2. Одномерная оптимизация

2.1. Методы классического анализа

Рассмотрим задачу минимизации функции одной переменной на множестве $f(x)$ $X \subset R^1$:

$$\min_{x \in X} f(x),$$

где R^1 - множество действительных чисел одномерного пространства.

а) глобальные и локальные минимумы

Определение 1. Точка x^* доставляет ***глобальный минимум*** функции $f(x)$ на множестве X, если $x^* \in X$ и $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in X$

Определение 2. Точка x^* называется ***точкой строгого глобального минимума*** функции $f(x)$ на множестве X, если $x^* \in X$ и

$$f(x^*) < f(x)$$

для всех $x \in X,\ x \neq x^*.$

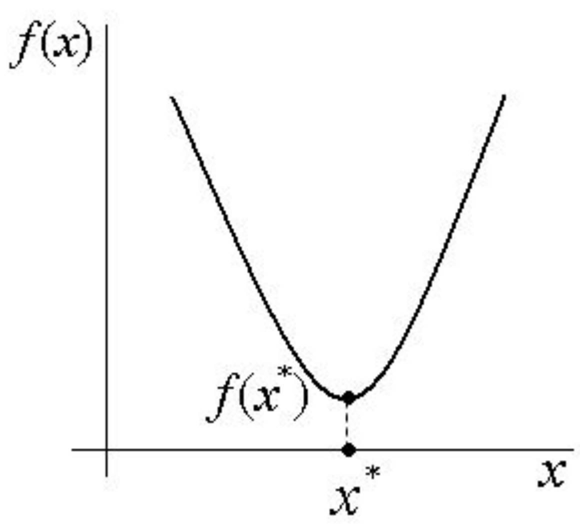
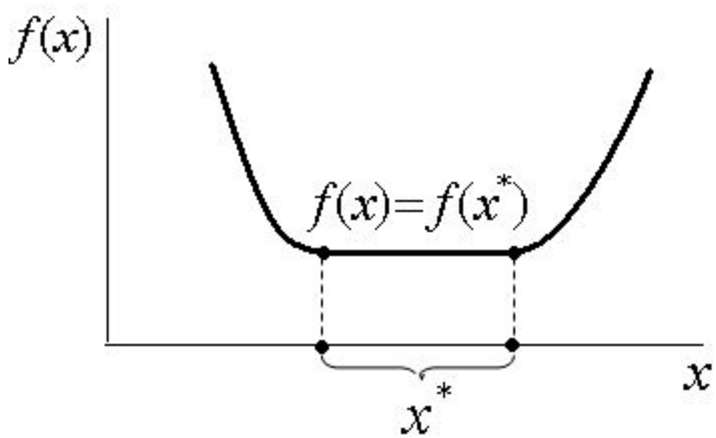


График функции, имеющей *нестрогий минимум,* может содержать горизонтальный участок в окрестности точки минимума.

Под решением в этом случае принимается множество

$$x^* = [x^* \in X; f(x) = f(x^*)]$$

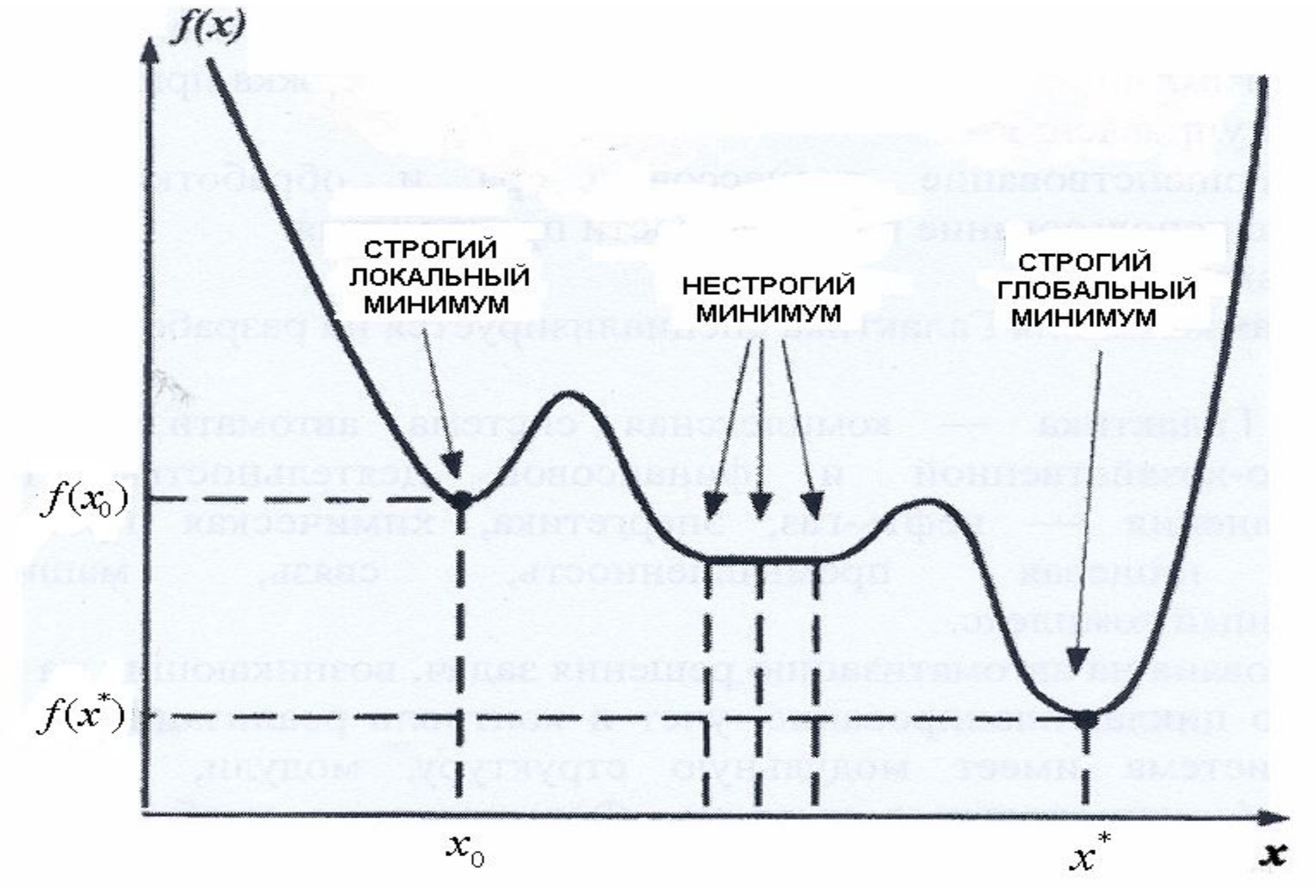


Определение 3. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0, \quad x \in X$ удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ выполнено неравенство

$$f(x_0) \leq f(x). \qquad (2.1)$$

Если неравенство (2.1) – строгое, то точку x_0 называют *точкой строгого локального минимума* функции $f(x)$.

Выделенные разновидности минимума проиллюстрированы на рисунке.



в) алгоритм нахождения точки минимума с использованием производной

1. Найти первую производную функции $f(x)$.
2. Найти критические (стационарные) точки функции, для этого:

   - найти корни уравнения $f'(x) = 0$;

   - найти точки, в которых функция $f'(x)$ не существует.
3. Исследовать поведение знака $f'(x)$ в окрестности каждой критической точки: если при переходе слева направо через критическую точку функция меняет знак, то такая критическая точка является точкой экстремума:

   - ***точкой максимума***, если знак меняется с плюса на минус;

   - ***точкой минимума***, если знак меняется с минуса на плюс.

г) достаточные условия экстремума

- Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то достаточным условием минимума является положительность, а максимума отрицательность второй производной $f''(x^*)$.

- Если существует производная $f^{(n)}(x)$ и если

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \ \dots \ = f^{(n-1)}(x^*) = 0\,,$$

то функция $f(x)$ имеет в точке x^* :

- ***минимум*** при n четном и $f^{(n)}(x^*) > 0$;
- ***максимум*** при n четном и $f^{(n)}(x^*) < 0.$

Если n нечетно, то функция $f(x^*)$ в точке x^* имеет ***точку перегиба.***

Пример 2.1. Решить пример 1.1, используя необходимые и достаточные условия экстремума.

Решение. Целевая функция имеет вид $S(r) = 2\pi(r^2 + \dfrac{V_0}{\pi \cdot r})$.

Найдем стационарные точки функции $S(r)$

$$S'(r) = 2\pi(2r - \frac{V_0}{\pi \cdot r^2}) = 0 \rightarrow r^* = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

Так как функция дважды непрерывно дифференцируема, то достаточные условия экстремума исследуем с помощью второй производной

$$S''(r) = 2\pi(2 + \frac{2V_0}{\pi \cdot r^3}).$$

Так как $S''(r^*) = 2\pi(2 + \dfrac{2V_0}{\pi} \cdot \dfrac{2\pi}{V_0}) = 12\pi > 0,$ то в точке r^* достигается

минимум целевой функции.

Из условия $V_0 = \pi \cdot r^2 \cdot h$ найдем:

$$h^* = \frac{V_0}{\pi \cdot (r^*)^2} = \frac{V_0}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{V_0}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 \cdot V_0^3}{V_0^2 \cdot \pi^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V_0}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot V_0}{2\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} = 2r^*,$$

т.е. высота цилиндрического бака должна быть равна диаметру основания бака.

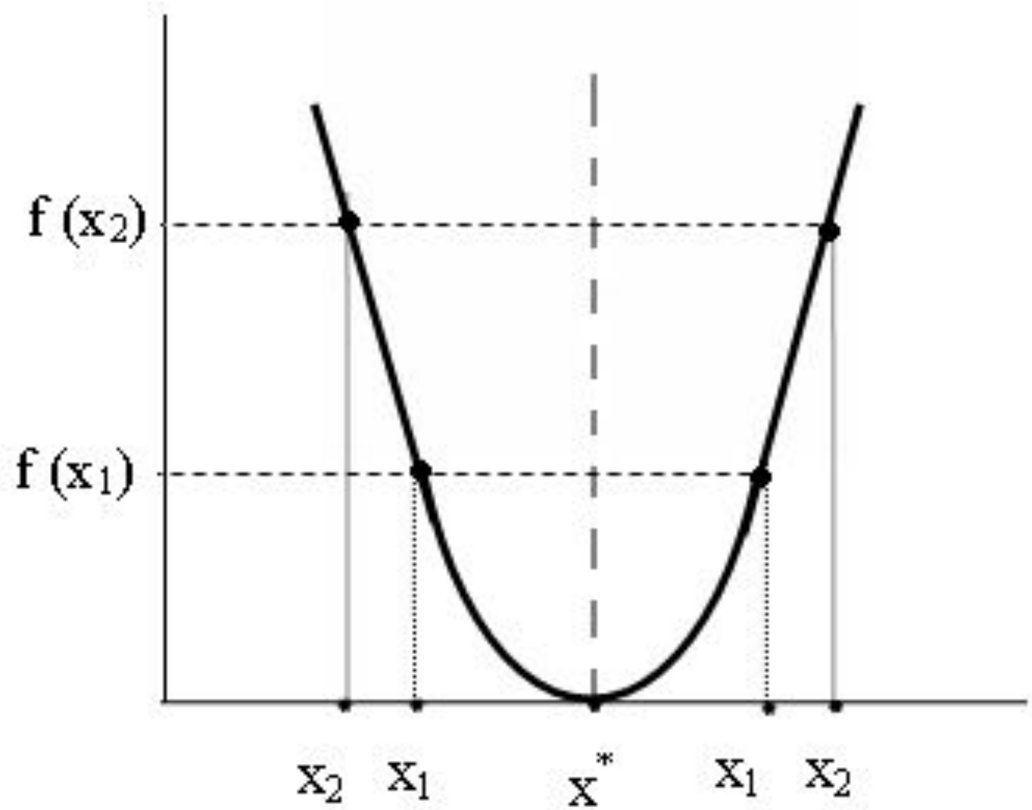
2.2. Численные методы поиска экстремума функции одной переменной

2.2.1. Постановка задачи.

Будем предполагать, что в пределах отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ ***унимодальна***, т.е. на данном отрезке имеет только один минимум.

Другими словами, если x^* – единственная точка минимума на отрезке , то $f(x)$ является унимодальной на данном отрезке тогда и только тогда, когда для любых двух точек отрезка x_1 и x_2 взятых по одну сторону от точки минимума x^* соответствует меньшее значение функции, т.е. как при $x^* \geq x_1 \geq x_2$, так и при $x^* \leq x_1 \leq x_2$ справедливо неравенство

$$f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2).$$



f (x2)
f (x1)
x2
x1
x*
x1
x2

Унимодальная функция может быть ***непрерывной, разрывной или дискретной.***

Для проверки унимодальной функции на практике обычно используют следующий критерий:

если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $f''(x)>0$ в любой точке этого отрезка, то $f(x)$ унимодальная функция на отрезке $[a,b]$.

Заметим, что $f''(x)>0$ определяет множество точек, на котором функция является выпуклой вниз.

Пример 2.2. Для функции $f(x)=2x^2-\ln x$ найти отрезок, на котором функция унимодальна.

Решение.

Функция $f(x)$ определена при $x > 0.$

Найдем ее производные:

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 4 + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0;\infty)$$

Следовательно, функция $f(x)$ унимодальна на интервале $(0, +\infty).$

Первая производная $f'(x) = 0$ при $x = 0{,}5.$

Следовательно $x = 0{,}5$ - точка локального минимума.

2.2.2. Стратегии поиска

Существуют две принципиально различные стратегии выбора точек, в которых производится вычисление значений целевой функции.

- ***Пассивная стратегия*** **-** все точки задаются заранее, до начала вычислений.

- ***Последовательная стратегия*** **-** точки выбираются последовательно в процессе поиска с учетом результатов предыдущих вычислений.

Последовательную стратегию можно реализовать двумя способами:

- построением последовательности вложенных в друг друга интервалов, каждый из которых содержит точку минимума;
- применением квадратичной и кубической интерполяции, где по нескольким вычисленным значениям функции строятся интерполяционный многочлен, а его минимум указывает на очередное приближение искомой точки экстремума.

Алгоритм последовательной стратегии

- Выбор начального интервала $[a, b]$ изменения параметра , называемого ***интервалом неопределенности***. Границы интервала
выбираются таким образом, чтобы функция была унимодальной.
 Для выбора начального интервала неопределенности можно применить алгоритм Свенна.

- Уменьшение интервала неопределенности.

- Проверку условия окончания процесса вычислений. Поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности $[a_k, b_k]$ будет меньше заданной точности вычислений ε>0, т.е.

$$b_k - a_k \le \varepsilon.$$

Прием уменьшения интервала неопределенности

Пусть функция $f(x)$ унимодальна на интервале $[a,b]$ и ее минимум достигается в точке $x^* \in [a,b]$. Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2, расположенные на интервале таким образом, что $x_1 < x_2$. Сравнивая значения функции $f(x_1)$, $f(x_2)$ в этих точках, можно сузить интервал неопределенности следующим образом:

- если $f(x_1) < f(x_2)$, то точка минимума лежит на интервале $[a, x_2]$.

- если $f(x_1) > f(x_2)$, то точка минимума лежит на интервале $[x_1, b]$.

- если $f(x_1) = f(x_2)$, то точка минимума лежит на интервале $[x_1, x_2]$.

Рассмотрим наиболее распространенные в практике следующие приближенные методы поиска минимума:

- **метод равномерного поиска;**
- **метод дихотомии;**
- **метод деления интервала пополам;**
- **метод золотого сечения;**
- **метод Фибоначчи;**
- **метод квадратичной интерполяции.**

2.2.3. Метод равномерного поиска

Метод относится к пассивным стратегиям.

Задается начальный интервал неопределенности $[a,b]$ и количество n вычислений целевой функции $f(x)$.

Вычисляются значения целевой функции $f(x_i)$ в равноотстоящих друг от друга точках

$$x_i = a + ih = a + i\frac{b-a}{n}, \quad i = \overline{0,n}.$$

Среди точек x_i находится точка x^*, в которой целевая функция принимает наименьшее значение

$$f(x^*) = \min_{0 \le i \le n} f(x_i).$$

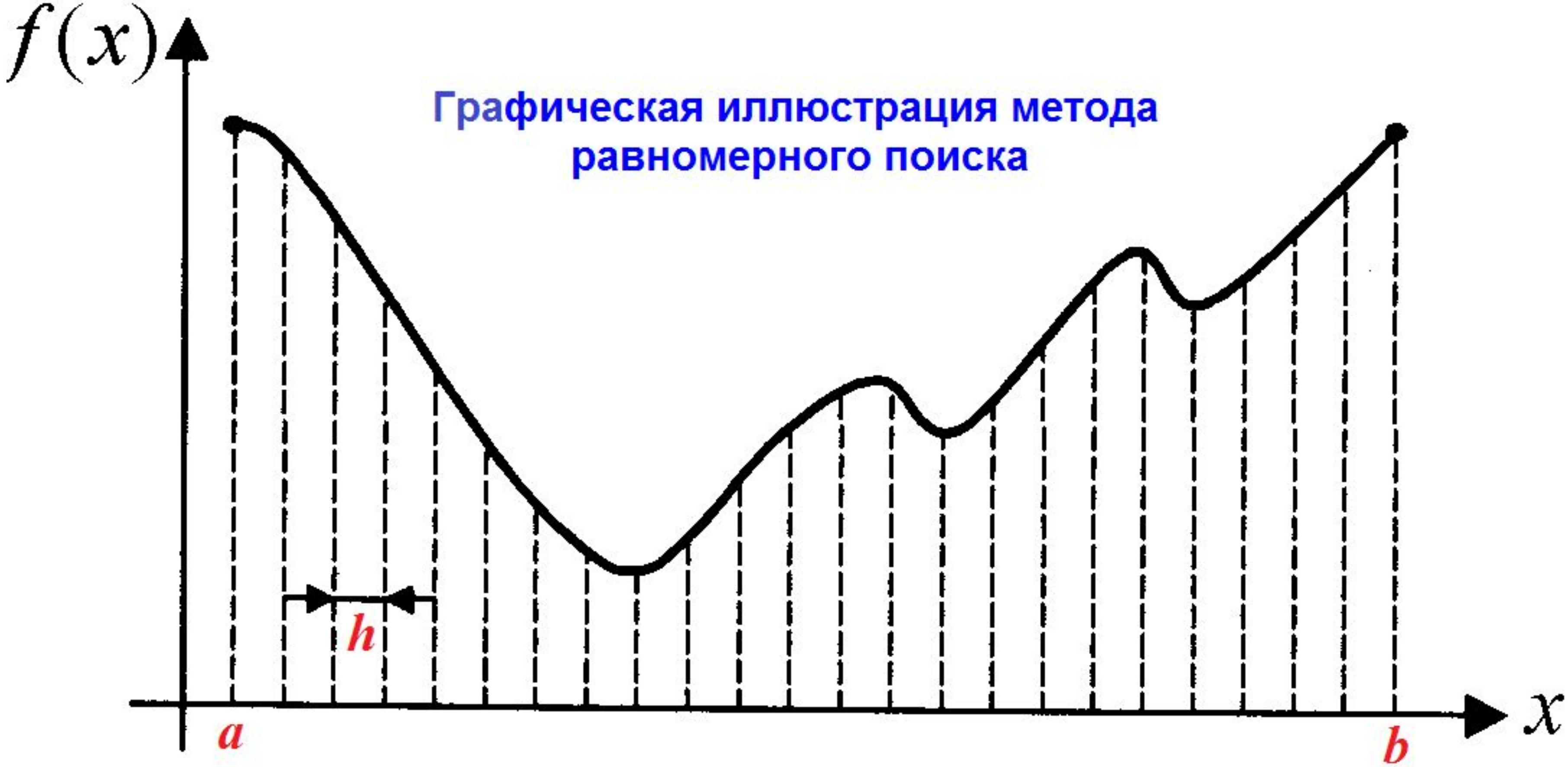
Эффективность метода невелика и вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \frac{2}{n+1}.$$

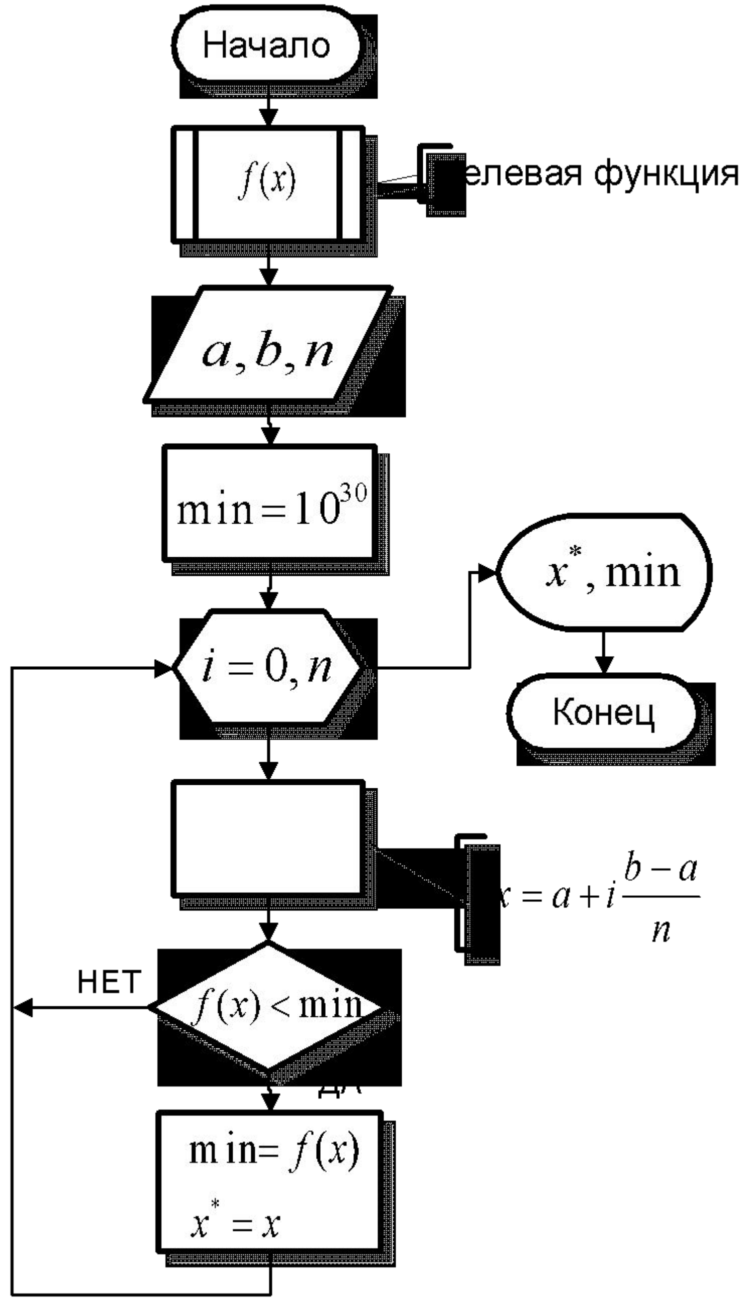
Например, для достижения точности $\varepsilon = 0.01$, потребуется вычислить целевую функцию в 199 точках, а при $\varepsilon = 0.001$ в 1999 точках.

Преимущество – возможность определения глобального экстремума.

Графическая иллюстрация метода равномерного поиска



Блок-схема алгоритма



2.2.4. Метод дихотомии

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности $[a,b]$ и требуемая точность поиска ε.

Делится интервал поиска пополам

$$x = \frac{a+b}{2}$$

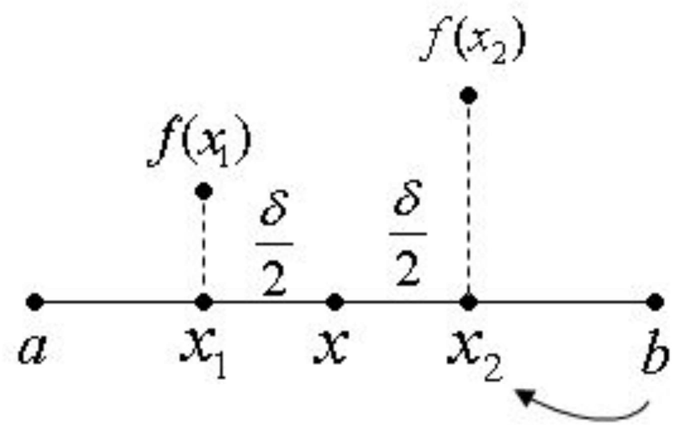
и вычисляются две абсциссы симметрично расположенные относительно точки x:

$$x_1 = x - \frac{\delta}{2}; \quad x_2 = x + \frac{\delta}{2},$$

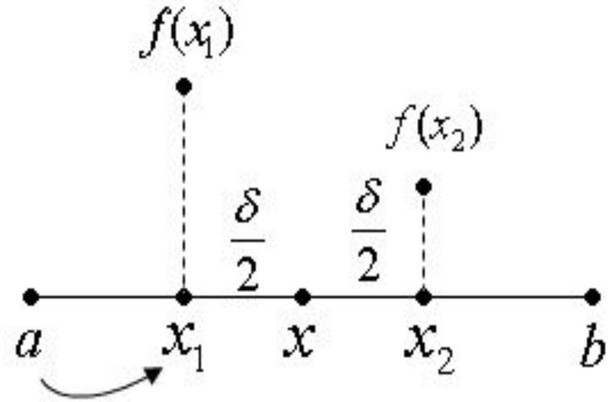
где $\delta > 0$ - величина различимости точек $(\delta < \varepsilon)$.

Вычисляются функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Сравниваются полученные значения и находится новый уменьшенный интервал неопределенности:

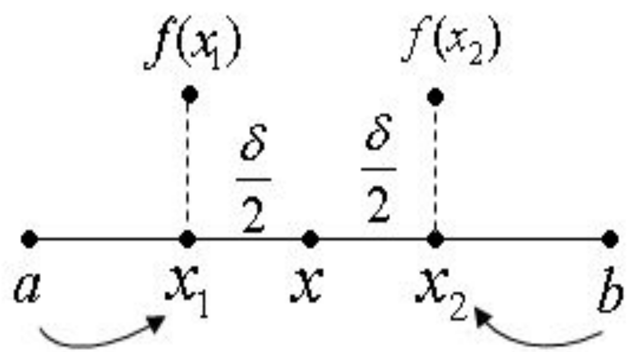
а) Если $f(x_1) < f(x_2)$, положить $b = x_2$.



б) Если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $a = x_1$.



в) Если $f(x_1) = f(x_2)$, положить $a = x_1$, $b = x_2$.



Затем снова вычисляются координаты x_1 и x_2 и продолжается поиск.

За оценку прекращения поиска принимают $b - a \le \varepsilon$, а за минимальное значение

$$x^* = \frac{a+b}{2}.$$

За одну итерацию интервал неопределенности уменьшается примерно в два раза. За n итераций длина интервала будет примерно равна

$$\frac{b-a}{2^n}$$

Точность на n – м шаге вычислений определяется неравенством

$$\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon$$

Отсюда следует, что для достижения точности ε потребуется

$$n \ge \frac{\ln[(b-a)/\varepsilon]}{\ln 2}.$$

итераций.

На каждой итерации целевая функция вычисляется дважды.

Блок-схема алгоритма