
- Система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$
- называется **линейно зависимой в интервале** (a, b)
- если найдутся такие коэффициенты $C_1, \ldots, C_k$
- что **среди них есть хотя бы один, отличный от нуля**, а линейная комбинация функций $C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_k\varphi_k(x)$
- **тождественно равна нулю в интервале** (a, b)

- **Линейно зависимые и линейно независимые системы функций.**

- **Частный случай.**
- Система двух функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$
- будет **линейно зависимой в интервале** (a, b)
- тогда и только тогда, когда их отношение

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv const \quad \forall x \in (a, b)$$

- Доказательство. **Необходимость.**
- $\varphi_1(x), \varphi_2(\bar{x})$ линейно зависимы $\rightarrow C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) \equiv 0, \; C_1 \neq 0 \rightarrow \dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv -\dfrac{C_2}{C_1}$
- **Достаточность.**

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv C \neq 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_1(x) - C\varphi_2(x) \equiv 0$$

Дифференциальные уравнения

- **Линейно зависимые и линейно независимые системы функций.**

- **Определение 2.**
- Система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$
- называется **линейно независимой в интервале** (a, b)
- если линейная комбинация этих функций

$$C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_k\varphi_k(x)$$

- **тождественно равна нулю при всех** $x \in (a, b)$
- лишь в том случае, когда **все коэффициенты** $C_1, \ldots, C_k$
- **равны нулю.**

Дифференциальные уравнения

- **Примеры.**
- 1. Система функций

$$\varphi_1(x) \equiv 1, \ \varphi_2(x) \equiv x, \ \varphi_3(x) \equiv x^2$$

- линейно независимая в любом интервале (a, b)
  - Рассмотрим линейную комбинацию этих функций и предположим, что она тождественно равна нулю:

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 \equiv 0$$

  - Тогда и производные от нее должны равняться нулю:

$$C_2 + 2C_3 x \equiv 0,$$

$$2C_3 \equiv 0$$

  - Отсюда следует:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

- **Примеры.**

2. Система функций

$$\varphi_1(x) = e^{rx},\ \varphi_2(x) = e^{kx},\ r \neq k,$$

линейно независимая в любом интервале (a, b):

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{e^{rx}}{e^{kx}} = e^{(r-k)x} \neq const \quad \forall x \in (a, b)$$

В общем случае система функций

$$\varphi_1(x) = e^{r_1 x},\ \varphi_2(x) = e^{r_2 x},\ \ldots,\ \varphi_n(x) = e^{r_n x},\ r_i \neq r_j, i \neq j$$

линейно независимая при всех x .

- **Примеры.**

3. Система функций

$$\varphi_1(x) = e^x, \ \varphi_2(x) = e^{2x}, \ \varphi_3(x) = 2e^x$$

линейно зависимая в любом интервале (a, b):

Положим

$$C_1 = -2, \ C_2 = 0, \ C_3 = 1$$

и составим линейную комбинацию функций с этими коэффициентами

$$-2 \cdot e^x + 0 \cdot e^{2x} + 2e^x \equiv 0$$

Дифференциальные уравнения

- **Определитель Вронского.**

- Пусть функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$
- имеют в интервале (a, b) непрерывные
- производные до порядка k-1 включительно.

- **Определение.**
- **Определителем Вронского** системы функций
- $\{\varphi_k(x)\}$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_k'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

- **Определитель Вронского.**

- **Теорема** (необходимое условие линейной зависимости).
- Пусть система функций $\{\varphi_i(x),\ 1 \le i \le k\}$
- линейно зависима в (a, b).
- Тогда $\boldsymbol{W(x) \equiv 0}$ при всех $x \in (a, b)$

- Доказательство (при к=2).

- **1.** $\exists\, C_1, C_2 \quad (\,\textit{хотя бы одно не равно нулю}\,)$

$$\forall\, x \in (a,b) \;\Rightarrow\; C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) \equiv 0$$

- **2.** $\textit{Пусть, например,}\ C_2 \ne 0$

$$\Rightarrow \quad \varphi_2(x) = -\frac{C_1}{C_2}\varphi_1(x) \equiv \alpha\,\varphi_1(x) \qquad \Longrightarrow \qquad W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \alpha\varphi_1 \\ \varphi_1' & \alpha\varphi_1' \end{vmatrix} \equiv 0$$

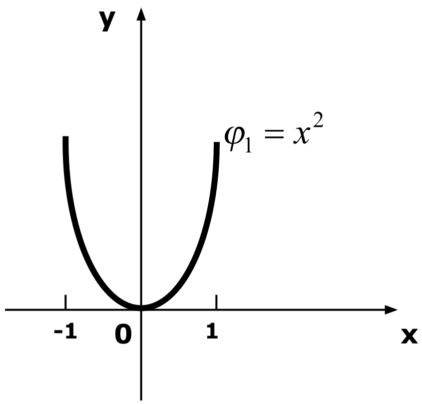
- **Пример.**
- Рассмотрим две функции

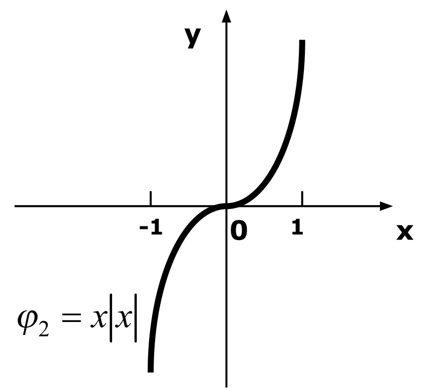
$$\varphi_1 = x^2 \quad u \quad \varphi_2 = x|x|$$

- На отрезке $[-1, 1]$ они линейно независимые:

$$C_1 \bullet x^2 + C_2 \bullet x|x| \equiv 0 \ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \ \ \Rightarrow \ C_1 + C_2 = 0 \\ x = -1 \ \Rightarrow \ C_1 - C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ C_1 = C_2 = 0$$





- **Пример.**
- Рассмотрим две функции

$$\varphi_1 = x^2 \quad u \quad \varphi_2 = x|x|$$

- На отрезке $[-1, 1]$ они линейно независимые:

$$C_1 \bullet x^2 + C_2 \bullet x|x| \equiv 0 \;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \;\;\Rightarrow\;\; C_1 + C_2 = 0 \\ x = -1 \;\Rightarrow\;\; C_1 - C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; C_1 = C_2 = 0$$

- Определитель Вронского:

$$W(x) \equiv 0$$

- **1.**

$$x \geq 0 \Rightarrow W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} \equiv 0$$

- **2.**

$$x \leq 0 \;\Rightarrow\; W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} \equiv 0$$

- **3.**

$$x = 0 \;\Rightarrow\; W(0) = 0$$