Вычислительные методы в алгебре и теории чисел

Сафарьян Ольга Александровна

Лекция 3.
Приближение функций .

1. Основные теоретические сведения
2. Информация относительно аппроксимируемой функции
3. Класс аппроксимирующих функций
4. Выбор критерия согласия
5. Вопросы для самопроверки

Основные теоретические сведения

1. ***Постановка задачи о приближении (аппроксимации) функции:*** данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (***аппроксимировать***) некоторой функцией $G(x)$ так, чтобы отклонение (в некотором смысле) $G(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $G(x)$ при этом называется ***аппроксимирующей*.**

В процессе численной реализации этого подхода необходимо рассмотреть следующие четыре основных вопроса:

- 1. об имеющейся информации относительно функции $f(x)$, т.е. о виде, в котором задана функция $f(x)$;
- 2. о классе аппроксимирующих функций, т.е. о том, какими функциями $G(x)$ будет аппроксимирована функция $f(x)$;
- 3. о близости аппроксимируемой и аппроксимирующей функций, т. е. о выборе ***критерия согласия***, которому должна удовлетворять функция $G(x)$;
- 4. о погрешности, т.е. об определении разности между точным и приближенным значениями.

Основные теоретические сведения

В вопросе об информации *относительно функции* f различают два основных случая: либо функция задана аналитически, либо в виде таблицы. Графический способ задания функции относят либо к первому, либо ко второму случаю в зависимости от конкретной задачи.

В вопросе о классе аппроксимирующих функций следует руководствоваться двумя главными факторами:

- аппроксимирующая функция должна отражать характерные особенности аппроксимируемой,
- быть достаточно удобной в обращении, т. е. при выполнении над ней необходимых операций.

Основные теоретические сведения

Три группы аппроксимирующих функций:

- Первая – это функции вида $1, x, \ldots, x^n$, линейные комбинации которых порождают класс всех многочленов степени не выше n.
- Вторую группу образуют тригонометрические функции $\sin a_i x$ и $\cos a_i x$, порождающие ряды Фурье, и интеграл Фурье.
- Третья группа состоит из экспоненциальных функций $e^{a_i x}$, определяющих явления типа распада и накопления, часто встречающиеся в реальных ситуациях.

Основные теоретические сведения

Вопрос о критерии согласия, по существу, заключается в том, чтобы определить некоторым образом «расстояние» между аппроксимируемой функцией и аппроксимирующими функциями. Затем из всего класса аппроксимирующих функций выбрать ту, для которой это «расстояние» минимально.

Основные теоретические сведения

Вопрос о точности получаемого решения – во многих отношениях является основным, т.к. в конечном итоге качество метода определяется в первую очередь быстротой получения решения с требуемой точностью, или, как еще говорят, скоростью сходимости.
Поэтому понятно, что выбор узловых точек, класса аппроксимирующих функций и критерия согласия должен быть подчинен одному вопросу – о требуемой точности.

Основные теоретические сведения

Вопрос о точности получаемого решения кажется довольно простым: необходимо, чтобы приближенное решение отличалось от точного решения не более чем на заданное число ε.

Однако вопрос о возможности сколь угодно точного приближения функции f, зависящий от перечисленных выше «параметров» (узлы x_i, класс функций G, критерий согласия f и G), в общем случае остается открытым и подлежит исследованию для каждого конкретного аппроксимационного процесса.

Основные теоретические сведения

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}_0^n$, то аппроксимация называется точечной. К ней относятся интерполирование, среднеквадратичное приближение и др.

При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке [a; b]) аппроксимация называется непрерывной (или *интегральной*).

Информация относительно аппроксимируемой функции

2. Постановка задачи интерполяции. Информация относительно аппроксимируемой функции

Пусть заданы точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ функции $f(x)$ в этих точках.

Соответствие будем называть *таблицей значений функции* $f(x)$ *в узлах* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и говорить, что функция $f(x)$ задана таблицей своих значений

Таблица 1

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_n)$

$$y_i = f(x_i), \left(0 \le i \le n\right) \qquad (1)$$

Класс аппроксимирующих функций

В качестве аппроксимирующей функции будем принимать многочлен некоторой степени n.

$$G_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (2)$$

Выбор критерия согласия

Наибольший интерес представляет частный случай, когда для аппроксимирующей функции расстояние $\rho = 0$. Это означает, что для табулирования функции $y = f(x)$, Заданной своими значениями формуля (1) требуется построить аппроксимирующую функцию $G(x)$, совпадающую в узлах x_i со значениями заданной функции , т. е. такую, что $G(x_i) = y_i$.

Задача интерполяции состоит в построении функции $G(x)$, удовлетворяющей условию представленному в соотношении (3) :

$$G(x_i) = f(x_i),\ (0 \le i \le n) \qquad (3)$$

Выбор критерия согласия

- Задача о построении функции $G(x)$, график которой проходит через заданные точки $(x_i; y_i)$. Указанный способ приближения функций принято называть *интерполяцией* (или и*нтерполированием*), а точки x_i – узлами интерполяции.
- Выбор функции $G(x)$ неоднозначен, так как по заданной таблице можно построить бесконечно много интерполирующих функций.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом, представленном в формуле (2). При этом коэффициенты a_j будут подбираться так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции.

Выбор критерия согласия

- *Экстраполяция*. Пусть $x_{\min}$, $x_{\max}$ – минимальный и максимальный узлы интерполяции. В случае, когда интерполяция используется для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в точке x, не принадлежащей отрезку $[x_{\min}; x_{\max}]$ (*отрезку наблюдения*), принято говорить о том, что осуществляется *экстраполяция*.

Алгебраическим интерполяционным многочленом $G_n(x)$ назовем многочлен

$$G_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (4)$$

степени не выше n, в узлах $x_0, x_1, \dots, x_n$ принимает значения $f(x_0)$, $f(x_1), \dots, f(x_n)$

$$G_n(x_i) = f(x_i) \quad (0 \le i \le n) \qquad (5)$$

Выбор критерия согласия

Существование и единственность интерполяционного многочлена вытекают из теоремы.

Теорема 3.1. Существует единственный интерполяционный многочлен степени n, удовлетворяющий условиям (5). Непосредственное определение коэффициентов a_k интерполяционного многочлена связано с некоторыми вычислительными трудностями. Поэтому при решении практических задач имеют дело со специальными видами интерполяционного многочлена.

Вопросы для самопроверки

- 1. Сформулируйте постановку задачи об аппроксимации функции.
- 2. Каковы основные вопросы численной реализации задачи об аппроксимации функции?
- 3. Сформулируйте постановку задачи интерполяции.
- 4. В чем заключается отличие интерполяции функции от экстраполяции?
- 5. Что такое интерполяционный многочлен?